Chapitre 5 : Fonctions numériques - Généralités

Programme officiel PCSI

a) Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Les étudiants doivent savoir déduire de la représentation graphique de f celles de fonctions obtenues par des transformations simples, comme $x \mapsto f(x+a)$ ou $x \mapsto f(ax)$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés. Utilisation pour la réduction du domaine d'étude.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. La fonction f est bornée si et seulement si $\|f\|$ est majorée.

b) Dérivation

Dérivée d'une fonction.	Notations $f'(x)$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont rappelés, avec la définition de la dérivée et l'équation de la tangente ; ils ne sont pas démontrés à ce stade. Exemples simples de calculs de dérivées partielles.
Caractérisation des fonctions constantes, (dé)croissantes, strictement (dé)croissantes, parmi les fonctions dérivables sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade.
Tableau de variations. Étude pratique d'une fonction. Tracé du graphe.	Application : recherche d'extremums, démonstration d'inégalités.
Représentation graphique et dérivée d'une fonction réciproque.	La formule donnant la dérivée est admise, mais on en donne l'interprétation géométrique.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	
Dérivées d'ordre supérieur.	

c) Fonctions usuelles

Fonctions exponentielle, logarithme népérien, puissances.	Dérivée, variations, représentation graphique. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$. Logarithme décimal, logarithme en base 2.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$, $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$, $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Fonctions circulaires réciproques Arcsin, Arccos, Arctan.	Dérivée, variations, représentation graphique.
Fonctions hyperboliques sh, ch.	Dérivée, variations, représentation graphique. La fonction tangente hyperbolique et les fonctions hyperboliques réciproques sont hors programme. La seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$.
Fonction tangente.	Notation tan. Dérivée, variations, représentation graphique.
Tangente de $\pi \pm x$. Tangente des angles usuels.	Interprétation sur le cercle trigonométrique.

Plan du résumé

Résumé

I – Fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles

1. Définitions

Définitions :

Une fonction à valeurs réelles est une application de $\mathbb{R}$ ou une partie A de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $f : A \to \mathbb{R} ; x \mapsto f(x)$.

Si f est une fonction, son ensemble de définition est l'ensemble des réels x tels que f(x) soit défini.

Définition :

On dit qu'une propriété portant sur une fonction définie sur I est vraie au voisinage de a avec $a \in \bar{I}$ si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert J, contenant a si $a \in \mathbb{R}$ ou de la forme $]c;+\infty[$ si $a = +\infty$ ou $]-\infty;c[$ si $a = -\infty$.

2. Représentation graphique

Définition :

Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative ou représentation graphique d'une fonction à valeurs réelles est l'ensemble des points de coordonnées $\left(x, f(x)\right)$ quand x décrit I.

Propriété :

Si f est une fonction bijective de I dans $J = f(I)$, alors les représentions graphiques de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la première bissectrice $\Delta : y = x$.

Propriétés :

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative dans une repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $a \in \mathbb{R}$.

- La courbe de $x \mapsto f(x) + a$ (définie sur I) est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $a\vec{j}$.
- La courbe de $x \mapsto f(x+a)$ (définie sur $\{x \in \mathbb{R} \setminus x + a \in I\}$) est l'image de $\mathscr{C}$ par la translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- La courbe de $x \mapsto f(a-x)$ (définie sur $\{x \in \mathbb{R} \setminus a - x \in I\}$) est l'image de $\mathscr{C}$ par la symétrie d'axe vertical d'équation $x = a/2$.

Pour a non nul :

- La courbe de $x \mapsto f(ax)$ (définie sur $\{x \in \mathbb{R} \setminus ax \in I\}$) est l'image de $\mathscr{C}$ par la transformation du plan qui à tout point de coordonnées (x, y) associe le point de coordonnées $(x/a, y)$.
- La courbe de $x \mapsto af(x)$ (définie sur I) est l'image de $\mathscr{C}$ par la transformation du plan qui à tout point de coordonnées (x, y) associe le point de coordonnées (x, ay).

3. Opérations

On définit les opérations suivantes sur $\mathbb{R}^I$: $\forall (f, g) \in \mathbb{R}^I \times \mathbb{R}^I$:

- *Somme* : $f + g$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto f(x) + g(x)$.

