# Chapitre 12 : Intégration sur un segment

## Programme officiel PCSI

### a) Fonctions en escalier

| | |
|---|---|
| Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision.<br>Fonction en escalier.<br>Intégrale d'une fonction en escalier. | Les fonctions sont définies sur un segment et à valeurs dans $\mathbb{R}$. |

### b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

| | |
|---|---|
| Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{R}$. | Interprétation géométrique de l'intégrale.<br>Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. |
| Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.<br>Inégalité triangulaire intégrale : $\left\lvert \int_{[a,b]} f \right\rvert \leqslant \int_{[a,b]} \lvert f\rvert$. | |
| Relation de Chasles. | Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes. |
| Si $f$ est continue, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors $f = 0$. | |
| Intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0. Intégrale d'une fonction périodique sur un intervalle de période. | Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment. |

### c) Sommes de Riemann

| | |
|---|---|
| Pour $f$ continue sur le segment $[a,b]$,<br>$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$ | Interprétation géométrique.<br>La démonstration pourra être proposée dans le cas où $f$ est lipschitzienne. |

### d) Lien entre intégrale et primitive

| | |
|---|---|
| Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $f$ continue.<br>Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives. | |

### e) Inégalité de Taylor-Lagrange

| | |
|---|---|
| Inégalité de Taylor-Lagrange. | La formule de Taylor avec reste intégral n'est pas exigible.<br>L'égalité de Taylor-Lagrange est hors programme.<br>On souligne la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et l'inégalité de Taylor-Lagrange (globale). |

**f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes**

| | |
|---|---|
| Intégrale d'une fonction continue sur un segment à valeurs dans $\mathbb{C}$. | Définition au moyen des parties réelle et imaginaire. |
| Linéarité, majoration du module de l'intégrale. | |
| Inégalité de Taylor-Lagrange. | |

## *Plan du résumé*

## *Résumé*

# I – Fonctions en escalier

Dans cette partie, on considère un segment $[a,b]$ avec $a<b$.

## 1. Subdivision d'un segment

*Définitions* :

> Une subdivision du segment $[a,b]$ est une famille $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ telle que $a_0=a$, $a_n=b$ et $\forall\, k\in[\![0;n-1]\!]$, $a_k<a_{k+1}$.
>
> Une subdivision $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ de $[a,b]$ est dite régulière si $\forall\, k\in[\![0;n-1]\!]$, $a_{k+1}-a_k=c$ avec c fixé.
>
> Si $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ et $\sigma'=(a'_0,a'_1,...,a'_m)$ sont deux subdivisions de $[a,b]$, $\sigma'$ est dite plus fine que $\sigma$ si $\{a_0,a_1,...,a_n\}\subset\{a'_0,a'_1,...,a'_m\}$.

*Propriété* :

> Si $\sigma$ et $\sigma'$ sont deux subdivisions de $[a,b]$, alors $\sigma\cup\sigma'$ est une subdivision de $[a,b]$. De plus, cette subdivision est plus fine que $\sigma$ et $\sigma'$.

## 2. Fonctions en escalier

*Définitions* :

> Un fonction $\varphi$ définie sur $[a,b]$ est dite en escalier, s'il existe une subdivision $\sigma=(a_0,a_1,...a_n)$ de $[a,b]$ telle que $\forall\, k\in[\![0;n-1]\!]$, $\varphi$ est constante sur $]a_k,a_{k+1}[$. Dans ce cas, la subdivision $\sigma$ est dite adaptée ou subordonnée à $\varphi$.

*Notation* : On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

*Propriété* :

> $(\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}),+,.)$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel, stable par produit.

*Théorème* (*hors programme*) :

> Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.
>
> Pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe des fonctions $\varphi$ et $\psi$, en escalier sur $[a,b]$ telles que $\forall\, x\in[a,b]$ :
>
> $$\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)\ \text{ et }\ |\psi(x)-\varphi(x)|\le\varepsilon.$$

# II – Intégrale d'une fonction continue sur un segment

## 1. Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

a. Définition :

*Propriété et définition* :

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $\sigma=(a_0,a_1,...,a_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f, telle que $\forall\, k\in[\![0;n-1]\!]$, $f(x)=b_k$ sur $]a_k,a_{k+1}[$.

