Entrainement n° 8

Fonctions de plusieurs variables

Exercice 1

Soit $f \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2-2x-4y \end{array}$.

1. Déterminer les extremums de la fonction.
2. f admet-elle un maximum global sur $\mathbb{R}^2$?
3. Préciser le minimum global sur $\mathbb{R}^2$.
   Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant x\}$.
4. Représenter l'ensemble D.
5. Quels sont les extremums globaux de f sur D ?

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \\ \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{sinon} \end{cases}$

Étudier la continuité de f, si f admet des dérivées partielles et si oui leur continuité.

Exercice 3

Soit f définie par $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4

Déterminer les fonctions $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant :

$$x\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial f}{\partial y}.$$

On pourra poser $u = xy$ et $v = \frac{x}{y}$.

Exercice 5

Soient $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ et $g(r,t) = f(r\cos t, r\sin t)$.

1. Trouver une relation liant $\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial g}{\partial r}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}$.
2. Montrer que $\varphi\colon r \mapsto \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos t, r\sin t)\mathrm{d}t \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et que $(r\varphi'(r))' = 0$.
3. Conclure que φ est constante.