- *Produit* : $f \times g$ (ou fg) est la fonction définie sur I, $x \mapsto f(x)g(x)$.
- *Produit par un nombre* : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, λf est la fonction définie sur I, $x \mapsto \lambda f(x)$.
- *Inverse* : Si $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, $1/f$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto 1/f(x)$.
- *Quotient* : Si $\forall x \in I$, $f(x) \neq 0$, g/f est la fonction définie sur I, $x \mapsto g(x)/f(x)$.
- *Composée* : Si $f \in \mathbb{R}^I$, $g \in \mathbb{R}^J$ et $f(I) \subset J$, la composée $g \circ f$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto g\big(f(x)\big)$.
- *Valeur absolue* : $|f|$ est la fonction définie sur I, $x \mapsto |f(x)|$.

4. Monotonie et sens de variation

Définitions :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.

f est croissante (*resp.* décroissante) sur I si $\forall (x, x') \in I^2$, $x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$ (*resp.* $f(x') \leq f(x)$).

f est strictement croissante (*resp.* strictement décroissante) sur I si $\forall (x, x') \in I^2$, $x < x' \Rightarrow f(x) < f(x')$ (*resp.* $f(x') < f(x)$).

f est (strictement) monotone sur I si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur I.

Propriétés :

- Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{R}^I$ (strictement) monotones sur I de même sens de variation, alors :
  - $f + g$ est (strictement) monotone sur I et de même sens de variation que f et g.
  - Si f et g sont *positives* sur I alors fg est (strictement) monotone sur I, de même sens de variation que f et g.
- Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ avec $f(I) \subset J$.
  - Si f et g sont (strictement) monotones de même sens, $g \circ f$ est (strictement) croissante.
  - Si f et g sont (strictement) monotones de sens contraires, $g \circ f$ est (strictement) décroissante.

5. Fonctions majorées, minorées, bornées

Définitions :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$.

On dit que f est majorée (*resp.* minorée) s'il existe un réel μ tel que $\forall x \in I$, $f(x) \leq \mu$ (*resp.* $f(x) \geq \mu$).

On dit que μ est un majorant (*resp.* minorant) de f ou encore que f est majorée (*resp.* minorée) par μ.

On dit que f est bornée si elle est majorée et minorée. On note souvent $\mathcal{B}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions bornées sur I.

Propriété :

Une fonction f définie sur I est bornée sur I si et seulement si $|f|$ est majorée sur I.

Définitions :

La borne supérieure (*resp*. inférieure) de f est la borne supérieure (*resp*. inférieure) de $f(I)$.

Elle est notée $\sup_I f$ ou $\sup_{x\in I} f(x)$ (*resp*. $\inf_I f$ ou $\inf_{x\in I} f(x)$).

Définitions :

Soit $f\in\mathbb{R}^I$ et $a\in I$. On dit que :

- f(a) est le maximum (*resp*. minimum) global de f si $\forall\, x\in I$, $f(x)\le f(a)$ (*resp*. $f(x)\ge f(a)$).
- f(a) est le maximum (*resp*. minimum) local de f si $f(x)\le f(a)$ (*resp*. $f(x)\ge f(a)$) au voisinage de a.
- Si f(a) est le maximum ou le minimum global (*resp*. local) de f, on dit que f(a) est un extremum global (*resp*. local) de f.
- Si f(a) est un extremum de f sur I, on dit qu'il est atteint en a.

6. Parité - Imparité

Définitions :

Soit $f\in\mathbb{R}^I$.

On dit que f est paire (*resp*. impaire) si I est symétrique par rapport à 0 et $\forall\, x\in I$, $f(-x)=f(x)$ (*resp*. $f(-x)=-f(x)$).

Propriété :

Dans un repère orthonormé, la courbe représentative d'une fonction paire (*resp*. impaire) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (*resp*. à l'origine du repère).

Propriété :

Toute fonction définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0 se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Propriétés :

Soient f et g deux fonctions de $\mathbb{R}^I$.

- Si f et g sont paires, alors fg est paire et si $f\circ g$ est définie, elle est paire.
- Si f et g sont impaires, alors fg est paire et si $f\circ g$ est définie, elle est impaire.
- Si f est paire et g impaire (ou vice-versa), alors fg est impaire et si $f\circ g$ est définie, elle est paire.

