# *Chapitre 18 : Déterminants*

## *Programme officiel PCSI*

### a) Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

| | |
|---|---|
| Si $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n$ et si $e$ est une base de $E$, il existe une unique application $\det_e : E^n \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à chaque variable, alternée, et vérifiant $\det_e(e) = 1$.<br>Si $f : E^n \to \mathbb{K}$ est linéaire par rapport à chaque variable, alternée, alors elle est un multiple de $\det_e$. | La démonstration de ce théorème et la notion générale de forme multilinéaire sont hors programme. |
| En dimension 2 et 3, expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. | Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède). |
| Comparaison, si $e$ et $e'$ sont deux bases, de $\det_e$ et $\det_{e'}$.<br>La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base si et seulement si $\det_e(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. | |

### b) Déterminant d'un endomorphisme

| | |
|---|---|
| Déterminant d'un endomorphisme. | |
| Déterminant d'une composée. | Caractérisation des automorphismes. |

### c) Déterminant d'une matrice carrée

| | |
|---|---|
| Déterminant d'une matrice carrée. | Caractère $n$-linéaire alterné du déterminant par rapport aux colonnes. |
| Déterminant d'un produit. | Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. |
| Caractérisation des matrices inversibles. Déterminant de l'inverse. | |
| Déterminant d'une transposée. | La démonstration est hors programme. |

### d) Calcul des déterminants

| | |
|---|---|
| Effet des opérations élémentaires. | |
| Développement par rapport à une ligne ou une colonne. | La démonstration n'est pas exigible.<br>La comatrice est hors programme. |
| Déterminant d'une matrice triangulaire. | |

## *Plan du résumé*

## *Résumé*

# I – Formes multilinéaires (*introduction hors programme*)

*Dans cette partie, on considère un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *avec* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

*Définitions* :

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Une forme p-linéaire sur E est une application $\varphi : E^p \to \mathbb{K}$ telle que $\forall k \in [\![1;p]\!]$ et $\forall (x_1,...,x_p) \in E^p$, l'application $\varphi_k : E \to \mathbb{K}$ ; $x \mapsto \varphi(x_1,...x_{k-1}, x, x_{k+1},..., x_p)$ est linéaire.

Si $p = 2$, on parle de forme bilinéaire ; si $p = 3$, on parle de forme trilinéaire.

On note $\mathcal{L}_p(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E.

Soit φ une forme p-linéaire sur E.

- On dit que φ est alternée si $\forall (x_1, x_2,...x_p) \in E^p$, $\varphi(x_1, x_2,..., x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les $x_k$ sont égaux.
- On dit que φ est antisymétrique si $\forall (x_1, x_2,...x_p) \in E^p$, $\varphi(..., x_i,..., x_j,...) = -\varphi(..., x_j,..., x_i,...)$ quels que soient i et j distincts entre 1 et p.

*Propriété* :

Une forme p-linéaire sur E est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

# II – Déterminants

*Dans toute cette partie,* E *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $n \in \mathbb{N}^*$.

### 1. Déterminant d'une famille de n vecteurs dans une base

*Théorème et définition* :

Il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E prenant la valeur 1 sur une base $\mathcal{B} = (e_1,..., e_n)$ donnée de E. Cette forme n-linéaire est appelée déterminant dans la base $\mathcal{B}$, notée $\det_{\mathcal{B}}$.

*Théorème* :

L'ensemble $\mathcal{A}_n(E, \mathbb{K})$ des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1. Autrement dit, toute autre forme n-linéaire alternée sur E est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$.

*Propriétés* :

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. On a :

- $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}$.
- $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$.

*Propriétés* :

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{B}$ une base de E.

- Si E est de dimension 2, alors, pour tous vecteurs X et $X'$ de E, de coordonnées respectives $(x,y)$ et $(x',y')$ dans $\mathcal{B}$, on a :
$$\det_{\mathcal{B}}(X,X') = xy' - x'y.$$
- Si E est de dimension 3, alors, pour tous vecteurs X, $X'$ et $X''$ de E, de coordonnées respectives $(x,y,z)$, $(x',y',z')$ et $(x'',y'',z'')$ dans $\mathcal{B}$, on a :
$$\det_{\mathcal{B}}(X,X',X'') = x''yz' - x''y'z + x'y''z - xy''z' + xy'z'' - x'yz''.$$

*Interprétations géométriques* :

- Dans le plan, pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a $\det(\vec{u},\vec{v}) = \|\vec{v}\|.\|\vec{u}\|.\sin(\vec{u},\vec{v})$ et $\det(\vec{u},\vec{v})$ est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
- Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, pour deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $\det(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ est le volume algébrique du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

## 2. Déterminant d'une matrice carrée

a. Définition :

*Définition* :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A, noté $\det A$, est le déterminant des vecteurs colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

*Notation* : Si $A = (a_{i,j})$, on note :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

b. Déterminant $2\times2$ :

On a :

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

c. Déterminant $3\times3$ :

On a :

$$\det\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x''yz' - x''y'z + x'y''z - xy''z' + xy'z'' - x'yz''.$$

### 3. Déterminant d'un endomorphisme

*Théorème et définition* :

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Le scalaire $\det_{\mathcal{B}}\left(f(\mathcal{B})\right)$ est indépendant de la base $\mathcal{B}$ et est appelé déterminant de f, noté $\det f$.

