Chapitre 21 : Variables aléatoires

Programme officiel PCSI

a) Variables aléatoires

Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.	Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.

d) Loi d'une variable aléatoire

Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

f) Variables aléatoires indépendantes

Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $P\big((X,Y) = (x,y)\big) = P(X = x)P(Y = y)$.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	La démonstration est hors programme. Extension au cas de plus de deux coalitions.

a) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Espérance $\mathrm{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x)$ d'une variable aléatoire X.	L'espérance est un indicateur de position. Formule $\mathrm{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$. Variable aléatoire centrée.
Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.	
Espérance d'une variable constante, de Bernoulli, binomiale.	Exemple : $\mathrm{E}(\mathbb{1}_A) = P(A)$.
Formule de transfert : $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$.	On souligne que la formule de transfert s'applique en particulier aux couples et aux n-uplets.
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$.	Extension au cas de n variables aléatoires indépendantes.

b) Variance d'une variable aléatoire réelle, écart type et covariance

Variance et écart type d'une variable aléatoire réelle.	Variance et écart type sont des indicateurs de dispersion. Variable aléatoire réduite.
Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Variance d'une variable de Bernoulli, d'une variable binomiale.	
Covariance de deux variables aléatoires.	Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.
Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables décorrélées.	On retrouve la variance d'une variable binomiale.

c) Inégalités probabilistes

Inégalité de Markov.	Application à l'obtention d'inégalités de concentration.
Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.	Application à une moyenne de variables indépendantes de même loi, interprétation fréquentiste.

Plan du résumé

Résumé

I - Variables aléatoires sur un univers fini

1. Définition

Définitions :

> Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E.
> Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de variable aléatoire réelle (var).

Notation : Si $A \subset E$, on note $(X \in A)$ ou $\{X \in A\}$, l'évènement $X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \setminus X(\omega) \in A\}$.

2. Loi d'une variable aléatoire

Propriété et définition :

> L'application $P_X : \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big) \to [0;1]\,; A \mapsto P(X \in A)$ est une loi de probabilité sur $X(\Omega)$, appelée loi de la variable aléatoire X.

Notation : Si X et Y sont deux variables aléatoires sur Ω qui suivent la même loi, on note $X \sim Y$.

Propriété :

> La loi P_X est parfaitement déterminée par les $P(X = x) = \sum_{\omega \in X^{-1}(\{x\})} P\big(\{\omega\}\big)$ quand x décrit E et, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$:
> $$P(X \in A) = \sum_{x \in A} P(X = x) = \sum_{\omega \in X^{-1}(A)} P\big(\{\omega\}\big).$$

3. Image d'une variable aléatoire par une fonction

Définition :

> Soit X une variable aléatoire définie sur Ω, à valeurs dans un ensemble E et f une application définie sur E et à valeurs dans un ensemble F. La variable aléatoire $f \circ X$, définie sur Ω et à valeurs dans F, est appelée image de X par f, notée $f(X)$.

Propriété :

> Si X et Y sont deux variables aléatoires sur Ω qui suivent la même loi ($X \sim Y$) et f est une application définie sur $X(\Omega) = Y(\Omega)$, alors $f(X) \sim f(Y)$.

II - Lois usuelles

1. Loi uniforme

Si X est une variable aléatoire sur Ω (univers muni d'une loi P) avec $X(\Omega) = E$, la loi P_X peut être uniforme. Dans le cas où E est fini (non vide), ceci veut dire que toutes les valeurs de E ont la même probabilité, soit :

$$\exists\, p \in [0;1],\ \forall\, x \in E,\ P(X = x) = p \text{ et } p = \frac{1}{\operatorname{Card} E}.$$

On note $X \sim \mathscr{U}(E)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{U}(E)$.

2. Loi de Bernoulli

Définitions :

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles (notées en général succès et échec).

Une loi de Bernoulli est la loi de probabilité associée à une épreuve de Bernoulli.

