Corrigé du DS n° 8

On note $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$

Pour $s \in \mathcal{L}_n$, $\sigma(s) = Sp(s)$ et pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\mathcal{Q}_s(x) = \dfrac{\left(s(x), x\right)}{\|x\|^2}$.

Pour $T \in \mathcal{S}_n$, $m(T) = \min \sigma(T)$ et $M(T) = \max \sigma(T)$.

1. Fonctions d'endomorphismes symétriques

Q1. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n$, donc si $T_1, T_2 \in \mathcal{S}_n$:

$$\boxed{T_1 + T_2 \in \mathcal{S}_n}$$

Q2. On a $m(T) \in \sigma(T)$, donc il existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $T(x) = m(T)x$, alors $\|x\|^2 \neq 0$ et :

$$\mathcal{Q}_T(x) = \frac{\left(T(x), x\right)}{\|x\|^2} = \frac{\left(m(T)x, x\right)}{\|x\|^2} = \frac{m(T)\left(x, x\right)}{\|x\|^2} = m(T)\frac{\|x\|^2}{\|x\|^2} = m(T).$$

De la même façon, on prouve qu'il existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{Q}_T(x) = M(T)$, et donc :

$$\boxed{\mathcal{Q}_T \text{ atteint les valeurs } m(T) \text{ et } M(T).}$$

Q3. Comme l'endomorphisme T est symétrique réel, il est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ que l'on peut choisir telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $T(e_i) = \lambda_i e_i$ avec $m(T) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = M(T)$. On a alors pour tout $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$\left(T(x), x\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i), \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2.$$

Comme pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i^2 \geq 0$ et $m(T) \leq \lambda_i \leq M(T)$, on peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} m(T) x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} M(T) x_i^2 \quad \Leftrightarrow \quad m(T)\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq \left(T(x), x\right) \leq M(T)\sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Soit :

$$m(T)\|x\|^2 \leq \left(T(x), x\right) \leq M(T)\|x\|^2.$$

Comme $\|x\|^2 > 0$ car $x \neq 0$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$:

$$m(T) \leq \mathcal{Q}_T(x) \leq M(T).$$

Comme les valeurs $m(T)$ et $M(T)$ sont atteintes par $\mathcal{Q}_T$:

$$\boxed{\min_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \mathcal{Q}_T(x) = m(T) \text{ et } \max_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \mathcal{Q}_T(x) = M(T).}$$

Q4. On a $\sigma(T) \subset [m(T), M(T)]$, donc :

$$\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+ \ \left(\textit{resp. } \sigma(T) \subset \mathbb{R}_+^*\right) \quad \Leftrightarrow \quad m(T) \geq 0 \ \left(\textit{resp. } m(T) > 0\right).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $Q_T(x) = \dfrac{\left(T(x), x\right)}{\|x\|^2} \geq m(T)$, donc :

$$\left(T(x), x\right) \geq m(T)\|x\|^2.$$

Comme on a en particulier $\left(T(z), z\right) = m(T)\|z\|^2$ avec z vecteur propre unitaire associé à $m(T)$, on a :

$$\begin{aligned} m(T) \geq 0 \ \left(\textit{resp. } m(T) > 0\right) \quad &\Rightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ m(T)\|x\|^2 \geq 0 \ \left(\textit{resp. } m(T)\|x\|^2 > 0\right) \text{ car } \|x\|^2 > 0 \\ &\Rightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \left(T(x), x\right) \geq 0 \ \left(\textit{resp. } \left(T(x), x\right) > 0\right) \\ &\Rightarrow \quad T \in S_n^+ \ \left(\textit{resp. } T \in S_n^{+*}\right) \end{aligned}$$

Réciproquement, avec les notations de la question précédente, on a $\left(T(e_1), e_1\right) = m(T)$ et :

$$\begin{aligned} T \in S_n^+ \ \left(\textit{resp. } T \in S_n^{+*}\right) \quad &\Rightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \left(T(x), x\right) \geq 0 \ \left(\textit{resp. } \left(T(x), x\right) > 0\right) \\ &\Rightarrow \quad \left(T(e_1), e_1\right) = m(T) \geq 0 \ \left(\textit{resp. } \left(T(e_1), e_1\right) = m(T) > 0\right) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$m(T) \geq 0 \ \left(\textit{resp. } m(T) > 0\right) \quad \Leftrightarrow \quad T \in S_n^+ \ \left(\textit{resp. } T \in S_n^{+*}\right).$$

Et finalement, on a bien :

$$\boxed{\sigma(T) \subset \mathbb{R}_+ \ \left(\textit{resp. } \sigma(T) \subset \mathbb{R}_+^*\right) \quad \Leftrightarrow \quad T \in S_n^+ \ \left(\textit{resp. } T \in S_n^{+*}\right)}$$

Q5. On a $f : J \to \mathbb{R}$ avec $\sigma(T) \subset I$ et on cherche $U \in S_n$ tel que pour tout $\lambda \in \sigma(T)$ et tout $y \in \ker\left(T - \lambda I\right)$:

$$U(y) = f(\lambda)y.$$

Reprenons la base orthonormée de vecteurs propres $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ introduite plus haut (avec donc $T(e_i) = \lambda_i e_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $m(T) = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n = M(T)$).

Définissons $U \in \mathcal{L}_n$ tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$U(e_i) = f(\lambda_i)e_i.$$

Alors, $M_{\mathcal{B}}(U) = diag\left(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)\right)$ et cette matrice est diagonale donc symétrique. Comme c'est al matrice de U dans une base orthonormée, on a $U \in S_n$.

