Chapitre 1 : Bases

Programme officiel PCSI

a) Rudiments de logique

Quantificateurs.	L'emploi de quantificateurs en guise d'abréviation est exclu.
Implication, contraposition, équivalence.	Les étudiants doivent savoir formuler la négation d'une proposition.
Modes de raisonnement : par disjonction des cas, par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.	Le raisonnement par analyse-synthèse est l'occasion de préciser les notions de condition nécessaire et condition suffisante.
Raisonnement par récurrence (simple, double, forte).	Toute construction et toute axiomatique de $\mathbb{N}$ sont hors programme.

b) Ensembles

Ensemble, appartenance. Ensemble vide.	
Inclusion. Partie (ou sous-ensemble).	
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et A^c pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Recouvrement disjoint, partition.	

d) Applications

Application d'un ensemble dans un ensemble. Graphe d'une application.	Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F. Le programme ne distingue pas les notions de fonction et d'application. Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille d'éléments d'un ensemble.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$. Cette notation pouvant prêter à confusion, on peut provisoirement en utiliser une autre.
Composition.	
Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.	
Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	Notation f^{-1}. Compatibilité de cette notation avec celle de l'image réciproque.

a) Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres réels.	Notations $\sum\limits_{i\in I} a_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $\prod\limits_{i\in I} a_i$, $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$. Cas où I est vide.
Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.	Dans la pratique, on est libre de présenter les calculs avec des points de suspension.
Expressions simplifiées de $\sum\limits_{k=1}^{n} k$, $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$, $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.	
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$.	
Sommes doubles. Produit de deux sommes finies.	Exemples de sommes triangulaires.
Rappels sur la factorielle, les coefficients binomiaux. Formule du binôme dans $\mathbb{R}$.	Convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k<0$ et $k>n$.

Plan du résumé

Résumé

I – Rudiments de logique

1. Vocabulaire

L'ensemble de Mathématiques est basé sur les *définitions*, une série d'*axiomes* et des *règles de logique* qui permettent de *démontrer ou prouver* certaines *propositions*. Il faut bien s'entendre sur le vocabulaire mathématique.

Définition : Une définition est l'explication de la nature d'une chose par l'énonciation de ses principaux attributs.

Proposition : Une proposition ou assertion est un énoncé mathématique qui peut être vrai ou faux.

Axiome : Proposition indiscutée, non démontrable, admise comme vraie, évidente.

Propriété : Ce qui est propre ou particulier à un objet mathématique. Couramment, une propriété mathématique est assimilée à une proposition démontrée vraie.

Lemme : Un lemme est une proposition démontrée vraie sur lequel s'appuie la démonstration d'un résultat plus important.

Théorème : Un théorème est une proposition qui doit être démontrée vraie. On utilise maintenant ce mot pour des résultats importants, majeurs.

Corollaire : Proposition qui se déduit immédiatement d'une proposition déjà démontrée.

2. Connecteurs logiques

a. Négation :

Définition :

> Soit P une proposition. La négation de P est la proposition, notée non(P), qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

b. Conjonction et disjonction :

Définitions :

> Soit P et Q deux propositions.
>
> La conjonction de P et Q est la proposition « P et Q », notée $P \wedge Q$, qui est vraie lorsque P et Q sont vraies simultanément et fausse dans les autres cas.
>
> La disjonction de P et Q est la proposition « P ou Q », notée $P \vee Q$, qui est vraie lorsque P ou Q (ou les deux) est vraie et fausse dans P et Q sont fausses.

c. Implication et équivalence :

Définitions :

> Soient P et Q deux propositions.
>
> On dit que P implique Q, noté $P \Rightarrow Q$, quand lorsque P est vraie alors Q l'est aussi. On dit alors que P vraie est une condition suffisante (CS) pour que Q soit vraie et que Q est vraie est une condition nécessaire (CN) pour que P le soit.
>
> L'implication $Q \Rightarrow P$ est la réciproque de $P \Rightarrow Q$.
>
> On dit que P est équivalente Q, noté $P \Leftrightarrow Q$, quand lorsque $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$. On dit alors que P vraie est une condition nécessaire et suffisante (CNS) pour que Q soit vraie.

d. Contraposition :

Définition :

> Soient P et Q deux propositions.
> La (proposition) contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$.