Si $p \in [0;1]$ est la probabilité de « succès », p est appelé paramètre de la loi.

On note $X \sim \mathscr{B}(p)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$.

3. Loi binomiale

Définitions :

Un schéma de Bernoulli est une expérience aléatoire consistant à répéter une épreuve de Bernoulli plusieurs fois de suite et de manière indépendante.

Une loi binomiale est la loi suivi par la variable aléatoire X donnant le nombre de succès à l'issue d'un schéma de Bernoulli. Si l'épreuve de Bernoulli est répétée n fois et p est le paramètre associé à l'épreuve.

Les nombres n et p sont les paramètres de cette loi.

On note $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.

Propriété :

Si X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, on a pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

III - Couples de variables aléatoires

Dans cette partie, X et Y désignent deux variables aléatoires sur un univers fini probabilisé Ω.

Pour tout $(x,y) \in X(\Omega)\times Y(\Omega)$, on note :

$$P(X=x, Y=y) = P\big((X=x)\cap(Y=y)\big).$$

Et pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}\big(X(\Omega)\big)\times\mathscr{P}\big(Y(\Omega)\big)$, on note :

$$P(X\in A, Y\in B) = P\big((X\in A)\cap(Y\in B)\big).$$

Remarquons que (X,Y) est une variable aléatoire à valeurs dans $X(\Omega)\times Y(\Omega)$.

On peut généraliser le concept à n variables aléatoires $X_1,...,X_n$. Le n-uplet $(X_1,...,X_n)$ est alors une variable aléatoire à valeurs dans $X_1(\Omega)\times...\times X_n(\Omega)$.

1. Loi conjointe

Définition :

L'application de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$ dans $[0;1]$, qui, à tout (x,y) de $X(\Omega)\times Y(\Omega)$, associe $P(X=x,Y=y)$ est appelée loi conjointe du couple (X,Y).

2. Lois marginales

Définition :

Les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y.

3. Lois conditionnelles

Définition :

Soit $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$. L'application :

$$P_{(Y=y)} : X(\Omega) \to [0;1]\ ;\ x \mapsto P_{(Y=y)}(X = x)$$

est appelée loi conditionnelle de X sachant (Y = y).

IV - Variables aléatoires indépendantes

1. Couple de variables aléatoires indépendantes

Définition :

Deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on a :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y).$$

On note $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Propriété :

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, alors pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, on a :

$$P\big((X, Y) \in A \times B\big) = P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \times P(Y \in B).$$

Propriété :

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, et si f et g sont des applications définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

2. Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition :

Soit $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires sur Ω. On dit que $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes ou mutuellement indépendantes si pour tout $(x_1, ..., x_n) \in X_1(\Omega) \times ... \times X_n(\Omega)$, les évènements $(X_1 = x_1)$, … , $(X_n = x_n)$ sont mutuellement indépendants.

Propriété :

Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors, quel que soit $(A_1, ..., A_n) \in \mathscr{P}\big(X_1(\Omega)\big) \times ... \times \mathscr{P}\big(X_n(\Omega)\big)$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.

Propriété : *Lemme des coalitions*

Si $X_1,...,X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes et f et g sont des applications définies respectivement sur $X_1(\Omega)\times...\times X_m(\Omega)$ et $X_{m+1}(\Omega)\times...\times X_n(\Omega)$ alors les variables aléatoires $f(X_1,...,X_m)$ et $g(X_{m+1},...,X_n)$ sont indépendantes.

Cette propriété s'étend à plus de deux regroupements.

Propriété :

Si $X_1, ..., X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, à images dans $\{0,1\}$ et suivant chacune la loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1+...+X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.

IV – Espérance, variance, écart-type

1. Espérance d'une variable aléatoire réelle

a. Définition :

Définition :

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. Si $X(\Omega)=\{x_1,...,x_n\}$, on appelle espérance de X le réel :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x).$$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω. On a :

$$E(X)=\sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\})X(\omega)$$

b. Propriétés de l'espérance :

Propriété :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles.