De plus, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $y \in \ker\left(T - \lambda_i I\right) = \mathrm{Vect}(e_{k_1}, e_{k_2}, \dots, e_{k_r})$ où $r = \dim\ker\left(T - \lambda_i I\right)$, on a $y = y_1 e_{k_1} + \dots + y_r e_{k_r}$ avec $y_1, \dots, y_r \in \mathbb{R}$ et :

$$U(y) = y_1 U(e_{k_1}) + \dots + y_r U(e_{k_r}) = y_1 f(\lambda_i)e_{k_1} + \dots + y_r f(\lambda_i)e_{k_r} = f(\lambda_i)\left(y_1 e_{k_1} + \dots + y_r e_{k_r}\right) = f(\lambda_i)y.$$

L'endomorphisme U ainsi défini est solution.

Réciproquement, si $U \in S_n$ est solution, alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $e_i \in \ker\left(T - \lambda_i I\right)$ donc $U(e_i) = f(\lambda_i)e_i$. Comme un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ est parfaitement défini par l'image d'une base, ceci prouve que U est unique.

Finalement :

$$\boxed{\text{Il existe un unique } U \in S_n \text{ tel que pour tout } \lambda \in \sigma(T) \text{ et tout } y \in \ker\left(T - \lambda I\right),\ U(y) = f(\lambda)y.}$$

Q6. Posons $V=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j T^j$.

Comme S_n est stable par produit, on a $T^j\in S_n$ pour tout $j\in\mathbb{N}$ (même $T^0=I\in S_n$).

Alors, comme S_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}_n$, $V\in S_n$ quels que soient les réels α_i.

De plus, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $T^0(e_i)=e_i=\lambda_i^0 e_i$ et si $T^j(e_i)=\lambda_i^j e_i$ avec $j\in\mathbb{N}$, alors :

$$T^{j+1}(e_i)=T^j\left(T(e_i)\right)=T^j(\lambda_i e_i)=\lambda_i T^j(e_i)=\lambda_i\lambda_i^j e_i=\lambda_i^{j+1}e_i.$$

Ceci prouve par récurrence sur *j* que pour tout $j\in\mathbb{N}$, $T^j(e_i)=\lambda_i^j e_i$ et donc :

$$V(e_i)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j T^j(e_i)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda_i^j e_i=\left(\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda_i^j\right)e_i=p(\lambda_i)e_i.$$

Alors' d'après la question précédente, on a $V=p(T)$, par unicité de $p(T)$, soit :

$$\boxed{p(T)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j T^j}$$

Q7. Pour toute fonction $f:J\to\mathbb{R}$, l'endomorphisme $f(T)$ est parfaitement défini par les $f(\lambda)$ pour $\lambda\in\sigma(T)$. Or, il existe une fonction polynômiale *p* telle que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $p(\lambda_i)=f(\lambda_i)$:

$$p:x\mapsto\sum_{\lambda\in\sigma(T)}f(\lambda)\ell_\lambda(x)$$

avec, pour $\lambda\in\sigma(T)$, $\ell_\lambda:x\mapsto\dfrac{\prod_{\mu\in\sigma(T)\setminus\{\lambda\}}(x-\mu)}{\prod_{\mu\in\sigma(T)\setminus\{\lambda\}}(\lambda-\mu)}$.

On a alors $f(T)=p(T)$ et donc $f(T)$ est polynomiale en *T* (attention, *f* n'est pas forcément polynômiale).

Finalement :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de fonction } g:J\to\mathbb{R} \text{ telle que } g(T) \text{ ne soit pas égal à un polynôme de } T.}$$

Q8. Avec toujours les même notations, on a vu que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $U(e_i)=f(\lambda_i)e_i$ avec $U=f(T)$. Ceci prouve que $f(\lambda_i)$ est valeur propre de *U* et que tous les e_i sont vecteurs propres de *U*. Ainsi, $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est une base de vecteurs propres de *U* et donc *U* n'admet pas d'autre valeur propre que les $f(\lambda_i)$.

Ceci prouve immédiatement que :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f(T) \text{ sont les } f(\lambda_i) \text{ pour } i\in[\![1,n]\!] \text{ avec } \ker\left(U-f(\lambda_i)I\right)=\bigoplus_{\substack{\lambda\in\sigma(T)\\ f(\lambda)=f(\lambda_i)}}\ker\left(T-\lambda I\right).}$$

Q9. On a vu dans la question 5 que pour toute fonction $h:J\to\mathbb{R}$:

$$M_{\mathcal{B}}\left(h(T)\right)=diag\left(h(\lambda_1),\dots,h(\lambda_n)\right).$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B}}\left(f(T)\right)=diag\left(f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n)\right)$$
$$M_{\mathcal{B}}\left(g(T)\right)=diag\left(g(\lambda_1),\dots,g(\lambda_n)\right)$$
$$M_{\mathcal{B}}\left((fg)(T)\right)=diag\left((fg)(\lambda_1),\dots,(fg)(\lambda_n)\right)=diag\left(f(\lambda_1)g(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n)g(\lambda_n)\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned}M_{\mathcal{B}}\left(f(T)\circ g(T)\right)&=diag\left(f(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n)\right)diag\left(g(\lambda_1),\dots,g(\lambda_n)\right)\\&=diag\left(f(\lambda_1)g(\lambda_1),\dots,f(\lambda_n)g(\lambda_n)\right)=M_{\mathcal{B}}\left((fg)(T)\right)\end{aligned}$$

Ainsi, $M_{\mathcal{B}}\left(f(T)\circ g(T)\right)=M_{\mathcal{B}}\left((fg)(T)\right)$, donc :

$$\boxed{f(T)\circ g(T)=(fg)(T)}$$

Q10. D'après la question 4, si $S\in S_n^{+*}$, alors $\sigma(S)\subset\mathbb{R}_+^*$, donc $f(S)$ est bien définie. De plus, avec aucune valeur propre de S n'est égale à 0, donc $S\in GL_n(\mathbb{R})$ et ainsi, S^{-1} est bien définie.