3. Quantificateurs

Les deux quantificateurs mathématiques sont les symboles $\forall$ et $\exists$.

- Le symbole $\forall$ se lit « pour tout » ou « quel que soit » .
- Le symbole $\exists$ se lit « il existe » .
- $\exists!$ se lit « il existe un unique » .

4. Modes de raisonnement

Hormis le raisonnement direct par simples implications ou équivalences, il existe d'autres types de raisonnement pour prouver un résultat.

a. Raisonnement par contre-exemple :

Pour prouver qu'un énoncé est faux, il suffit d'exhiber un contre-exemple (un seul suffit !). Ce type de réfutation s'applique à des propriétés du type « $\forall\ x \in E,\ P(x)$ ».

b. Raisonnement par disjonction de cas :

Le raisonnement par disjonction de cas consiste à diviser la proposition que l'on cherche à prouver en un nombre fini de sous-cas (souvent suivant les valeurs possibles d'une grandeur en jeu) que l'on démontre successivement.

c. Raisonnement par contraposition :

Pour prouver une implication $P \Rightarrow Q$, on prouve sa contraposée $\text{non}(Q) \Rightarrow \text{non}(P)$.

d. Raisonnement par l'absurde :

Pour prouver qu'une proposition P est vraie, on suppose qu'elle est fausse (c'est-à-dire que non(P) est vraie) et par une suite d'implications, on aboutit à une absurdité : une résultat impossible, faux.

e. Raisonnement par analyse-synthèse :

Le raisonnement par analyse-synthèse est une méthode pour déterminer des solutions d'un problème. Elle se déroule en deux étapes.

Première étape : *l'analyse*.

On suppose que le problème admet au moins une solution et, par déductions, on détermine des propriétés que cette solution doit vérifier (des conditions nécessaires).

Seconde étape : *la synthèse*.

On examine tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées (ce sont les seuls candidats possibles à être des solutions) et on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions (s'il y en a).

f. Raisonnement par récurrence :

Théorème : Principe de récurrence.

> Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de propriétés. Si :
> - il existe $n_o \in \mathbb{N}$ tel que P_{n_o} est vraie (*initialisation*),
> - pour tout entier $n \geq n_o$, P_n est vraie entraine P_{n+1} est vraie (*hérédité*)
>
> alors, P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_o$.

Variantes :

- Récurrence double : Si P_{n_o} et P_{n_o+1} sont vraies (*initialisation*) et pour tout entier $n \geq n_o$, P_n et P_{n+1} vraies entraine P_{n+2} vraie (*hérédité*), alors P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_o$.
- Récurrence triple, quadruple,…
- Récurrence généralisée ou forte : Si P_{n_o} est vraie (*initialisation*) et pour tout entier $n \geq n_o$, P_k vraie pour tout entier k compris entre n_o et n implique P_{n+1} vraie (*hérédité*), alors P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_o$.
- Récurrence finie : On peut appliquer le principe de récurrence à une suite finie de propriétés $(P_n)_{n\in[\![n_0,n_1]\!]}$ avec $n_0 < n_1$. Dans ce cas, dans l'étape d'hérédité, il faut supposer la propriété vraie à un rang n tel que $n_0 \leq n \leq n_1 - 1$, de manière à ce que $n+1$ soit bien compris entre n_0 et n_1.
- Récurrences finies descendantes : Si P_{n_1} est vraie (*initialisation*) et pour tout entier $n \in [\![n_0+1, n_1]\!]$, P_n vraie implique P_{n-1} vraie (*hérédité*), alors P_n est vraie pour tout $n \in [\![n_0, n_1]\!]$.

