Chapitre 13 : Séries numériques

Programme officiel PCSI

a) Convergence et divergence

Sommes partielles d'une série numérique. Convergence, divergence, somme.	La série est notée $\sum u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme. Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Reste d'une série convergente. Lien suite-série.	Divergence grossière. La suite (u_n) et la série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ sont de même nature.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme. Relation $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour $z \in \mathbb{C}$.	

b) Séries à termes positifs ou nuls

Convention de calcul et relation d'ordre dans $[0, +\infty]$.	On note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ si la série $\sum u_n$ d'éléments de $\mathbb{R}^+$ diverge.
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Séries de Riemann.	Application à l'étude de sommes partielles.

c) Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables

Convergence absolue de la série numérique $\sum u_n$, encore appelée sommabilité de la suite (u_n).	Notation $\sum_{n=0}^{+\infty} \lvert u_n \rvert < +\infty$. Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.
Une série numérique absolument convergente est convergente. Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	Somme d'une suite sommable.

Plan du résumé

Résumé

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Généralités

1. Vocabulaire

Définitions :

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite réelle ou complexe. La série associée à u (à termes réels ou complexes), notée Σu_n, est la suite de terme général $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$. On dit que la série associée à u est la série de terme général u_n. Dans ce cas, S_n est appelé somme partielle d'indice ou d'ordre n de la série associée à u.

On dit que la série est convergente ou converge si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles converge.

Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente ou diverge.

En cas de convergence, la limite S de $(S_n)_{n\geq n_0}$ est appelée somme de la série et est notée $S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.

Toujours dans ce cas, $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = S - S_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ est appelé reste d'ordre n de la série.

2. Propriétés

Propriété :

Soit Σu_n et Σv_n deux séries convergentes. Pour tous $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$, la série de terme général $\lambda u_n + \mu v_n$ converge et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ (la somme est linéaire).

Propriété et définition :

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Quand le terme général s'une série ne tend pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.

Propriété :

Une suite (u_n) converge si et seulement si la série $\Sigma(u_{n+1} - u_n)$ converge.

Propriété :

Soit une série Σu_n à termes complexes.

$$\Sigma u_n \text{ converge} \iff \Sigma \mathrm{Re}(u_n) \text{ et } \Sigma \mathrm{Im}(u_n) \text{ convergent} \iff \Sigma \overline{u}_n \text{ converge.}$$

II – Séries à termes positifs

1. Comparaison

Propriété :

Une série $\sum u_n$ à termes réels et positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Dans le cas contraire, la série diverge vers $+\infty$ et, dans ce cas, on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Propriété :

Soient Σu_n et Σv_n deux séries réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le v_n$ (apcr suffit).

Si Σv_n converge, alors Σu_n converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \le \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Si Σu_n diverge, alors Σv_n diverge.

Propriété :

Soient Σu_n et Σv_n deux séries réelles.

Si (u_n) et (v_n) sont positives et si $u_n \sim v_n$, alors Σu_n et Σv_n sont de même nature (convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux).

2. Comparaison série-intégrale

Propriété :

Soit Σu_n une série telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f(n)$ où f est une fonction continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{n+1} f(t)\,dt \le \sum_{k=0}^{n} u_k \le u_0 + \int_0^n f(t)\,dt.$$

La série Σu_n converge si et seulement si $\left(\int_0^n f(t)\,dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

S'adapte pour f croissante.

III - Séries de référence

1. Séries géométriques

Propriété et définition :

Pour tout $q \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum q^n$, de raison q, converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

2. Séries exponentielles

Propriété et définition :

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la série exponentielle $\sum \frac{\lambda^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{\lambda}$.

3. Séries de Riemann

Propriété et définition :

Pour α un réel fixé, la série $\sum \frac{1}{n^{\alpha}}$ est appelée série de Riemann.

Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

IV - Séries absolument convergentes

1. Définitions

Définitions :

Soit Σu_n une série à termes réels ou complexe.

On dit que la série est absolument convergente si $\Sigma |u_n|$ est convergente. On dit aussi que la suite (u_n) est sommable. On note $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Hors programme mais bon… : Si Σu_n converge et pas $\Sigma |u_n|$, on dit que la série est semi-convergente.

2. Propriétés

Théorème :

Toute série réelle ou complexe absolument convergente est convergente.

Propriété :

Soit Σu_n une série absolument convergente. On a alors $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Propriété :

Soient (u_n) est une suite complexe et (v_n) est une suite réelle et positives.

Si $u_n = O(v_n)$ et Σv_n converge, alors Σu_n est convergente.