Remarques : Si $f:I\to\mathbb{R}$ est une fonction de courbe représentative $\mathscr{C}$ dans une repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, alors pour $a\in\mathbb{R}$ et $I'=\{x\in\mathbb{R}\setminus x+a\in I\}$:

- La droite verticale d'équation $x=a$ est axe de symétrie de $\mathscr{C}$ si et seulement si :

$$\forall\, x\in I',\ -x\in I' \text{ et } f(-x+a)=f(x+a).$$

- Le point de coordonnées (a,b) est centre de symétrie de $\mathscr{C}$ si et seulement si :

$$\forall\, x\in I',\ -x\in I' \text{ et } f(-x+a)-b=-f(x+a)+b \Leftrightarrow f(-x+a)+f(x+a)=2b.$$

7. Périodicité

Définitions :

Soient $f \in \mathbb{R}^A$ où A est une partie de $\mathbb{R}$.

On dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que $x \in A \Leftrightarrow x+T \in A$ et $\forall x \in A$, $f(x+T) = f(x)$.

On dit alors que f est périodique de période T ou T-périodique.

Propriété :

Si f est une fonction T-périodique sur A, alors $\forall n \in \mathbb{Z}^*$, f est nT-périodique sur A.

Propriété :

Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Si f et g sont deux fonctions T-périodiques sur A, alors $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$, fg et $\frac{f}{g}$ (si est ne s'annule pas sur A) sont T-périodiques sur A.

Propriété :

Si f est T-périodique sur A et $g \in \mathbb{R}^B$ avec $f(A) \subset B$, alors $g \circ f$ est T-périodique sur A.

8. Quelques compléments sur la dérivation

⇨ *Pour les généralités, revoir le programme de lycée et le chapitre 8.*

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur A. Si f' est dérivable sur A, sa dérivée, notée f'', est appelée dérivée seconde de f.

Remarque : On peut itérer le processus n fois pour obtenir la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f, notée $f^{(n)}$.

Théorème de la bijection :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone sur I, alors c'est une bijection de I dans f(I) et f(I) est un intervalle.

Théorème :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est une fonction dérivable et bijective sur I, telle que $\forall x \in f(I)$, $f' \circ f^{-1}(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur f(I) et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.

9. Etude de fonction

Le but d'une étude de fonction est en général de réunir un maximum d'informations sur la fonction afin de construire son tableau de variations et finalement, sa courbe. Cependant, les variations de la fonctions suffisent parfois pour répondre à certaines questions : recherche d'extremum, étude du signe, comparaison de deux fonctions (qui revient à l'étude du signe de la différence), …

Dans une étude de fonction, il y a différentes étapes habituelles :

- Ensemble de définition.
- Détermination des symétries et périodicités afin de réduire le domaine d'étude.

- Construction du tableau de variations (contenant les variations et les limites de la fonction).
- Etudes des éventuelles branches infinies (asymptotes).
- Tracé de la courbe.

Bien entendu, pour étudier les variations de la fonction, on dérive quand cela est possible et on étudie le signe de la dérivée : soit on factorise la dérivée et on construit le tableau de signes, soit (souvent) on introduit et étudie une fonction auxiliaire (parfois la dérivée elle-même, parfois un de ses facteurs) pour déterminer le signe de la dérivée.

II – Fonctions usuelles

Les fonctions logarithme népérien et exponentielle ont été vues en Terminale.

1. Fonctions puissances

Définitions :

- Soient a et b deux réels, avec a > 0. On pose $a^b = e^{b\ln a}$.
- Les fonctions puissances sont les fonctions $x \mapsto x^\alpha$ avec α réel donné.

Attention : Ne pas confondre fonction puissance : $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ et fonction exponentielle : $x \mapsto a^x = e^{(\ln a)x}$.

Propriétés (*règles de calcul*) :

Les règles de calcul avec les puissances réelles sont les mêmes que celles des puissances entières.

Si a, a', b, b' sont quatre réels avec $a > 0$ et $a' > 0$, on a :

$$a^0 = 1 \qquad a^{b+b'} = a^b a^{b'} \qquad a^{-b} = \frac{1}{a^b} \qquad a^{b-b'} = \frac{a^b}{a^{b'}} \qquad (a^b)^{b'} = a^{bb'} \qquad a^b a'^b = (aa')^b \qquad \frac{a^b}{a'^b} = \left(\frac{a}{a'}\right)^b.$$

Etude des fonctions puissances

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$, on pose :

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.$$

On a vu que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ (avec des prolongements dans certains cas selon α).