II – Ensembles

1. Généralités

a. Définitions :

Définitions :

> Un ensemble E est une collection d'objets, appelés éléments.
>
> Si x est un élément de E, on dit que x appartient à E et on note $x \in E$.
>
> Une partie ou sous-ensemble de E est un ensemble F dont tous les éléments appartiennent à E, c'est-à-dire telle que : $\forall x \in F,\ x \in E$.
>
> On dit que F est inclus dans E et on note $F \subset E$.
> L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé en ensemble vide, noté $\varnothing$ ou $\{\}$ (il est unique).

Autres notations usuelles :

- Si un élément x n'appartient pas à E, on note $x \notin E$.
- Si F est un ensemble qui n'est pas inclus dans E, on note $F \not\subset E$.
- Si F désigne une partie de E (éventuellement E), on note parfois $F \subseteq E$ (c'est synonyme de $F \subset E$).
- Si F désigne une partie de E, avec $F \neq E$, on dit que F est strictement incluse dans E et on note $F \subsetneq E$.
- On a toujours $\varnothing \subset E$.

b. Ensemble des parties d'un ensemble :

Définition :

> Soit E un ensemble. On a appelle $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble de toutes les parties de E.

Propriété :

> Soit E un ensemble. Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$ alors $\mathscr{P}(A) \subset \mathscr{P}(B)$

c. Produit cartésien de deux ensembles :

Définition :

Soient E et F deux ensembles. On a appelle produit cartésien de E par F, noté $E \times F$, l'ensemble des couples formés par un élément de E et un élément de F : $E \times F = \{(x, y), x \in E, y \in F\}$.

2. Opérations sur les parties

a. Intersection et réunion :

Définitions :

Soient E un ensemble et A et B, deux parties de E.

- On a appelle intersection de A et B, notée $A \cap B$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A et à B : $A \cap B = \{x \in E \setminus x \in A \text{ et } y \in B\}$.
- On a appelle réunion ou union de A et B, notée $A \cup B$, l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A ou à B : $A \cup B = \{x \in E \setminus x \in A \text{ ou } y \in B\}$.
- Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont disjointes (= d'intersection vide). Pour la réunion de deux parties disjointes, on parle d'union disjointe, parfois notée $A \sqcup B$.
- Une famille $(A_1, A_2, ..., A_n)$ de parties non vides et deux à deux disjointes de E telle que $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$ et une partition ou recouvrement disjoint de E.

Propriétés :

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ et $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.
- $A \cap A = A \cup A = A$.
- Si $A \subset B$, $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$.
- Si $A \subset B$, alors $A \cap C \subset B \cap C$ et $A \cup C \subset B \cup C$.
- Si $A \subset B$ et $A \subset C$, alors $A \subset B \cap C$.

Propriétés :

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

i. $\cap$ admet E pour élément neutre ($A \cap E = A$) et $\cup$ admet $\varnothing$ pour élément neutre ($A \cup \varnothing = A$).

Les opérations $\cup$ et $\cap$ sont :

ii. *commutatives* : $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$.

iii. *associatives* : $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ et $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

iv. *distributives l'une par rapport à l'autre* :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

b. Complémentaire :

Définitions :

Soient E un ensemble et A et B, deux parties de E.

- On a appelle complémentaire de A dans E, noté $E \setminus A$ (ou $\overline{A}$ ou A^c quand ce n'est pas ambigu), l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A : $E \setminus A = \{x \in E \setminus x \notin A\}$.
- On a appelle complémentaire de A dans B ou différence, notée $B \setminus A$, l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A : $B \setminus A = \{x \in B \setminus x \notin A\}$.

Propriétés :

Soient E un ensemble et A, B et C trois parties de E.

- $B \setminus A = B \setminus (A \cap B) = B \cap \overline{A}$ et $B \setminus A \subset B$ et $B \setminus A \subset \overline{A}$.
- $A \subset B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} \subset \overline{A}$.
- $A = B \quad \Leftrightarrow \quad \overline{B} = \overline{A}$.
- $\overline{\overline{A}} = A$.

Propriété : Lois de Morgan.

Soient E un ensemble et A et B deux parties de E.

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

III – Applications

1. Vocabulaire

Définitions :

Soient E et F deux ensembles.

