Chapitre 20 : Probabilités

Programme officiel PCSI

a) Univers, événements

Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).

b) Espaces probabilisés finis

Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P). Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leqslant x)$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de $\mathbb{R}^+$ indexée par E et de somme 1.	Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega\in\Omega}$.
Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$. L'application P_B est une probabilité.	
Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A\|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

e) Événements indépendants

Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

Plan du résumé

Résumé

I – Généralités

1. Vocabulaire probabiliste

a. Univers :

Définitions :

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est le fruit du hasard.

Les résultats possibles d'une expérience aléatoire sont appelés issues ou éventualités ou réalisations.

L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers Ω associé à l'expérience.

b. Événements :

Dans toute la suite, Ω est un univers fini.

Définitions :

Un évènement est une partie de Ω.

Un évènement élémentaire est une partie de Ω ne contenant qu'une issue (un singleton).

L'évènement impossible est la partie de Ω ne contenant aucune issue (l'ensemble vide).

L'évènement certain est la partie de Ω contenant toutes les issues (Ω tout entier).

Soient A et B deux évènements de Ω.

L'évènement contraire de A, noté $\overline{A}$ est $\Omega \setminus A$ (le complémentaire de A dans Ω).

L'évènement « A et B » est la partie de Ω contenant les issues qui sont dans A et dans B, soit $A \cap B$.

L'évènement « A ou B » est la partie de Ω contenant les issues qui sont dans A ou dans B, soit $A \cup B$.

On dit que A et B sont incompatibles s'ils ne peuvent être réalisés en même temps, autrement dit si « A et B » est l'évènement impossible, soit $A \cap B = \varnothing$. Les parties A et B sont disjointes.

Un système complet d'événements est une famille $(A_1, \ldots, A_n)$ d'évènements non vides, incompatibles deux à deux et telle que $A_1 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

c. Langage probabiliste vs. langage ensembliste :

Langage probabiliste	***langage ensembliste***
univers	ensemble
issue	élément
évènement	partie ou sous-ensemble
évènement élémentaire	singleton
évènement impossible	$\varnothing$
évènement certain	ensemble entier
évènement contraire	complémentaire
évènements incompatibles	parties disjointes
A et B	$A \cap B$
A ou B	$A \cup B$
système complet d'événements	partition

2. Espaces probabilisés

a. Définitions :

Définitions :

> Une (loi de) probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0;1]$ vérifiant $P(\Omega)=1$ et, pour toutes parties disjointes A et B de Ω, $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.
>
> Un espace probabilisé est un couple (Ω, P) où Ω est un univers et P une probabilité sur Ω.
>
> Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille de réels positifs, indexée par E et de somme 1.

b. Propriétés :

Dans ce qui suit, on se place dans un univers probabilisé (Ω, P).

Propriété :

> Si $A_1,...,A_p$ sont des parties de Ω deux à deux disjointes, alors :
> $$P(A_1\cup...\cup A_p)=P(A_1)+...+P(A_p).$$

Corollaires :

> - Si $(A_1,...,A_n)$ est un système complet d'événements, alors $P(A_1)+...+P(A_n)=1$.
> - Si Ω est fini, alors $\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})=1$.
> - Pour tout évènement A non impossible contenant un nombre fini d'issues, on a $P(A)=\sum_{\omega\in A} P(\{\omega\})$.

Propriétés :

> Soient A et B deux évènements.
> - $P(\overline{A})=1-P(A)$.
> - $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
> - Si $A\subset B$, alors $P(A)\leq P(B)$ (une loi de probabilité est croissante).

Propriété :

> Une probabilité P sur Ω est complètement déterminée par la distribution de probabilités $\left(P(\{\omega\})\right)_{\omega\in\Omega}$.

c. Loi uniforme :

Définition :

> Si Ω est muni d'une probabilité P, on dit que cette loi est uniforme s'il existe un réel a tel que $\forall\, x\in\Omega$, $P(\{x\})=a$. On dit alors que les issues sont équiprobables. On est en situation d'équiprobabilité.

Propriétés :

> Si Ω est fini de cardinal $n\geq 1$ et muni d'une loi de probabilité uniforme P, alors :
> - $\forall\, x\in\Omega$, $P(\{x\})=\dfrac{1}{n}$.
> - Pour tout évènement A, $P(A)=\dfrac{\text{Card}\, A}{\text{Card}\, \Omega}$.

II – Conditionnement et indépendance

1. Probabilités conditionnelles

a. Définition :

Définition :

Soient A et B deux évènements tels que $P(B) \neq 0$. La probabilité conditionnelle de A sachant B (probabilité que A soit réalisé sachant que B l'est), notée $P_B(A)$ ou $P(A \mid B)$ est donnée par :

$$P_B(A) = P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Propriété :

L'application P_B définit une loi de probabilité sur Ω.

b. Formule des probabilités totales :

Propriété : *Formule des probabilités composées*

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, alors :

$$P(A \cap B) = P(B)P_B(A).$$

Par convention, on écrit aussi $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)\left(=0\right)$ quand $P(B) = 0$.

Propriété : *Formule des probabilités totales*

Soit $(A_1, ..., A_n)$ un système complet d'événements. Pour tout $B \subset \Omega$, on a :

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + ... + P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Corollaires : *Formules de Bayes*

- Si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

- Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$:

$$P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k)}.$$

2. Indépendance

a. Couple d'événements indépendants :

Définition :

Deux évènements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Propriété :

Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ le sont.

b. Famille finie d'événements mutuellement indépendants :

Définition :

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'évènements. On dit que $A_1,...,A_n$ sont mutuellement indépendants (ou indépendants tout court) si $\forall\, p\in[\![2,n]\!]$, $\forall\,(i_1,i_2,...,i_p)\in[\![1,n]\!]^p$ avec $i_1<i_2<...<i_p$:

$$P(A_{i_1}\cap...\cap A_{i_p})=P(A_{i_1})\times...\times P(A_{i_p}).$$

Propriété :

Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants, alors $(B_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille d'évènements mutuellement indépendants, avec $B_i=A_i$ ou $\overline{A}_i$ pour tout $i\in[\![1,n]\!]$.