Si $g=id_{\mathbb{R}_+^*}$, on a $g(S)=S$ car, toujours avec les notations de la question 3, $g(S)(e_i)=g(\lambda_i)e_i=\lambda_i e_i=S(e_i)$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$. La fonction $fg:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ est constante et vaut toujours 1, donc $(fg)(S)=id_{\mathbb{R}^n}$ car pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $(fg)(S)(e_i)=(fg)(\lambda_i)e_i=e_i$.

Enfin, d'après la question précédente, on a $f(S)\circ g(S)=(fg)(S)$, soit :

$$f(S)\circ S=id_{\mathbb{R}^n}.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{f(S)=S^{-1}}$$

Q11. D'après la question 4, si $S\in S_n^{+}$, alors $\sigma(S)\subset\mathbb{R}_+$. Comme ici $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$:

$$\boxed{f(S)\text{ est bien définie.}}$$

Comme dans la question précédente, on peut écrire :

$$\sqrt{S}^2=\left(f(S)\right)^2=f(S)\circ f(S)=(f^2)(S).$$

Or, $f^2=id_{\mathbb{R}_+}$, donc $(f^2)(S)=S$ et ainsi :

$$\boxed{\sqrt{S}^2=S}$$

Si toutes les valeurs propres de S sont simples, alors $\lambda_1<\lambda_2<\dots<\lambda_n$ et tous les sous-espaces propres sont des droites : $\ker\left(S-\lambda_i I\right)=\mathrm{Vect}\left(e_i\right)$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.

Soit $C\in S_n^+$ telle que $C^2=S$ (il y en a, ne serait-ce que $\sqrt{S}$ dont les valeurs propres sont les $\sqrt{\lambda_i}$ donc positives). Soit alors $\mu\in\mathbb{R}_+$ une valeur propre de C (qui est diagonalisable car symétrique réelle) et $x\neq 0$ un vecteur propre associé.

On a :

$$C(x)=\mu x \quad \Rightarrow \quad S(x)=C^2(x)=\mu^2 x .$$

Donc, il existe $i\in [\![1,n]\!]$ tel que $\mu^2=\lambda_i$ et $x\in \mathrm{Vect}(e_i)$. Comme $\mu\geq 0$, on a :

$$\mu=\sqrt{\lambda_i} \text{ et } \ker(C-\mu I)\subset \mathrm{Vect}(e_i).$$

Mais, $\dim\ker(C-\mu I)\geq 1$, donc $\ker(C-\mu I)=\mathrm{Vect}(e_i)$. On a alors :

$$M_{\mathcal{B}}(C)=diag\left(\sqrt{\lambda_1},\dots,\sqrt{\lambda_n}\right)=M_{\mathcal{B}}\left(\sqrt{S}\right).$$

Et donc $C=\sqrt{S}$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\text{La seule matrice C de } S_n^+ \text{ vérifiant } C^2=S \text{ est } C=\sqrt{S} .}$$

Si on reprend le même raisonnement que ci-dessus (avec les mêmes notations), mais avec seulement $C\in S_n$, alors on obtient :

$$\mu=\pm\sqrt{\lambda_i} \text{ et } \ker(C-\mu I)=\mathrm{Vect}(e_i).$$

Et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ est encore une base de vecteurs propres de C. On a donc :

$$M_{\mathcal{B}}(C)=diag\left(\pm\sqrt{\lambda_1},\dots,\pm\sqrt{\lambda_n}\right)=M_{\mathcal{B}}\left(\sqrt{S}\right).$$

Pour dénombrer le nombre d'endomorphismes correspondant, il faut distinguer deux cas, suivant que 0 est valeur propre de S ou pas (soit $\lambda_1=0$ ou $\lambda_1\neq 0$) :

$$\boxed{\text{Le nombre de matrices } C \text{ de } S_n \text{ vérifiant } C^2=S \text{ est } 2^n \text{ quand } \lambda_1\neq 0 \text{ et } 2^{n-1} \text{ quand } \lambda_1=0.}$$

Q12. Soient $T_1,T_2,T_3\in S_n$.

- On a $T_1-T_1=0\in S_n^+$, donc $T_1\geq T_1$. La relation $\geq$ est *réflexive*.
- Si $T_2\geq T_1$ et $T_1\geq T_2$, alors d'après la question 4 :

$$T_2-T_1\in S_n^+ \quad\Rightarrow\quad \sigma(T_2-T_1)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}\subset\mathbb{R}_+$$
$$T_1-T_2\in S_n^+ \quad\Rightarrow\quad \sigma(T_1-T_2)=\sigma(-(T_2-T_1))=\{-\lambda_1,\dots,-\lambda_p\}\subset\mathbb{R}_+ \quad\Rightarrow\quad \{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}\subset\mathbb{R}_-$$

  Ainsi, $\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}\subset\mathbb{R}_-\cap\mathbb{R}_+=\{0\}$, donc la seule valeur propre de T_2-T_1 est 0, et comme T_2-T_1 est diagonalisable (car symétrique réel), $T_2-T_1=0$, soit $T_2=T_1$. La relation $\geq$ est *antisymétrique*.
- Si $T_2\geq T_1$ et $T_3\geq T_2$, on a $T_2-T_1\in S_n^+$ et $T_3-T_2\in S_n^+$. Alors, $T_3-T_1=(T_3-T_2)+(T_2-T_1)\in S_n$ et pour tout $x\in\mathbb{R}^n$:

$$\left((T_3-T_1)(x),x\right)=\left((T_3-T_2)(x)+(T_2-T_1)(x),x\right)=\left((T_3-T_2)(x)\right)+\left((T_2-T_1)(x),x\right)\geq 0 .$$

  Donc, $T_3-T_1\in S_n^+$, soit $T_3\geq T_1$. La relation $\geq$ est *transitive*.