Une application ou fonction f de E dans F (ou de E vers F) est une relation entre les éléments de E et certains éléments de F. A tout élément x de E est associé un unique élément de F, noté $f(x)$.

E est appelé ensemble de départ de f et F ensemble d'arrivée.

Pour tout $x \in E$, $f(x)$ est l'image de x par f.

Si, pour $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, x est un antécédent de y par f.

L'ensemble $G = \{(x, y) \in E \times F \setminus y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \setminus x \in E\}$ est appelé graphe de f.

Si A est une partie de E, la fonction indicatrice de A, notée $\mathbb{1}_A$ est la fonction de E dans $\{0,1\}$ qui à tout élément x de E associe 1 si $x \in A$ et 0 si $x \in E \setminus A$.

Notations :

- On note : $f : E \to F ; x \mapsto f(x)$.
- L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathscr{F}(E, F)$ ou F^E.
- On note E^I l'ensemble des familles $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments d'un ensemble E indexées par un ensemble I (si $I = \mathbb{N}$, on retrouve la notation usuelle des suites).

Définition :

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.
La composée de f par g, notée $g \circ f$ est l'application de E dans G qui à tout x de E associe $g\left(f(x)\right)$.

Définition :

Soit E un ensemble. On appelle application identité de E, notée id_E, l'application de E dans E qui à tout x de E associe x.

Propriétés :

Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. On a :

- $f \circ id_E = id_F \circ f = f$.
- $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (la loi $\circ$ est associative et on peut légitimement écrire $h \circ g \circ f$)).

Définitions :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

- Si $E' \subset E$, on appelle restriction de f à E' l'application de E' dans F qui à tout x de E' associe f(x). On la note $f|_{E'}$.
- Si $E \subset E'$, on appelle prolongement de f à E' toute application $\tilde{f}$ de E' dans F' (avec $F \subset F'$) telle que pour tout $x \in E$, $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Définitions :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

- Si $A \subset E$, on appelle image (directe) de A par f l'ensemble, noté f(A), des images des éléments de A par f, soit : $f(A) = \left\{f(x), x \in A\right\} = \left\{y \in F \backslash \exists\, x \in A, y = f(x)\right\}$.
- Si $f : E \to E$, une partie A de E est dite stable par f si $f(A) \subset A$, c'est-à-dire si pour tout $x \in A$, $f(x) \in A$.
- Si $B \subset F$, on appelle image réciproque de B, notée $f^{-1}(B)$, l'ensemble des antécédents des éléments de B par f, soit $f^{-1}(B) = \left\{x \in E \backslash f(x) \in B\right\}$.

Propriétés :

Soit $f : E \to F$.

- Si $A \subset E$, on a $A \subset f^{-1}(f(A))$.
- Si $B \subset F$, on a $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

2. Injections, surjections, bijections

Définitions :

Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$.

- On dit que f est injective si tout élément de F admet au plus un antécédent par f.
- On dit que f est surjective si tout élément de F admet au moins un antécédent par f, autrement dit si :

$$\forall\, y \in F,\ \exists\, x \in E \backslash y = f(x).$$

- On dit que f est <u>bijective</u> si elle est injective et surjective, autrement dit si tout élément de F admet exactement un antécédent par f, soit :

$$\forall\, y \in \mathrm{F},\ \exists!\, x \in \mathrm{E} \setminus y = f(x).$$

- Si f est bijective, alors l'application de F dans E, qui à y de F associe l'unique x de E tel que $f(x) = y$ s'appelle <u>bijection réciproque</u> (ou réciproque tout court) de f et se note f^{-1}.

<u>Propriétés</u> :

- Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective, on a $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_\mathrm{F}$.
- $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective si et seulement si il existe une application $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et $f \circ g = \mathrm{id}_\mathrm{F}$ (g est alors égale à f^{-1}).

<u>Propriété</u> :

La composée de deux injections (*resp.* surjections) est une injection (*resp.* surjection).

La composée $g \circ f$ de deux bijections f et g est une bijection de bijection réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.

