Entrainement n° 7

Endomorphismes symétriques - Endomorphismes orthogonaux

Exercice 1

On pose $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Que représente géométriquement la matrice A ?

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $A^3 + A^2 + A = 0_n$. Montrer que $A = 0_n$.

Exercice 3

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques telles que $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que $A \in \mathbb{R}[B]$.

Exercice 4

On considère la matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} X_{1,1} & X_{1,2} \\ X_{2,1} & X_{2,2} \end{pmatrix}$$

dont les coefficients sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant la même loi :

$$\mathbb{P}(X_{1,1} = 1) = \mathbb{P}(X_{1,1} = -1) = \frac{1}{2}.$$

1. Calculer $\mathbb{E}(\det(M))$ et $\mathbb{V}(\det(M))$.
2. Déterminer la probabilité que M soit inversible.
3. Déterminer la probabilité que M soit orthogonale.
4. Déterminer la probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit E un espace euclidien de dimension n, f un endomorphisme symetrique non bijectif, non nul, on rappelle qu'un tel endomorphisme est diagonalisable en base orthonormé.

1. Montrer que 0 est valeur propre de f et montrer qu'il existe au moins une autre valeur propre non nulle.
2. Soient $(\lambda_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ les valeurs propres distinctes de f ($m \leqslant n$), avec $\lambda_1 = 0$, et p_j le projecteur sur $E(\lambda_j)$ parallèlement à la somme directe $\bigoplus_{i\neq j} E(\lambda_i)$.
   (a) Déterminer la matrice de p_j dans une base de E obtenue par juxtaposition des bases des $E(\lambda_i)$.
   (b) Montrer que $\sum_{j=1}^{m} p_j = \mathrm{Id}_E$ et $f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j p_j$.
3. Soit $g = \sum_{j=2}^{m} \frac{1}{\lambda_j} p_j$ et $p = \sum_{j=2}^{m} p_j$.
   (a) Montrer que $f \circ g = g \circ f = p$
   (b) Montrer p est un projecteur orthogonal de noyau $\ker f$ et d'image $\mathrm{Im} f$.
4. Soit $(x, y) \in E^2$. Montrer que
$$f(x) = p(y) \Leftrightarrow x - g(y) \in \ker f.$$
5. Pour $y \in E$ on pose $\mathcal{E}_y = \{x \in E \mid \|f(x) - y\| = \inf_{z\in E}(\|f(z) - y\|)\}$. A-t-on $g(y) \in \mathcal{E}_y$?

Exercice 6

Soit U une matrice symétrique réelle de taille n. L'objectif est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice V, antisymétrique réelle de taille n, telle que $U + V$ soit orthogonale.

1. On suppose que V convient.
   (a) Montrer que $UV = VU$ et $I_n = U^2 - V^2$.
   (b) Montrer que si $\lambda \in \mathrm{Sp}(U)$, alors $\lambda \in [-1, 1]$, et si $\lambda \in]-1, 1[$, alors $\mathrm{Ker}(U - \lambda I_n)$ est de dimension paire.
2. Conclure.