Finalement, la relation $\geq$ est réflexive, antisymétrique et transitive, donc c'est une relation d'ordre.

Soient $T\in\mathcal{L}_n$, de matrice respectives $\begin{pmatrix} 2 & 0_{1,n-1}\\ 0_{n-1,1} & 0_{n-1}\end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$.

Comme $\mathcal{B}_c$ est orthonormée, on a $T \in S_n$. Or, $I \in S_n$ et :

$$M_{\mathcal{B}_c}(I-T) = \begin{pmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que $\sigma(I-T) = \sigma(T-I) = \{-1,1\}$, donc n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_+$ et, à nouveau d'après la question 4, on a $I-T \notin S_n^+$ et $T-I \notin S_n^+$. Ceci veut dire que l'on n'a ni $I \geq T$, ni $T \geq I$ et donc que T et I ne sont pas comparable par la relation $\geq$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La relation } \geq \text{ est une relation d'ordre, mais pas totale.}}$$

Q13. Soient $T_1, T_2, U \in S_n$ telles que $T_2 \geq T_1$. On a alors :

$$U \circ T_2 \circ U - U \circ T_1 \circ U = U \circ \left(T_2 - T_1\right) \circ U .$$

- Notons A_1, B les matrices respectives de T_1, U dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^n$. Comme $\mathcal{B}_c$ est orthonormée, A_1, B sont symétriques et :

  $${}^t Mat_{\mathcal{B}_c}\left(U \circ T_1 \circ U\right) = {}^t(BA_1B) = {}^tB\, {}^tA_1\, {}^tB = BA_1B = Mat_{\mathcal{B}_c}\left(U \circ T_1 \circ U\right).$$

  Donc, $U \circ T_1 \circ U \in S_n$.

  De même, $U \circ T_2 \circ U \in S_n$ et $U \circ T_2 \circ U - U \circ T_1 \circ U = U \circ \left(T_2 - T_1\right) \circ U \in S_n$ car $T_2 - T_1 \in S_n$.

  ATTENTION : En général, le produit de deux matrices symétriques (ou plus) n'est pas forcément symétrique.

- Comme $T_2 - T_1 \in S_n^+$, on a pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $\left(\left(T_2 - T_1\right)(y),\, y\right) \geq 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

  $$\left(U \circ \left(T_2 - T_1\right) \circ U(x),\, x\right) = \left(U\left[\left(T_2 - T_1\right)\left(U(x)\right)\right],\, x\right) = \left(\left(T_2 - T_1\right)\left(U(x)\right),\, U(x)\right) \geq 0.$$

  Donc, $U \circ T_2 \circ U - U \circ T_1 \circ U \in S_n^+$.

Ainsi :

$$\boxed{U \circ T_2 \circ U \geq U \circ T_1 \circ U}$$

Q14. Tel qu'indiqué, considérons $T_1, T_2 \in S_2$ tels que $M_{\mathcal{B}_c}(T_1) = M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}_c}(T_2) = M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ (avec ici $n = 2$). Les deux matrices ci-dessus sont bien symétriques donc T_1 et T_2 sont bien symétriques car la base canonique est orthonormée et :

$$\chi_{T_1} = \begin{vmatrix} X-1 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)^2 - 1 = X(X-2) \quad \Rightarrow \quad \underline{\sigma(T_1) = \{0,2\} \subset \mathbb{R}_+}.$$

$$\chi_{T_2} = \begin{vmatrix} X-2 & -1 \\ -1 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1)(X-2) - 1 = X^2 - 3X + 1 = \left(X - \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\sigma(T_2) = \left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\} \subset \mathbb{R}_+}.$$

De plus, $T_2 - T_1 \in S_2$ et :

$$M_{\mathcal{B}_c}(T_2 - T_1) = M_{\mathcal{B}_c}(T_2) - M_{\mathcal{B}_c}(T_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \sigma(T_2 - T_1) = \{0,1\} \subset \mathbb{R}_+ \quad \Rightarrow \quad T_2 - T_1 \in S_2^+ \quad \Rightarrow \quad \underline{T_2 \geq T_1}.$$

Enfin, d'après la question 6, on a $f(T_1) = T_1^{\,2}$ et $f(T_2) = T_2^{\,2}$. Alors :

$$M_{\mathcal{B}_c}\left(f(T_2) - f(T_1)\right) = M_{\mathcal{B}_c}(T_2^{\,2} - T_1^{\,2}) = \left(M_{\mathcal{B}_c}(T_2)\right)^2 - \left(M_{\mathcal{B}_c}(T_1)\right)^2 = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\chi_{f(T_2)-f(T_1)} = \begin{vmatrix} X-3 & -1 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X^2 - 3X - 1 = \left(X - \frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\left(X - \frac{3+\sqrt{13}}{2}\right).$$

Comme $2 - \sqrt{5} < 0$, on a $\sigma\left(f(T_2) - f(T_1)\right) = \left\{\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\right\} \not\subset \mathbb{R}_+$, donc $f(T_2) - f(T_1) \notin S_n^+$.