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que composée de fonctions dérivables et $f'(x) = \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha x^{\alpha-1}$. Sur $\mathbb{R}_+^*$, le signe de la dérivée est celui de α. Il faut donc étudier deux cas :

- $\alpha > 0$

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Et (avec $X = \alpha \ln x$) :

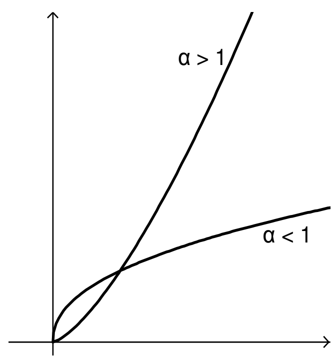
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0 \; ;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty.$$

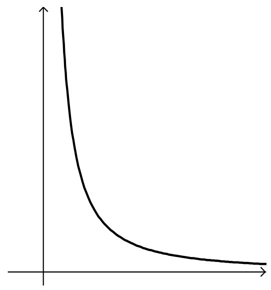
Tangente en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\alpha}{x} e^{\alpha \ln x} = \alpha \lim_{x \to 0^+} e^{(\alpha-1)\ln x} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 1 \end{cases}$$

D'où la courbe :



- $\alpha < 0$

<table>
<tr>
<td>La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Et (avec $X = \alpha \ln x$) :
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{X \to +\infty} e^X = +\infty \ ;$$
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{X \to -\infty} e^X = 0 .$$
Asymptote verticale en 0 et asymptote horizontale en + ∞.</td>
<td>D'où la courbe :
</td>
</tr>
</table>

<u>Propriété</u> (*croissances comparées*) :

Soit $\alpha \neq 0$. On a :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln x = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

2. <u>Fonction logarithme décimal</u>

La fonction $x \mapsto 10^x = e^{x \ln 10}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à images dans $\mathbb{R}_+^*$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$.

<u>Définition</u> :

La fonction réciproque de la fonction $x \mapsto 10^x$ est appelée fonction <u>logarithme décimal</u> et notée $\log_{10}$ ou Log.

<u>Propriété</u> :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{Log}\, x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

Remarques :

- Le logarithme décimal suit les mêmes règles de calcul que le logarithme népérien.
- On parle de fonction logarithme en base $a > 0$ pour la fonction $x \mapsto \mathrm{Log}_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, réciproque de la fonction exponentielle $x \mapsto a^x = e^{(\ln a)x}$, notamment du logarithme en base 2.

3. <u>Cosinus et sinus hyperboliques</u>

<u>Définitions</u> :

La fonction <u>cosinus hyperbolique</u>, notée ch, est la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

La fonction <u>sinus hyperbolique</u>, notée sh, est la fonction $x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

<u>Propriété</u> :

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$.

<u>*Etude des fonctions* ch *et* sh</u> :

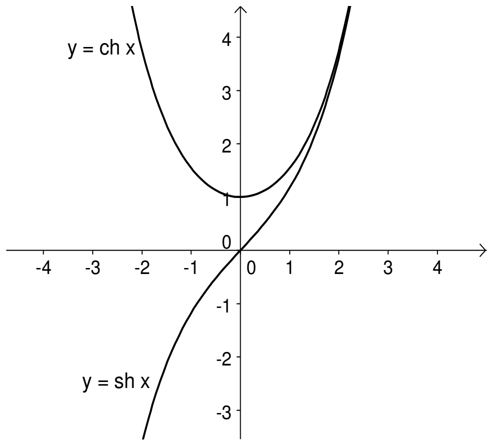
Elles sont définies sur $\mathbb{R}$, ch est paire et sh est impaire. Elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\mathrm{ch}' = \mathrm{sh} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}' = \mathrm{ch}.$$

La fonction sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et la fonction ch est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}\, x = \lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}\, x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{ch}\, x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}\, x = -\infty.$$

La courbe de ch est au-dessus de celle de sh et les courbes sont asymptotes l'une de l'autre en $+\infty$.