3. <u>Relations</u> (*hors programme, mais vocabulaire usuel*)

<u>Définitions</u> :

Soit E un ensemble. Une <u>relation binaire</u> $\mathscr{R}$ sur E est une application de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ à valeurs booléennes (vrai ou faux). Si *x* et *y* sont deux éléments de E, $x \mathscr{R} y$ peut être vrai ou faux.

C'est aussi la donnée d'une partie G de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$. On a alors $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathrm{G}$.

Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E.

- On dit que $\mathscr{R}$ est <u>réflexive</u> si : $\forall\, x \in \mathrm{E},\ x \mathscr{R} x$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est <u>symétrique</u> si : $\forall\, (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ x \mathscr{R} y \Leftrightarrow y \mathscr{R} x$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est <u>antisymétrique</u> si : $\forall\, (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} x \Rightarrow x = y$.
- On dit que $\mathscr{R}$ est <u>transitive</u> si : $\forall\, (x, y, z) \in \mathrm{E}^3,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z \Rightarrow x \mathscr{R} z$.

Une <u>relation d'équivalence</u> est une relation binaire sur un ensemble E qui est réflexive, symétrique et transitive.

IV – Calculs algébriques

1. <u>Loi de composition interne</u> (*hors programme, mais vocabulaire usuel*)

<u>Définitions</u> :

Soit E un ensemble. Une <u>loi de composition interne</u> * sur E est une application de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ dans E. On note $x * y$ l'image d'un couple (x, y) de $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$.

<u>Définitions</u> :

Soit E un ensemble et * une loi de composition interne sur E.

- * est <u>associative</u> si $\forall\, (x, y, z) \in \mathrm{E}^3,\ (x * y) * z = x * (y * z)$ (on peut alors écrire $x * y * z$).
- * est <u>commutative</u> si $\forall\, (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ x * y = y * x$.

- Un élément e de E est un élément neutre si $\forall x \in E,\ x * e = e * x = x$.
- Si * possède un élément neutre e, on dit que $x \in E$ possède un symétrique pour * s'il existe $y \in E$ tel que $x * y = y * x = e$ (le symétrique est alors y). On dit alors que x est inversible.

Définition :

Soit E un ensemble muni de deux lois de composition internes, notées + et ×.

La loi × est distributive à gauche (*resp.* à droite) par rapport à + si, $\forall (x, y, z) \in E^3$:

$$x \times (y + z) = x \times y + x \times z \ (\textit{resp. } (y + z) \times x = y \times x + z \times x).$$

Si × est distributive à gauche et à droite par rapport à +, on dit que × est distributive par rapport à +.

2. Sommes et produits

Dans cette partie, on se place dans un ensemble A muni de deux lois de composition internes, notées + et ×. On suppose en outre que A muni de + est un groupe commutatif (de neutre 0), que × est associative, possède une neutre noté 1 et est distributive par rapport à +.

a. Notations :

Soient n un entier naturel et $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ des éléments de A. Par convention, on note :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n \quad \text{et} \quad \prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times a_2 \times ... \times a_n .$$

Attention : si × n'est pas commutatif, l'ordre est important dans le produit.

$\forall p \in [\![0, n]\!]$ et $\forall p' \in [\![0, n]\!]$ avec $p \le p'$, on peut aussi écrire :

$$\sum_{k=p}^{p'} a_k = a_p + a_{p+1} + ... + a_{p'} \quad \text{et} \quad \prod_{k=p}^{p'} a_k = a_p \times a_{p+1} \times ... \times a_{p'} .$$

Remarque : Si $p \ge 1$, on a alors $\sum_{k=p}^{p'} a_k = \sum_{k=0}^{p'} a_k - \sum_{k=0}^{p-1} a_k$.

