Chapitre 14 : Fonctions de deux variables

Programme officiel PCSI

a) Ouverts de $\mathbb{R}^2$, fonctions continues

Boules de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique.
Ouverts.
Continuité d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Représentation graphique d'une fonction de deux variables par une surface.
La notion de continuité est introduite uniquement en vue du calcul différentiel. L'étude de la continuité d'une fonction n'est pas un objectif du programme.

b) Dérivées partielles

Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.

Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.

Définition par la continuité des dérivées partielles.
La notion de fonction différentiable est hors programme.

Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0, y_0) d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$:

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\|(h,k)\|).$$

Démonstration hors programme.
On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ et l'interprétation de

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

comme équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.

Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.
Expression du développement limité à l'aide du gradient.

Notation $\nabla f(x_0, y_0)$.
Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.

c) Dérivées partielles et composées

Dérivée selon un vecteur.

Expression à l'aide du gradient $\langle \nabla f(x_0, y_0), u\rangle$.

Règle de la chaîne : les fonctions considérées étant de classe $\mathscr{C}^1$, la fonction $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(f(x(t), y(t))\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

Interprétation comme dérivée de f le long d'un arc γ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ et expression à l'aide du gradient

$$(f \circ \gamma)'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle$$

où $\gamma'(t)$ est défini par $(x'(t), y'(t))$.
Le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau de f.

Sous les hypothèses appropriées, dérivées partielles de $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.

d) Extremums

Maximum et minimum, local ou global d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$.
Point critique. Tout extremum local d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est un point critique.

Exemples d'étude de points critiques.

Plan du résumé

Résumé

Dans ce qui suit, $\mathbb{R}^2$ *est muni de la norme euclidienne usuelle* : $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \|(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

I – Généralités

1. Parties ouvertes de $\mathbb{R}^2$

Définitions :

Soient $\Omega\in\mathbb{R}^2$ et $R\in\mathbb{R}_+^*$.

La boule ouverte de centre Ω et de rayon R est l'ensemble $B(\Omega,R)=\left\{X\in\mathbb{R}^2 \setminus \|X-\Omega\|<R\right\}$.

La boule fermée de centre Ω et de rayon R est l'ensemble $\overline{B}(\Omega,R)=\left\{X\in\mathbb{R}^2 \setminus \|X-\Omega\|\le R\right\}$.

Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est une partie ouverte ou un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si pour tout $X\in A$, il existe un réel $r>0$ tel que $B(X,r)\subset A$.

2. Fonctions de deux variables

Définitions :

Une fonction de deux variables (à valeurs dans $\mathbb{R}$) est une fonction $f:A\to\mathbb{R}\,;\ (x,y)\mapsto f(x,y)$, où A est une partie de $\mathbb{R}^2$.

Les applications partielles associées à f sont les applications $x\mapsto f(x,y)$ à y fixé et $y\mapsto f(x,y)$ à x fixé.

Remarques :

- L'ensemble des fonctions définies sur A et à valeurs réelles est naturellement muni d'une addition, d'une multiplication et d'une multiplication par un réel.
- On peut représenter une fonction de deux variables f par une surface de l'espace d'équation $z=f(x,y)$.
- Si une fonction f est définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$, alors pour tout $(x_o,y_o)\in U$, f est définie au voisinage de (x_o,y_o).

II – Limites et continuité

Dans cette partie, A *est une partie de* $\mathbb{R}^2$ *et les fonctions étudiées sont à valeurs réelles.*

1. Limite en un point

Définition :

Soient f une fonction définie sur A, (x_o,y_o) tel que f est définie au voisinage de ce point et $L\in\mathbb{R}$.

On dit que f admet L pour limite en (x_o,y_o) si :

$$\forall\,\varepsilon\in\mathbb{R}_+^*,\ \exists\,\alpha\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\,(x,y)\in A\setminus\left\{(x_o,y_o)\right\},\ \|(x,y)-(x_o,y_o)\|<\alpha \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon .$$

Propriétés :

- Si f admet une limite finie en (x_o,y_o), alors cette limite est unique. On la note $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)$.
- Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)=L$, alors f est bornée au voisinage de (x_o,y_o). De plus, si $L\neq 0$, alors $f(x,y)$ est du signe strict de L (donc ne s'annule pas) au voisinage de (x_o,y_o).

<u>Propriété</u> (*Caractérisation séquentielle de la limite*) :

> $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)=L$ en (x_o,y_o) si et seulement si pour toute suite $\big((x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers (x_o,y_o), la suite $\big(f(x_n,y_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L.

<u>Propriété</u> :

> Si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)=L$, alors pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(a,b)\neq(0,0)$, on a $\lim\limits_{t\to 0} f(x_o+ta,\, y_o+tb)=L$.
>
> La limite est la même dans toutes les directions.

<u>Propriétés</u> :

> Si f et g sont deux fonctions définies au voisinage de (x_o,y_o) de limites respectives L et L' en (x_o,y_o), alors :
>
> - $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} [\lambda f(x,y)+\mu g(x,y)]=\lambda L+\mu L'$.
> - $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)\times g(x,y)=L\times L'$.
> - Si $L'\neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est définie au voisinage de (x_o,y_o) et $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=\dfrac{L}{L'}$.