Ainsi, on a $T_2 \geq T_1$ mais pas $f(T_2) \geq f(T_1)$ et donc :

$$\boxed{\text{L'application } f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto t^2 \text{ ne définit pas un opérateur croissant.}}$$

Remarque : Pour généraliser à $n \geq 2$ quelconque, on peut considérer $T_1, T_2 \in S_n$ tels que :

$$M_{\mathcal{B}_c}(T_1) = \begin{pmatrix} M_1 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix} \text{ et } M_{\mathcal{B}_c}(T_2) = \begin{pmatrix} M_2 & 0_{2,n-2} \\ 0_{n-2,2} & I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Q15. Soient $T_1, T_2 \in S_n^{+*}$ tels que $T_2 \geq T_1$.

Pour $i = 1$ ou 2, on a $\sigma(T_i) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $T_i \in GL(\mathbb{R}^n)$ et ${}^t(T_i^{-1}) = ({}^tT_i)^{-1} = T_i^{-1}$, donc $T_i^{-1} \in S_n$.

Si on note $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,; t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}} = t^{-1/2}$, l'application $U = f(T_2) = T_2^{-1/2}$ est bien définie (car $\sigma(T_2) \subset \mathbb{R}_+^*$) et appartient à S_n^{+*}. D'après la question 13, on a alors :

$$U \circ T_2 \circ U \geq U \circ T_1 \circ U.$$

Or, il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $M_{\mathcal{B}}(T_2) = diag\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right)$ où les λ_k sont les valeurs propres de T_2 (toujours le théorème spectral). Alors, $M_{\mathcal{B}}(U) = M_{\mathcal{B}}(T_2^{-1/2}) = diag\left(\dfrac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right)$ et :

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{B}}(U \circ T_2 \circ U) &= M_{\mathcal{B}}(U) M_{\mathcal{B}}(T_2) M_{\mathcal{B}}(U) \\ &= diag\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) . diag\left(\lambda_1, \dots, \lambda_n\right) . diag\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) \\ &= diag\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \lambda_1 \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} \lambda_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\right) = I_n \end{aligned}$$

Donc, $U \circ T_2 \circ U = I$. Ainsi, $I \geq U \circ T_1 \circ U$, soit $I - U \circ T_1 \circ U \in S_n^+$. Ceci veut dire que $\sigma(I - U \circ T_1 \circ U) \subset \mathbb{R}_+^*$ et comme $\sigma(I - U \circ T_1 \circ U) = \{1 - \lambda, \lambda \in \sigma(U \circ T_1 \circ U)\}$:

$$\boxed{\text{Toutes les valeurs propres de } U \circ T_1 \circ U \text{ sont inférieures ou égales à 1.}}$$

Remarquons que $T_1, U \in S_n^{+*}$ (donc U est bijective et $U^{-1}, T_1^{-1} \in S_n^{+*}$). On montre comme dans la question 13 que $U \circ T_1 \circ U \in S_n^{+}$ est comme, U et T_1 sont bijectives, $U \circ T_1 \circ U$ l'est aussi, donc 0 n'est pas valeur propre et ainsi $U \circ T_1 \circ U \in S_n^{+*}$. Ceci permet de conclure que $\sigma(U \circ T_1 \circ U) \subset \mathbb{R}_+^*$ et avec le résultat précédent :

$$\sigma(U \circ T_1 \circ U) \subset \left]0,1\right]$$

Enfin, comme les valeurs propres de $(U \circ T_1 \circ U)^{-1}$ sont les inverses de celles de $U \circ T_1 \circ U$, on obtient :

$$\sigma\left(U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1}\right) = \sigma\left((U \circ T_1 \circ U)^{-1}\right) \subset \left[1, +\infty\right[.$$

Ceci prouve que $\sigma\left(U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} - I\right) \subset \mathbb{R}_+$, donc que $U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} - I \in S_n^{+}$ et finalement :

$$\boxed{U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \geq I}$$

On a $T_1, T_2 \in S_n^{+*}$ tels que $T_2 \geq T_1$, et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\, t \mapsto -\dfrac{1}{t}$, donc $f(T_1) = -T_1^{-1}$ et $f(T_2) = -T_2^{-1}$.

On veut prouver que : $f(T_2) \geq f(T_1)$, soit $-T_2^{-1} \geq -T_1^{-1}$, ou encore $T_1^{-1} - T_2^{-1} \in S_n^{+}$.

On a $U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \in S_n^{+*}$ et $I \in S_n^{+*}$, et on vient d'établir que :

$$U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \geq I.$$

Or, $U \in S_n$, donc d'après la question 13 :

$$U \circ \left(U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1}\right) \circ U \geq U \circ I \circ U \quad \Leftrightarrow \quad T_1^{-1} \geq U^2 = \sqrt{T_2^{-1}}^{\,2} = T_2^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad T_1^{-1} - T_2^{-1} \in S_n^{+}.$$

Ainsi, on a bien $f(T_2) \geq f(T_1)$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{L'application } f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\, t \mapsto -\frac{1}{t} \text{ définit un opérateur croissant.}}$$

Q16. Soient $T_1, T_2 \in S_n^{+}$ tels que $T_2 \geq T_1$.