Variantes : On peut rencontrer des notations du type :

- $\sum_{b \in B} b$ = la somme de tous les éléments de B, une partie finie (voire infinie…) de A ;
- $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} a_k = a_0 + a_2 + a_4 + ... + a_p$ où p est le plus grand entier pair de $[\![0, n]\!]$ ($p = 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$) ;
- $\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} a_k = a_1 + a_3 + a_5 + ... + a_p$ où p est le plus grand entier impair de $[\![0, n]\!]$ ($p = 2\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor - 1$) ;
- …

Sommes doubles :

- $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^{m} a_{0,j} + \sum_{j=0}^{m} a_{1,j} + ... + \sum_{j=0}^{m} a_{n,j} = \sum_{i=0}^{n} \left(a_{i,0} + a_{i,1} + ... + a_{i,m} \right) = ...$
- Autre notation : $\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \sum_{\substack{0 \le i \le n \\ 0 \le j \le m}} a_{i,j}$.

- ***Attention*** : Il se peut que les bornes de la somme intérieure dépendent de l'indice de la somme extérieure, par exemple : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} a_{i,j}$. Il faut alors faire très attention !

b. Règles de calcul pour la somme :

- $\forall a \in A$, $\sum_{k=0}^{n} a = (n+1)a$ et $\sum_{k=p}^{p'} a = (p'-p+1)a$ (nombre de termes fois a).
- Linéarité : $\forall (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, b_0, b_1, b_2, ..., b_n, \lambda, \mu) \in A^{2n+4}$, on a $\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k + \mu \sum_{k=0}^{n} b_k$.
  Ceci est dû à l'*associativité*, à la *commutativité* de la somme et à la *distributivité* du produit par rapport à l'addition.
- Télescopage : $\forall (a_0, a_1, a_2, ..., a_n) \in A^{n+1}$, $\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$.
- Changement d'indice :
  Soit φ une bijection strictement monotone de $[\![0, n]\!]$ dans une partie de $\mathbb{N}$. Alors :
  $$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k \in \varphi([\![0,n]\!])} a_{\varphi^{-1}(k)}.$$
- Somme doubles : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{i,j} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{i,j}$.

  Mais ***attention***, on ne peut pas intervertir si $m = m(i)$ dépend de i, soit : $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m(i)} a_{i,j}$.

c. Règles de calcul pour le produit :

Comme on l'a vu, il faut faire très attention à la commutativité ou non du produit.

- Si le produit est commutatif, alors $\prod_{k=1}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)$.
- Si l'un des a_k est nul, alors $\prod_{k=1}^{n} a_k = 0$.
- Si tous les b_k sont inversibles pour le produit, alors $\prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} = \frac{\prod_{k=1}^{n} a_k}{\prod_{k=1}^{n} b_k}$.
- *Télescopage* : Si $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sont inversibles pour le produit, $\prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_n}{a_0}$.
- Si les a_k sont des réels *strictement positifs*, on peut se ramener à une somme par $\prod_{k=1}^{n} a_k = e^{\sum_{k=1}^{n} \ln a_k}$.

d. Exemples d'utilisation des notations Σ et Π

Propriété : Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

> Si (u_n) est une suite arithmétique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:
> $$\sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}.$$
> En particulier pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

<u>*Propriété*</u> :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

<u>*Propriété*</u> : *Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique*

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q telle que $q-1$ admet un inverse pour le produit, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

<u>*Propriété*</u> : *Identités remarquables*

Si a et b commutent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}.$$

Si de plus n est impair, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a^n + b^n = (a+b)\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^k b^{n-1-k}.$$

e. <u>Coefficients binomiaux et formule du Binôme de Newton</u> :

<u>*Définitions*</u> :

Soit un entier naturel n.

La <u>factorielle de n</u> est l'entier $n! = 1\times 2\times 3\times \cdots \times n$ si n est non nul et 1 si $n=0$ (donc $0!=1$). $n!$ se lit « n factoriel » ou « factoriel n »

Pour tout entier p compris entre 0 et n, on pose $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Ces nombres s'appellent les <u>coefficients binomiaux</u>.

<u>*Propriétés*</u> :

$\forall\, n \in \mathbb{N}$ et $\forall\, p \in [\![0,n]\!]$:

i. $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$ (symétrie) et en particulier, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

ii. Si $1 \le p \le n$, $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$ (formule de Pascal).

iii. $\binom{n}{p}$ est un entier naturel non nul.

<u>*Propriété*</u> : *Formule du binôme de Newton*

Si a et b commutent, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$