- *Linéarité de l'espérance* : Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$.
- *Positivité de l'espérance* : Si $X\geq 0$ (*i.e.* pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\geq 0$), alors $E(X)\geq 0$.
- *Croissance de l'espérance* : Si $X\leq Y$ (*i.e.* pour tout $\omega\in\Omega$, $X(\omega)\leq Y(\omega)$), alors $E(X)\leq E(Y)$.
- *Inégalité triangulaire* : $|E(X)|\leq E\left(|X|\right)$.

Définition :

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω.

On appelle variable centrée de la variable aléatoire $Z=X-E(X)$ (on a alors $E(Z)=0$).

Propriété : *Théorème du transfert*

Soit X une variable aléatoire réelle et f une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On a :

$$E\big(f(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) f(x).$$

Propriétés :

- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

- Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors :

$$E(X_1 \ldots X_n) = E(X_1) \ldots E(X_n).$$

Propriétés : *Inégalité de Markov*

Si X est une variable aléatoire réelle positive sur Ω. Pour tout réel $a > 0$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

c. Espérance d'une variable aléatoire réelle suivant une loi usuelle :

Propriété :

Soit X une variable aléatoire réelle.

- Si X est constante (avec $\forall\, \omega \in \Omega$, $X(\omega) = a$), alors $E(X) = a$.
- Si X est l'indicatrice d'une partie A de Ω, alors $E(X) = P(A)$.
- Si X suit une loi uniforme avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, alors $E(X) = \dfrac{x_1 + \ldots + x_n}{n}$.
- Si X suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ avec $X(\Omega) = \{a, b\}$ et $P(X = a) = p$, alors $E(X) = pa + (1-p)b$.
- Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.

2. Variance et écart-type

a. Définitions :

Définitions :

Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω avec $X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

On appelle variance de X le réel : $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P(X = x_i)\big(x_i - E(X)\big)^2$.

On appelle écart-type de X le réel : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

b. Propriétés :

Propriété :

Si X est une variable aléatoire réelle sur Ω, on a :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Propriété :

Soit X est une variable aléatoire réelle sur Ω. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$V(aX+b)=a^2\,V(X).$$

Définition :

Si $\sigma(X)\neq 0$, on appelle variable centrée réduite de la variable aléatoire $Z=\dfrac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ (on a alors $E(Z)=0$ et $V(Z)=1$).

Propriété :

Si X est une variable aléatoire réelle sur Ω.

- Si X est constante, alors $V(X)=0$.
- Si X suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ avec $X(\Omega)=\{a,b\}$, $a\neq b$ et $P(X=a)=p$, alors :
$$V(X)=(a-b)^2p(1-p).$$
- Si X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$, alors $V(X)=np(1-p)$.

Propriétés : *Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*

Si X est une variable aléatoire réelle sur Ω. Pour tout réel $a>0$:

$$P\big(|X-E(X)|\geq a\big)\leq\frac{V(X)}{a^2}.$$

3. Covariance

Définitions :

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur Ω, on appelle covariance de X et Y le réel :

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E\Big[\big(X-E(X)\big)\big(Y-E(Y)\big)\Big].$$

Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle sont dites décorrélées.

Propriété :

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur Ω, on a :

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y).$$

Propriété :

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur Ω, on a :

$$V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\operatorname{cov}(X,Y).$$

Propriétés :

- Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, alors $\operatorname{cov}(X,Y)=0$ et :
$$V(X+Y)=V(X)+V(Y).$$

- Si $X_1, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) .$$

Propriété :

Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi, d'espérance $E(X)$ et de variance $V(X)$, alors en posant $S_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$, on a pour tout réel $a > 0$:

$$P\left(\left|S_n - E(X)\right| \geq a\right) \leq \frac{V(X)}{n\,a^2} .$$