On a $T_2^{1/2}, T_1^{1/2} \in S_n^{+}$ donc $T_2^{1/2} - T_1^{1/2} \in S_n$ et $T_2^{1/2} - T_1^{1/2}$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Soit alors $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de $T_2^{1/2} - T_1^{1/2}$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé. On a :

$$(T_2^{1/2} - T_1^{1/2})(x) = T_2^{1/2}(x) - T_1^{1/2}(x) = \lambda x.$$

Donc :

$$\begin{cases} T_2^{1/2}(x) = T_1^{1/2}(x) + \lambda x \\ T_1^{1/2}(x) = T_2^{1/2}(x) - \lambda x \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} T_2(x) = T_2^{1/2} T_2^{1/2}(x) = T_2^{1/2} T_1^{1/2}(x) + \lambda T_2^{1/2}(x) \\ T_1(x) = T_1^{1/2} T_1^{1/2}(x) = T_1^{1/2} T_2^{1/2}(x) - \lambda T_1^{1/2}(x) \end{cases}$$

Et :

$$\begin{aligned} \left(T_2(x) - T_1(x)\,,\, x\right) &= \left(T_2^{1/2} T_1^{1/2}(x) + \lambda T_2^{1/2}(x) - T_1^{1/2} T_2^{1/2}(x) + \lambda T_1^{1/2}(x)\,,\, x\right) \\ &= \left(T_2^{1/2} T_1^{1/2}(x)\,,\, x\right) + \lambda\left(T_2^{1/2}(x)\,,\, x\right) - \left(T_1^{1/2} T_2^{1/2}(x)\,,\, x\right) + \lambda\left(T_1^{1/2}(x)\,,\, x\right) \\ &= \left(T_2^{1/2} T_1^{1/2}(x)\,,\, x\right) - \left(T_1^{1/2} T_2^{1/2}(x)\,,\, x\right) + \lambda\left[\left(T_2^{1/2}(x)\,,\, x\right) + \left(T_1^{1/2}(x)\,,\, x\right)\right] \end{aligned}$$

Et comme $T_2^{1/2}, T_1^{1/2} \in S_n$, on a :

$$\left(T_2^{1/2} T_1^{1/2}(x)\,,\, x\right) - \left(T_1^{1/2} T_2^{1/2}(x)\,,\, x\right) = \left(T_1^{1/2}(x)\,,\, T_2^{1/2}(x)\right) - \left(T_2^{1/2}(x)\,,\, T_1^{1/2}(x)\right) = 0.$$

Ainsi :

$$\left(T_2(x)-T_1(x)\,,\,x\right)=\lambda\left[\left(T_2^{1/2}(x)\,,\,x\right)+\left(T_1^{1/2}(x)\,,\,x\right)\right].$$

Or, $T_2 \geq T_1$ donc $T_2 - T_1 \in S_n^+$ et $T_2^{1/2}, T_1^{1/2} \in S_n^+$, donc :

$$\left(T_2(x)-T_1(x)\,,\,x\right)\geq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\left(T_2^{1/2}(x)\,,\,x\right)\geq 0\\ \left(T_1^{1/2}(x)\,,\,x\right)\geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \left(T_2^{1/2}(x)\,,\,x\right)+\left(T_1^{1/2}(x)\,,\,x\right)\geq 0$$

Alors :

- si $\left(T_2^{1/2}(x)\,,\,x\right)+\left(T_1^{1/2}(x)\,,\,x\right)=0$, on a $\left(T_2^{1/2}(x)\,,\,x\right)=\left(T_1^{1/2}(x)\,,\,x\right)=0$, donc $(T_2^{1/2}-T_1^{1/2})(x)=0$ et $\lambda=0$;
- si $\left(T_2^{1/2}(x)\,,\,x\right)+\left(T_1^{1/2}(x)\,,\,x\right)>0$, on a $\lambda=\dfrac{\left(T_2(x)-T_1(x)\,,\,x\right)}{\left(T_2^{1/2}(x)\,,\,x\right)+\left(T_1^{1/2}(x)\,,\,x\right)}\geq 0$.

Dans les deux cas $\lambda \geq 0$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } T_2^{1/2}-T_1^{1/2} \text{ sont positives.}}$$

On a vu que $T_2^{1/2}-T_1^{1/2}\in S_n$ et ce qui précède prouve que $\sigma(T_2^{1/2}-T_1^{1/2})\subset\mathbb{R}_+$, donc, d'après la question 4, on a $T_2^{1/2}-T_1^{1/2}\in S_n^+$, ce qui prouve que $T_2^{1/2}\geq T_1^{1/2}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{L'application } f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}\,;\,t\mapsto\sqrt{t} \text{ définit un opérateur croissant.}}$$

Q17. On a $u\in\mathbb{R}_+$ et $f_u:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\,;\,t\mapsto\dfrac{t}{t+u}=1-\dfrac{u}{t+u}$.

Soient $T_1,T_2\in S_n^{+*}$ tels que $T_2\geq T_1$.