*Propriété* :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Pour toute famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E :

$$\det_{\mathcal{B}}\left(f(\mathcal{F})\right) = \det_{\mathcal{B}}\left(f(\mathcal{B})\right) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}).$$

*Propriété* :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. On a $\det f = \det_{\mathcal{B}}\left(M_{\mathcal{B}}(f)\right)$.

## III – Propriétés des déterminants

### 1. Propriétés du déterminant d'une famille de vecteurs

Dans cette partie, on considère une base $\mathcal{B}$ de E.

Pour tout $(x_1, x_2, ... x_p) \in E^p$ :

- $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les $x_k$ sont égaux ;
- $\det_{\mathcal{B}}(..., x_i, ..., x_j, ...) = -\det_{\mathcal{B}}(..., x_j, ..., x_i, ...)$ quels que soient i et j distincts entre 1 et p.

*Propriétés* :

$\forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in E^n$ :

- $\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\det_{\mathcal{B}}(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n) = \lambda_1 \lambda_2 ... \lambda_n \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det_{\mathcal{B}}(\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n) = \lambda^n \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)$.
- On ne change pas la valeur de $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n)$ en ajoutant à l'un des vecteurs $x_i$ une combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est liée si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$.
- Une famille $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est libre si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$.

### 2. Caractérisation des bases

*Théorème* :

Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{F}$ une famille de n vecteurs de E.

$$\mathcal{F} \text{ est une base de E} \Leftrightarrow \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) \neq 0.$$

### 3. Propriétés du déterminant d'un endomorphisme

*Propriétés* :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On a :

- Pour toute famille $\mathcal{F}$ de n vecteurs de E, $\det_{\mathcal{B}}\left(f(\mathcal{F})\right) = \det f \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$.

*Propriété* :

Soit $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$. On a :

$$\det(u \circ v) = \det u \times \det v .$$

*Propriété* :

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f est un automorphisme de E si et seulement si $\det f \neq 0$. Et dans ce cas, $\det f^{-1} = \dfrac{1}{\det f}$.

### 4. Propriétés du déterminant d'une matrice

*Propriétés* :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A possède deux colonnes identiques, alors $\det A = 0$.
- Si $C_1, C_2, \dots, C_n$ sont les colonnes de A, alors $\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\det A' = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \det A$ où $A'$ est la matrice obtenue en multipliant chaque colonne i de A par $\lambda_i$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.
- On ne change pas la valeur de $\det A$ en ajoutant à l'une des colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes.

*Propriétés* :

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- $\det AB = \det BA = \det A \times \det B$.
- $A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det A \neq 0$, et dans ce cas, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.
- Si A et B sont semblables elles ont le même déterminant.
- $\det(A^T) = \det A$.

## IV – Calcul pratique d'un déterminant

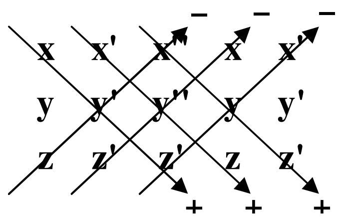
### 1. Calcul en dimensions 2 et 3

On a vu que :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \qquad \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x''yz' - x''y'z + x'y''z - xy''z' + xy'z'' - x'yz'' .$$

<u>Règle de Sarrus</u> : Pour calculer un déterminant en dimension 3.

C'est une méthode pour calculer simplement un déterminant 3×3. Elle consiste à écrire les 3 colonnes du déterminant, puis à recopier les 2 premières à la suite. On effectue le produit des termes des 6 diagonales, puis on les ajoute en les dotant d'un signe suivant le schéma suivant :




## 2. Effet des opérations élémentaires sur les colonnes ou les lignes d'un déterminant

*<u>Propriétés</u>* :

Pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $C_1, C_2, \dots, C_n$ :

- multiplier une colonne de A par $\alpha$ multiplie le déterminant par $\alpha$ ;
- ajouter $\alpha C_j$ à $C_i$ ne change pas le déterminant ;
- échanger deux colonnes transforme le déterminant en son opposé.

## 3. Déterminant d'une matrice triangulaire

*<u>Propriété</u>* :

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est triangulaire de coefficients diagonaux $a_1, a_2, \dots, a_n$ alors $\det A = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$.

En particulier, $\det\left[\mathrm{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n)\right] = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$.

## 4. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

*<u>Propriétés et définitions</u>* :

$A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\Delta_{i,j}$ le déterminant de la matrice $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en supprimant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

- $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$, on a $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$. Cette façon de de procéder s'appelle <u>développement par rapport à la $j^{\text{ème}}$ colonne</u>.
- $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, on a $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}$. Cette façon de de procéder s'appelle <u>développement par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne</u>.