La quantité $I=\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)b_k$ est indépendante de la subdivision σ choisie et est appelée intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\int_{[a,b]}f$, $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t)\,dt$.

b. Propriétés :

*Propriété* :

Soit f une fonction constante sur $[a,b]$ telle que $\forall\, x\in[a,b]$, $f(x)=\lambda$. On a $\int_{[a,b]}f=(b-a)\lambda$.

*Propriété* : *Linéarité de l'intégrale.*

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$. $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\int_{[a,b]}(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_{[a,b]}f+\mu\int_{[a,b]}g.$$

*Propriétés* : *Positivité et croissance de l'intégrale.*

Soient f et g deux fonctions en escalier sur $[a,b]$.

- Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]}f\geq 0$.
- Si $f\leq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]}f\leq\int_{[a,b]}g$.

*Propriété* : *Relation de Chasles.*

Soit f une fonction en escalier sur $[a,b]$ et $c\in[a,b]$.

La fonction f est en escalier sur $[a,c]$ et $[c,b]$, et $\int_{[a,b]}f=\int_{[a,c]}f+\int_{[c,b]}f$.

## 2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Posons :

- $E^-=\left\{\varphi\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})\setminus\varphi\leq f\right\}$ et $I^-=\left\{\int_{[a,b]}\varphi\setminus\varphi\in E^-\right\}$.
- $E^+=\left\{\varphi\in\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})\setminus\varphi\geq f\right\}$ et $I^+=\left\{\int_{[a,b]}\varphi\setminus\varphi\in E^+\right\}$.

*Propriété et définition* :

On a $\sup I^-=\inf I^+$ et cette quantité est appelée intégrale de f sur $[a,b]$, notée $\int_{[a,b]}f$.

*Interprétation graphique* :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $\mathscr{C}$ sa courbe dans un repère orthonormée.

- Si f est de signe constant sur $[a,b]$, $\int_{[a,b]} f$ représente l'*aire algébrique* (positive quand f est positive, négative quand f est négative) de la surface comprise entre l'axe des x, $\mathscr{C}$ et les droites verticales passant par a et b.
- Si f est de signe quelconque, $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire de la surface au comprise entre l'axe des x, la partie de $\mathscr{C}$ au-dessus de (Ox) et les droites verticales passant par a et b, moins l'aire de la surface au comprise entre l'axe des x, la partie de $\mathscr{C}$ au-dessous de (Ox) et les droites verticales passant par a et b.

## 3. Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment

a. Propriétés générales :

*Propriétés* :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$.

- *Linéarité de l'intégrale* : $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a $\int_{[a,b]}(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_{[a,b]} f+\mu\int_{[a,b]} g$.
- *Positivité* : Si f est positive sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f \geq 0$.
- *Croissance de l'intégrale* : Si $f \leq g$ sur $[a,b]$, alors $\int_{[a,b]} f \leq \int_{[a,b]} g$.
- *Inégalité de la valeur absolue ou triangulaire* : $\left|\int_{[a,b]} f\right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.
- *Relation de Chasles* : $\forall\, c\in[a,b]$, $\int_{[a,b]} f=\int_{[a,c]} f+\int_{[c,b]} f$.

b. Valeur moyenne :

*Définition* :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a,b]$ le réel :

$$\frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f\,.$$

*Propriété* : *Inégalités de la moyenne.*

Soient f une fonction continue sur $[a,b]$.

- Si m est un minorant et M est un majorant de f sur $[a,b]$, alors $m \leq \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f \leq M$.
- Si g est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sup_{[a,b]}|f|\int_{[a,b]}|g|$.

c. Fonction continue d'intégrale nulle :

*Propriété* :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a,b]$. On a :

$$\int_{[a,b]} f=0 \iff f=0\,.$$

d. Inégalité de Cauchy-Schwarz :

*Propriété* :

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$. On a :

$$\left(\int_{[a,b]} f\times g\right)^2 \leq \left(\int_{[a,b]} f^2\right)\times\left(\int_{[a,b]} g^2\right).$$

Et il y a égalité si et seulement si f et g sont proportionnelles ($\exists\, k\in\mathbb{R}$, tel que $f=kg$ ou $g=kf$ ).