Pour $i\in\{1,2\}$, on a $T_i+uI\in S_n^{+*}\subset GL(\mathbb{R}^n)$ (car $\sigma(T_i)\subset\mathbb{R}_+^*$ donc $\sigma(T_i+uI)=\{\lambda+u,\ \lambda\in\sigma(T_i)\}\subset\mathbb{R}_+^*$) et :

$$f_u(T_i)=I-u(T_i+uI)^{-1}.$$

Alors :

$$f_u(T_2)-f_u(T_1)=\left[I-u(T_2+uI)^{-1}\right]-\left[I-u(T_1+uI)^{-1}\right]=u\left[(T_1+uI)^{-1}-(T_2+uI)^{-1}\right].$$

Or, $T_1+uI, T_2+uI\in S_n^{+*}$ et $\left(T_2+uI\right)-\left(T_1+uI\right)=T_2-T_1\in S_n^+$ car $T_2\geq T_1$, donc $T_2+uI\geq T_1+uI$ et d'après la question 15, on a $(T_1+uI)^{-1}-(T_2+uI)^{-1}\in S_n^+$. Comme $u\geq 0$, ceci donne :

$$f_u(T_2)-f_u(T_1)=u\left[(T_1+uI)^{-1}-(T_2+uI)^{-1}\right]\in S_n^+.$$

Et donc $f_u(T_2)\geq f_u(T_1)$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\text{Pour tout } u\in\mathbb{R}_+\text{, l'application } f_u:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}\,;\,t\mapsto\frac{t}{t+u} \text{ définit un opérateur croissant.}}$$

Q18. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de $\mathbb{R}^n$ et $P=(\alpha_{i,j})_{1\le i,j\le n}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Pour tout $s\in\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\Phi(s)=\left(\Phi_{i,j}(s)\right)_{1\le i,j\le n}=M_{\mathcal{B}}\left(\varphi(s)\right).$$

Posons $\Psi(s)=\left(\psi_{i,j}(s)\right)_{1\le i,j\le n}=M_{\mathcal{B}'}\left(\varphi(s)\right)$ et $P^{-1}=(\beta_{i,j})_{1\le i,j\le n}$. On a :

$$\Psi(s)=P^{-1}\Phi(s)P.$$

Soit, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$\Psi_{i,j}(s)=\sum_{k=1}^{n}\left[\beta_{i,k}\sum_{\ell=1}^{n}\Phi_{k,\ell}(s)\alpha_{\ell,j}\right]=\sum_{1\le k,\ell\le n}\beta_{i,k}\alpha_{\ell,j}\Phi_{k,\ell}(s).$$

Ainsi, les $\Psi_{i,j}$ sont des combinaisons linéaires des $\Phi_{k,\ell}$, donc si les $\Phi_{k,\ell}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, les $\Psi_{i,j}$ le sont aussi et pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$\int_0^{+\infty}\Psi_{i,j}(s)ds=\sum_{1\le k,\ell\le n}\beta_{i,k}\alpha_{\ell,j}\int_0^{+\infty}\Phi_{k,\ell}(s)ds.$$

Alors :

$$\int_0^{+\infty}\Psi(s)ds=P^{-1}\left(\int_0^{+\infty}\Phi(s)ds\right)P=P^{-1}\left[M_{\mathcal{B}}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(s)ds\right)\right]P=M_{\mathcal{B}'}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(s)ds\right).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Les définitions de « } \varphi \text{ continue et intégrable sur } \mathbb{R}_+^* \text{ » et de } \int_0^{+\infty}\varphi(s)ds \text{ ne dépendent pas de } \mathcal{B}.}$$

Q19. On a $S\in S_n^{+*}$ et $\varphi:\mathbb{R}_+^*\to\mathcal{L}_n\,;\,u\mapsto f_u(S)u^{a-1}$

L'endomorphisme S est symétrique réel, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ que l'on peut choisir telle que, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $S(e_i)=\lambda_ie_i$ où λ_i est la valeur propre associée à e_i (avec $\lambda_i>0$ car $S\in S_n^{+*}$).

On a alors pour tout $u\in\mathbb{R}_+^*$, $M_{\mathcal{B}}\left(f_u(S)\right)=diag\left(f_u(\lambda_1),\dots,f_u(\lambda_n)\right)$, donc :

$$M_{\mathcal{B}}\left(\varphi(u)\right)=M_{\mathcal{B}}\left(f_u(S)u^{a-1}\right)=diag\left(f_u(\lambda_1)u^{a-1},\dots,f_u(\lambda_n)u^{a-1}\right)=diag\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+u}u^{a-1},\dots,\frac{\lambda_n}{\lambda_n+u}u^{a-1}\right).$$

D'après la question précédente, l'application φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, la fonction $u\mapsto\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i+u}u^{a-1}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $i\in[\![1,n]\!]$. Or, la fonction $u\mapsto\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i+u}u^{a-1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit des deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$: $u\mapsto\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i+u}$, qui est rationnelle et définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (car $\lambda_i>0$) et $u\mapsto u^{a-1}$ qui est une fonction puissance (réelle). De plus, comme $a\in\,]0,1[$:

- $\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i+u}u^{a-1}\underset{u\to0^+}{\sim}u^{a-1}$ et $\displaystyle\int_0 u^{a-1}du$ converge car $a-1>-1$;

- $\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i+u}u^{a-1} \underset{u\to+\infty}{\sim} \lambda_i u^{a-2}$ et $\int^{+\infty}\lambda_i u^{a-2}du$ converge car $a-2<-1$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty}\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i+u}u^{a-1}du$ converge, et comme $u\mapsto\dfrac{\lambda_i}{\lambda_i+u}u^{a-1}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Finalement, tous les coefficients de $M_{\mathcal{B}}\left(\varphi(u)\right)$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc :

$$\boxed{\text{L'application } \varphi \text{ continue et intégrable sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Q20. On a $\int_0^{+\infty}\varphi(u)du=\int_0^{+\infty}f_u(S)u^{a-1}du$ et :

$$M_{\mathcal{B}}\left(\int_0^{+\infty}\varphi(u)du\right)=M_{\mathcal{B}}\left(\int_0^{+\infty}f_u(S)u^{a-1}du\right)=diag\left(\int_0^{+\infty}f_u(\lambda_1)u^{a-1}du,\dots,\int_0^{+\infty}f_u(\lambda_n)u^{a-1}du\right).$$