<u>Propriétés</u> :

> Soit $f:A\to\mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de (x_o,y_o) telle que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)=L$.
>
> - Si g est une fonction définie au voisinage de L telle que $\lim\limits_{t\to L} g(t)=L'$, alors :
>
> $$\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} \big(g\circ f\big)(x,y)=L'.$$
>
> - Si $g:I\to A$ où I est intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{t\to t_o} g(t)=(x_o,y_o)$ avec $t_o\in\bar{I}$, alors :
>
> $$\lim_{t\to t_o} \big(f\circ g\big)(t)=L.$$

2. Continuité

<u>Définition</u> :

> Soient f une fonction définie sur A et $(x_o,y_o)\in A$.
>
> On dit que f est <u>continue en (x_0, y_0)</u> si $\lim\limits_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)=f(x_o,y_o)$.
>
> On dit que f est <u>continue sur A</u> si elle est continue en tout point de A.
>
> On note $C\big(A,\mathbb{R}\big)$ l'ensemble des fonctions continues sur A et à valeurs réelles.

<u>Propriété</u> :

> Si f est continue en $(x_o,y_o)\in A$ alors les applications partielles $x\mapsto f(x,y_o)$ et $y\mapsto f(x_o,y)$ sont continues en x_o et y_o respectivement.

<u>*Propriétés*</u> :

Soient $f, g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.
- $fg \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$.
- $\dfrac{f}{g} \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ quand g ne s'annule pas sur A.
- Si $h \in \mathcal{C}(I, A)$ avec I est intervalle de $\mathbb{R}$, alors $f \circ h$ est continue sur I.
- Si $\varphi \in \mathcal{C}(f(A), \mathbb{R})$, alors $\varphi \circ f$ est continue sur A.

III – Calcul différentiel

Dans cette partie, U *est ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *et les fonctions étudiées sont à valeurs réelles.*

1. Dérivée selon un vecteur

<u>*Définition*</u> :

Soient f une fonction définie sur U, $(x_o, y_o) \in U$ et $\vec{u}(a, b) \neq \vec{0}$.

Si la fonction $t \mapsto f(x_o + at, y_o + bt)$ est dérivable en 0, on dit que f admet une <u>dérivée en (x_o, y_o) selon le vecteur $\vec{u}$</u>, notée $D_{\vec{u}} f(x_o, y_o)$.

2. Dérivées partielles

Notons $\vec{i} = (1, 0)$ *et* $\vec{j} = (0, 1)$ *les vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^2$.

<u>*Définition*</u> :

Soient f une fonction définie sur ouvert U de $\mathbb{R}^2$, $(x_o, y_o) \in U$.

Si f admet une dérivée en (x_o, y_o) suivant $\vec{i}$ (*resp.* $\vec{j}$), on l'appelle <u>dérivée partielle par rapport à x</u> (<u>*resp.* par rapport à y</u>) et on la note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)$ (*resp.* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)$).

Attention : L'existence des dérivées partielles n'entraine pas la continuité.

3. Classe $\mathcal{C}^1$

<u>*Définition*</u> :

Soit f une fonction définie sur U.

On dit que f est <u>de classe $\mathcal{C}^1$</u> sur U si elle admet des dérivées partielles en tout point de U et si ces dérivées partielles sont continues sur U.

On note $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ (ou $\mathcal{C}^1(U)$ si ce n'est pas ambiguë) l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Théorème :

Si une fonction f est de classe C^1 sur U, alors elle admet en tout point (x_o, y_o) de U un développement limité d'ordre 1 :

$$f(x_o+h, y_o+k) = f(x_o, y_o) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)k + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}\left(\|(h,k)\|\right).$$

Propriétés :

Soient $f, g \in C^1(U, \mathbb{R})$.

- $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \in C^1(U, \mathbb{R})$.
- $fg \in C^1(U, \mathbb{R})$.
- $\frac{f}{g} \in C^1(U, \mathbb{R})$ quand g ne s'annule pas sur A.

Propriétés : *Règle de la chaine*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U.

- Si $\varphi : I \to U ; t \mapsto (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ (avec I est intervalle de $\mathbb{R}$) est de classe C^1 sur I, alors $f \circ \varphi$ est de classe C^1 sur I et pour tout $t \in I$:

$$(f \circ \varphi)'(t) = \varphi_1'(t)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(t)) + \varphi_2'(t)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(t)).$$

- Si $\varphi : (u,v) \mapsto (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$ est une application de classe C^1 sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans U, alors $F = f \circ \varphi$ est de classe C^1 sur V avec :

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v)) + \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u,v)\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))$$

4. Gradient

Définition :

Si f admet des dérivées partielles en (x_o, y_o), alors le gradient de f en (x_o, y_o) est le vecteur de coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o), \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)\right)$, noté $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(x_o, y_o)$ ou $\nabla f(x_o, y_o)$.

Remarques :

- Si f est une fonction de classe C^1 sur U, alors son développement limité d'ordre 1 en $(x_o, y_o) \in U$ s'écrit :

$$f(x_o+h, y_o+k) = f(x_o, y_o) + \nabla f(x_o, y_o) \cdot (h,k) + \underset{(h,k)\to(0,0)}{o}\left(\|(h,k)\|\right).$$

- Nouvelle version de la règle de la chaine, avec les notations utilisées plus haut :

$$(f \circ \varphi)'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t).$$

Propriété :

Une équation du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x, y)$ au point de coordonnées (x_o, y_o) est :

$$z - z_o = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o)(x - x_o) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)(y - y_o).$$

5. Recherche d'extremums

Les définitions d'extremum (minimum et maximum) local ou global sont les mêmes que pour les fonctions d'une variable à valeurs réelles.

Définitions :

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur U.

On dit que $(x_o, y_o) \in U$ est un point critique si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_o, y_o) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o) = 0$.

Propriété :

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 sur un *ouvert* U.

Si f admet un extremum (local ou global) en (x_o, y_o), alors (x_o, y_o) est un point critique.