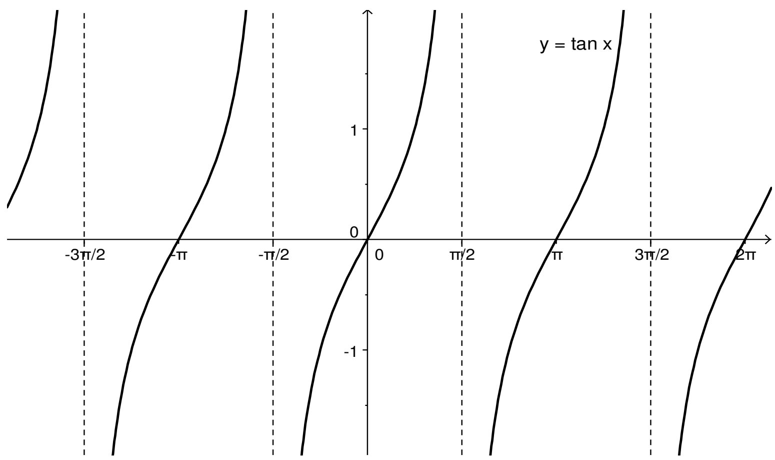


4. <u>Fonction tangente</u>

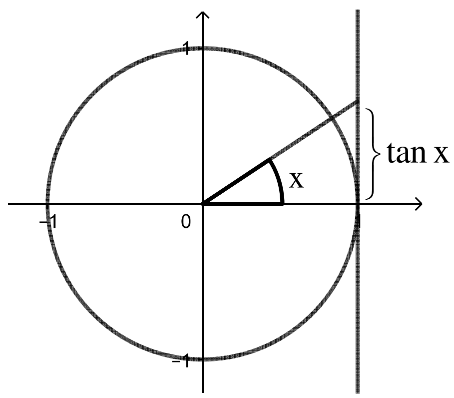
La fonction tangente, $x \mapsto \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, est définie sur $D = \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, π-périodique, impaire (donc, pour tout $x \in D$, $\tan(x+\pi) = \tan(x-\pi) = \tan x$ et $\tan(\pi - x) = -\tan x$).

La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition D, de dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

Sa courbe est :



<u>*Interprétation géométrique de la tangente*</u>



Remarque : On définit aussi la fonction cotangente : $x \mapsto \mathrm{cotan}\, x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

5. **Fonctions circulaires réciproques**

a. Fonction arccos :

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0\,;\pi]$, à images dans $[-1\,;1]$ donc elle réalise une bijection de $[0\,;\pi]$ vers $[-1\,;1]$.

Définition :

La fonction réciproque de la fonction cosinus restreinte à $[0\,;\pi]$ est appelée fonction arccosinus et notée arccos.

Propriété :

$\forall\, x\in\mathbb{R}$:

- s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $2k\pi\le x\le(2k+1)\pi$, alors $\arccos\big(\cos x\big)=x-2k\pi$;
- s'il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $\pi< x-2k\pi<2\pi$ alors $\arccos\big(\cos x\big)=2(k+1)\pi-x$.

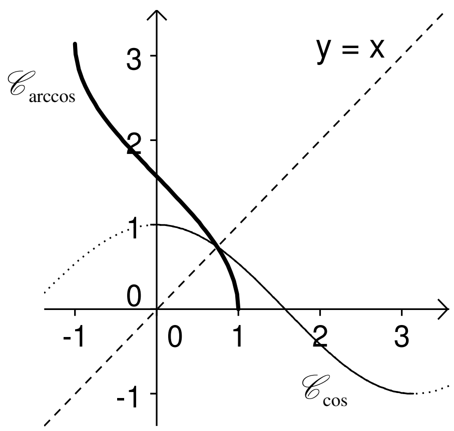
Etude de la fonction arccos :

La fonction arccos est définie et continue sur $[-1\,;1]$ et à images dans $[0\,;\pi]$, dérivable sur $]-1\,;1[$ et :

$$\arccos'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arccos est strictement décroissante sur $[-1\,;1]$.

On obtient la courbe (symétrique de celle de cos par rapport à y = x) :



Propriété :

$\forall\, x\in[-1\,;1]$, $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

b. Fonction arcsin :

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$, à images dans $[-1\,;1]$ donc elle réalise une bijection de $[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}]$ vers $[-1\,;1]$.

