Entrainement n° 6

Suites et série de fonctions

Exercice 73 (CCP 2017 - Suites de fonctions).

Soit $f_n : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{nx^2}{1+nx} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ \dfrac{nx^3}{1+nx^2} & \text{si} \quad x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$

1. Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction que l'on précisera.
2. Montrer que (f_n') converge simplement mais pas uniformément sur $[-1, 1]$.

Exercice 71 (CCP 2017 - Séries de fonctions).

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}(1+nx^2)}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 72 (CCP 2017 - Séries de fonctions).

On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan nx}{n^2}$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x)$ sachant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f'(x)$.
4. Que peut-on en déduire sur le graphe de f ?

Exercice 95 (Mines-Telecom (4) 2017 - Séries de fonctions).

Soit $\forall x \in]-1, +\infty[,\ S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

1. Montrer que S est définie sur $]-1, +\infty[$.
2. Montrer que S est continue sur $[a, b] \subset]-1, +\infty[$.
   Est-ce que S est continue sur $]-1, +\infty[$?
3. Calculer $S(x+1) - S(x)$. Donner un équivalent de S en -1^+.
4. Est-ce que S converge normalement sur $]-1, +\infty[$?

Exercice 76 (CCP 2017 - Séries de fonctions).

Pour $n \geqslant 2$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit $u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln n}$.

1. Donner le domaine D pour lequel $\sum u_n$ converge simplement.
2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur D.
3. Montrer que, pour $x > 1$, $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x) \right| \leqslant \dfrac{1}{\ln(1+n)}$.
4. En déduire que l'application S définie sur D par $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n(x)$ est continue sur D.

Exercice 98 (Mines-Ponts 2016 - Séries de fonctions).

On définit $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n(1+n^2x^2)}$.

Ensemble de définition ? De continuité ? De dérivabilité ?

Exercice 111 (Centrale 2016 - Séries de fonctions).

Soit $\theta \in]0, \pi[$. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in]0, 1[, u_n(t) = t^{n-1} \sin(n\theta)$.

1. Montrer que $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, 1[$. Calculer sa somme S.
2. Montrer que S est intégrable entre 0 et 1 et calculer cette intégrale.
3. On pose $V_n = \dfrac{\sin n\theta}{n}$.
   Montrer la convergence de la série de terme général V_n et calculer sa somme.