Or, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\lambda_i^a=\dfrac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty}f_u(\lambda_i)u^{a-1}du$, donc :

$$\begin{aligned}M_{\mathcal{B}}\left(\frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty}f_u(S)u^{a-1}du\right)&=diag\left(\frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty}f_u(\lambda_1)u^{a-1}du,\dots,\frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty}f_u(\lambda_n)u^{a-1}du\right)\\&=diag\left(\lambda_1^a,\dots,\lambda_n^a\right)\\&=M_{\mathcal{B}}\left(S^a\right)\end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\boxed{\frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty}f_u(S)u^{a-1}du=S^a}$$

Q21. Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_2,\dots,e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, une application $\varphi:\mathbb{R}_+^*\to\mathcal{L}_n$ continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $u\in\mathbb{R}_+^*$. Si on note $M_{\mathcal{B}}\left(\varphi(u)\right)=\Phi(u)=\left(\Phi_{i,j}(u)\right)_{i,j}$, alors pour tout $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\varphi(u)(x)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n x_j\Phi_{i,j}(u)\right)e_i \quad\text{et}\quad \left(\int_0^{+\infty}\varphi(u)du\right)(x)=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n x_j\int_0^{+\infty}\Phi_{i,j}(u)du\right)e_i\ .$$

Alors :

$$\begin{aligned}\left(\left(\int_0^{+\infty}\varphi(u)du\right)(x)\,,\,x\right)&=\left(\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n x_j\int_0^{+\infty}\Phi_{i,j}(u)du\right)e_i\,,\,\sum_{i=1}^n x_ie_i\right)\\&=\sum_{i=1}^n\left(x_i\sum_{j=1}^n x_j\int_0^{+\infty}\Phi_{i,j}(u)du\right)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(x_ix_j\int_0^{+\infty}\Phi_{i,j}(u)du\right)\end{aligned}$$

Et comme les $\Phi_{k,\ell}$ sont continues et intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, les $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j\Phi_{i,j}$ le sont, donc :

$$\begin{aligned}\left(\left(\int_0^{+\infty}\varphi(u)du\right)(x)\,,\,x\right)&=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j\Phi_{i,j}(u)\right)du=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^n x_i\sum_{j=1}^n x_j\Phi_{i,j}(u)\right)du\\&=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n x_j\Phi_{i,j}(u)\right)e_i\,,\,\sum_{i=1}^n x_ie_i\right)du\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\left(\left(\int_0^{+\infty} \varphi(u)du\right)(x)\,,\,x\right) = \int_0^{+\infty} \left(\varphi(u)(x)\,,\,x\right) du\,.$$

Soient alors $T_1, T_2 \in S_n^{+*}$ tels que $T_2 \geq T_1$.

On veut montrer que $T_2^{\ a} \geq T_1^{\ a}$, autrement dit que $T_2^{\ a} - T_1^{\ a} \in S_n^+$.

On a déjà $T_2^{\ a}, T_1^{\ a} \in S_n^+$ donc $T_2^{\ a} - T_1^{\ a} \in S_n$ et :

$$T_2^{\ a} - T_1^{\ a} = \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty} u^{a-1} f_u(T_2)du - \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty} u^{a-1} f_u(T_1)du = \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty} u^{a-1}\left[f_u(T_2) - f_u(T_1)\right]du\,.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}\left(\left(T_2^{\ a} - T_1^{\ a}\right)(x)\,,\,x\right) &= \left(\left(\frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty} u^{a-1}\left[f_u(T_2) - f_u(T_1)\right]du\right)(x)\,,\,x\right)\\ &= \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty} u^{a-1}\left(\left[f_u(T_2) - f_u(T_1)\right](x)\,,\,x\right)du\end{aligned}$$

Or, d'après la question 17, l'application f_u définit un opérateur croissant pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, autrement dit, $f_u(T_2) - f_u(T_1) \in S_n^+$ et $\left(\left[f_u(T_2) - f_u(T_1)\right](x)\,,\,x\right) \geq 0$. Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}_+$, $u^{a-1}\left(\left[f_u(T_2) - f_u(T_1)\right](x)\,,\,x\right) \geq 0$ donc, par positivité de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} u^{a-1}\left(\left[f_u(T_2) - f_u(T_1)\right](x)\,,\,x\right)du \geq 0\,.$$

Enfin, comme $a \in \left]0,1\right[$, $a\pi \in \left]0,\pi\right[$, donc $\dfrac{\sin a\pi}{\pi} > 0$ et ainsi :

$$\left(\left(T_2^{\ a} - T_1^{\ a}\right)(x)\,,\,x\right) = \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{+\infty} u^{a-1}\left(\left[f_u(T_2) - f_u(T_1)\right](x)\,,\,x\right)du \geq 0\,.$$

Finalement, $T_2^{\ a} - T_1^{\ a} \in S_n$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\left(\left(T_2^{\ a} - T_1^{\ a}\right)(x)\,,\,x\right) \geq 0$, ce qui prouve que $T_2^{\ a} - T_1^{\ a} \in S_n^+$, donc que $T_2^{\ a} \geq T_1^{\ a}$ quand $T_2 \geq T_1$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout } a \in \left]0,1\right[\text{, la fonction } \varphi_a : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\,;\, t \mapsto t^a \text{ définit un opérateur croissant.}}$$