Définition :

La fonction réciproque de la fonction sinus restreinte à $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ est appelée fonction arcsinus et notée arcsin.

Propriété :

$\forall x \in \mathbb{R}$:

- s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\frac{\pi}{2}+2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2}+2k\pi$, alors $\arcsin(\sin x) = x - 2k\pi$;
- s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2}+2k\pi < x < \frac{3\pi}{2}+2k\pi$ alors $\arcsin(\sin x) = (2k+1)\pi - x$.

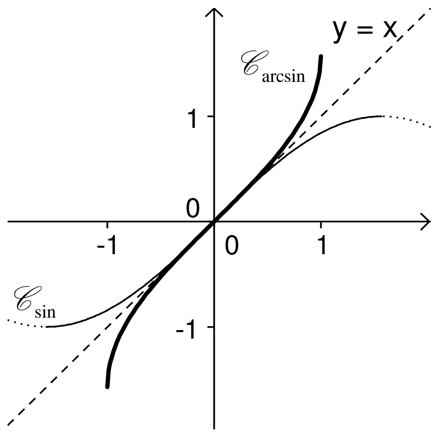
Etude de la fonction arcsin :

La fonction arcsin est définie, impaire et continue sur $[-1;1]$, à images dans $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ et dérivable sur $]-1;1[$:

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

La fonction arcsin est strictement croissante sur $[-1;1]$.

On obtient la courbe (symétrique de celle de sin par rapport à y = x) :



$$\boxed{\forall x \in [-1;1],\ \arccos(x)+\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}$$

c. Fonction arctan :

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$, à images dans $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$.

Définition :

La fonction réciproque de la fonction tangente restreinte à $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ est appelée fonction arctangente et notée arctan.

Propriété :

$\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, il existe un unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ et :

$$\arctan(\tan x) = x - k\pi.$$

Etude de la fonction arctan :

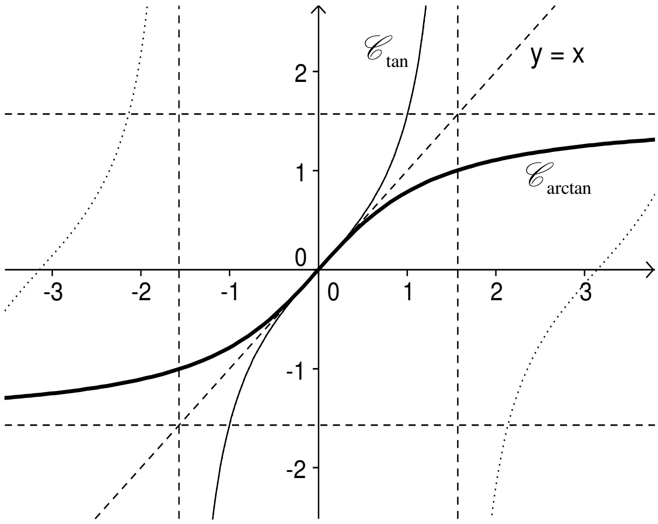
La fonction arctan est définie, impaire, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, à images dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et :

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}.$$

On obtient la courbe (symétrique de celle de de la fonction tangente par rapport à y = x) :



La courbe de arctan possède deux asymptotes horizontales : $y = -\pi/2$ en $-\infty$ et $y = \pi/2$ en $+\infty$.

III – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition :

Une fonction à valeurs complexes est une application de $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Définition :

Soit $f \in \mathbb{C}^I$ une fonction à valeurs complexe. On a appelle partie réelle de f, notée $\mathrm{Re}(f)$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Re}[f(x)]$, partie imaginaire de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, la fonction $x \mapsto \mathrm{Im}[f(x)]$, fonction conjuguée de f, notée $\bar{f}$, la fonction $x \mapsto \overline{f(x)}$ et module de f, notée $|f|$, la fonction $x \mapsto |f(x)|$.

Définition :

Soit f une fonction complexe. On dit que f est bornée si $|f|$ l'est.

Propriété :

$\forall\,(f,g) \in \mathcal{B}(I,\mathbb{C})^2$ et $\forall\,(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, $\lambda f + \mu g$ et fg sont bornées sur I.