### 4. Extension à l'intégrale entre deux points d'un intervalle quelconque

*Définitions* :

Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. $\forall\,(a,b)\in I^2$, on appelle intégrale de f entre a et b, notée $\int_a^b f(t)dt$, la quantité définie par :

$$\int_a^b f(t)dt = \begin{cases} \int_{[a,b]} f & \text{si } a\leq b \\ -\int_{[b,a]} f & \text{si } a\geq b \end{cases}$$

### 5. Intégrales et primitives

*Théorème* :

Soient $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $a\in I$.

La fonction f admet des primitives sur I et la fonction $x\mapsto\int_a^x f(t)dt$, définie sur I, est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

### 6. Calculs d'intégrales

*Propriété* : *Intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors, pour tous $a,b\in I$, on a :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt.$$

*Propriété* : *Changement de variable*

Soient $f\in\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et $\varphi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha,\beta]$ et à valeurs dans I, on a :

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)dt = \int_\alpha^\beta \varphi'(u)f\left(\varphi(u)\right)du.$$

*Propriétés* :

Soient $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $f\in\mathcal{C}\left(\left[-a,a\right],\mathbb{K}\right)$.

- Si f est paire, $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt$.
- Si f est impaire, $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$.
- Si f est T-périodique sur $\mathbb{R}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$ et $\int_T^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt$.

# III – Formules de Taylor

Dans tout le reste du chapitre, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I quelconque de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

### 1. Formule de Taylor avec reste intégral (*non exigible, mais tellement importante…*)

<u>*Théorème*</u> : *Formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n.*

> Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $C^{n+1}$ sur I et $a \in I$. On a $\forall\, x \in I$ :
> $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

### 2. Inégalité de Taylor-Lagrange

<u>*Théorème*</u> : *Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n.*

> Soient $n \in \mathbb{N}$, f une fonction de classe $C^{n+1}$ sur I. S'il existe un réel $M \geq 0$ tel que $\left|f^{(n+1)}\right| \leq M$ sur I, alors pour tous $a, b \in I$ :
> $$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq M \frac{|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

# IV – Sommes de Riemann

<u>*Définition*</u> :

> Soient f une fonction définie sur $[a,b]$, $\sigma = (a_0, a_1, ..., a_n)$ une subdivision de $[a,b]$ et $(c_0, ..., c_{n-1})$ tel que $\forall\, k \in [\![0;n-1]\!]$, $c_k \in [a_k, a_{k+1}]$. On appelle <u>somme de Riemann</u> de f associée à $\sigma$ et aux $c_k$ la quantité :
> $$S(f, \sigma, c_0, ..., c_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(c_k)\,.$$

<u>*Propriété et définition*</u> :

> Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut approcher $\varepsilon$ près l'intégrale $\int_{[a,b]} f$ par une somme de Riemann de f. C'est ce qu'on appelle la <u>méthode des rectangles</u> pour estimer une intégrale.

<u>*Propriété*</u> :

> Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, on a :
> $$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) = \int_{[a,b]} f\,.$$
> Dans le cas où f est $\lambda$-lipschitzienne sur $[a,b]$, on a de plus pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
> $$\left| \int_{[a,b]} f - \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \right| \leq \lambda \frac{(b-a)^2}{n}\,.$$

## V – Extension aux fonctions à valeurs complexes

*Définition* :

> Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{C})$. $\forall (a,b) \in I^2$, on appelle intégrale de f entre a et b, la quantité définie par :
>
> $$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(t)\big)dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(t)\big)dt.$$

Les propriétés associées à l'intégration qui ne mettent pas en jeu des inégalités s'étendent aux fonctions à valeurs complexes.

En particulier, restent valables pour des fonctions continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ : la linéarité de l'intégrale, l'inégalité triangulaire avec des modules : $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le \int_a^b |f(t)|dt$, la relation de Chasles, inégalité de la moyenne en modules $\left|\int_a^b f(t)dt\right| \le (b-a)\sup|f|$, le lien entre intégrales et primitives, les formules d'intégration par parties et de changement de variable (avec des variables réelles), ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange à tout ordre $n \in \mathbb{N}$, avec des modules.