Chapitre 7 : Fonctions numériques - Dérivation

Programme officiel PCSI

a) Nombre dérivé, fonction dérivée

Dérivabilité en un point, nombre dérivé.
La dérivabilité entraîne la continuité.
Dérivabilité à gauche, à droite.

Définition par le taux d'accroissement.
Caractérisation : une fonction f est dérivable en a si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1 en a. Dans ce cas

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h), \text{ où } \varepsilon(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Interprétation géométrique : tangente.
Interprétation cinématique : vitesse instantanée.

Dérivabilité et dérivée sur un intervalle.
Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.

Tangente au graphe d'une fonction réciproque.

b) Extremum local et point critique

Condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur.

Un point critique est un zéro de la dérivée.

c) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Théorème de Rolle.
Égalité des accroissements finis.

Interprétations géométrique et cinématique.

Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.

La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion.

Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.
Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x\neq a}} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

La fonction f' est alors continue en a.

Extension au cas où $\ell = \pm\infty$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$.

d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$

Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$.
Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque.

Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.

e) Fonctions convexes

La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0,1]$, $f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)$.	Interprétation géométrique. L'inégalité de Jensen et les développements généraux sur les barycentres sont hors programme.
Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes, d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes. Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.	Exemples d'inégalités de convexité.
Inégalités $\exp(x) \geqslant 1+x$, $\ln(1+x) \leqslant x$.	

d) Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

Dérivée d'une fonction à valeurs complexes. Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient. Dérivée de $\exp(\varphi)$ où φ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	La dérivée est définie par les parties réelle et imaginaire. Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.

f) Fonctions complexes

Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction complexe de classe $\mathscr{C}^1$.	On mentionne que l'inégalité résulte d'une simple majoration d'intégrale, justifiée ultérieurement dans la section « Intégration ».

Plan du résumé

Résumé

I – Dérivée d'une fonction

Dans cette partie, on considère (sauf mention contraire) une fonction f définie sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et un réel $a \in I$. La plupart des définitions et résultats s'étendent aux fonctions définies sur une partie quelconque de $\mathbb{R}$.

1. Dérivée en un point

a. Définition :

Définitions :

La quantité $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est appelée taux d'accroissement ou de variation de f entre a et x.

On dit que la fonction f est dérivable (*resp*. dérivable à droite, *resp*. dérivable à gauche) en a si le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie (*resp*. une limite finie à droite, *resp*. une limite finie à gauche) en a.

Cette limite est appelée nombre dérivée de f en a (*resp*. nombre dérivée à droite, *resp*. nombre dérivée à gauche), notée $f'(a)$ (*resp*. $f_d'(a)$, *resp*. $f_g'(a)$).

Propriété :

Si f est une fonction dérivable en a, alors elle est continue en a.

b. Interprétation graphique :

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan et $A(a, f(a))$ un point de $\mathscr{C}$.

- Si f est dérivable en a, alors $\mathscr{C}$ admet une tangente en A de pente $f'(a)$. Cette tangente passe par A et son équation réduite est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
- Si f est dérivable à droite (*resp*. à gauche) en a, alors $\mathscr{C}$ admet une demi-tangente en A de pente $f_d'(a)$, (*resp*. $f_g'(a)$).
- Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$, donc $\mathscr{C}$ admet une tangente verticale en A. De même, pour les demi-tangentes à droite et à gauche.

c. Interprétation cinématique :

Si la variable est le temps t et la fonction f représente la distance parcourue par un mobile M se déplaçant sur une droite, alors :

- Le taux de variation $\dfrac{f(t)-f(t_o)}{t-t_o}$ représente lui la vitesse moyenne entre les instants t et t_o.
- $f'(t_o)$ représente la vitesse instantanée de M à l'instant t_o.

2. Fonction dérivée

Définitions :

Si f admet un nombre dérivé en tout point de I, alors on dit que f est dérivable sur I et la fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée (ou dérivée) de f sur I. On la note f', Df ou $\dfrac{df}{dx}$.

3. Opérations sur les dérivées

Propriété :

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur I, alors pour tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, $\lambda f+\mu g$ et fg sont dérivables sur I avec :

$$(\lambda f+\mu g)'=\lambda f'+\mu g' \text{ et } (fg)'=f'g+fg'.$$

Propriété :

Soient f et g deux fonctions telles que f est dérivable sur I et g est définie et dérivable sur $f(I)$. Alors, $g\circ f$ est dérivable sur I et :

$$(g\circ f)'=f'\times g'\circ f.$$

Propriété :

Soit $(f,g)\in\mathcal{D}(I,\mathbb{R})^2$ tel que g ne s'annule pas sur I, alors, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}$.

Propriété :

Soit f une fonction bijective de I dans J et dérivable sur I.

Alors, f^{-1} est dérivable en tout point a de J tel que $f'\left(f^{-1}(a)\right)\neq 0$ et $(f^{-1})'(a)=\dfrac{1}{f'\left(f^{-1}(a)\right)}$.

4. Dérivées usuelles

Fonction	*Ensemble de définition*	*Dérivée*	*Ensemble de dérivation*
$t\mapsto t^n$ avec $n\in\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	$x\mapsto nt^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$t\mapsto t^\alpha$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}$)	$x\mapsto \alpha t^{\alpha-1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ($\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R}$)
$t\mapsto e^t$	$\mathbb{R}$	$t\mapsto e^t$	$\mathbb{R}$
$t\mapsto \ln t$	$\mathbb{R}_+^*$	$t\mapsto \dfrac{1}{t}$	$\mathbb{R}_+^*$
$t\mapsto \cos t$	$\mathbb{R}$	$t\mapsto -\sin t$	$\mathbb{R}$
$t\mapsto \sin t$	$\mathbb{R}$	$t\mapsto \cos t$	$\mathbb{R}$
$t\mapsto \tan t$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$	$t\mapsto 1+\tan^2 t=\dfrac{1}{\cos^2 t}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$

$t \mapsto \operatorname{ch} t$	$\mathbb{R}$	$t \mapsto \operatorname{sh} t$	$\mathbb{R}$
$t \mapsto \operatorname{sh} t$	$\mathbb{R}$	$t \mapsto \operatorname{ch} t$	$\mathbb{R}$
$t \mapsto \arctan t$	$\mathbb{R}$	$t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$	$\mathbb{R}$
$t \mapsto \arccos t$	$[-1\,;1]$	$t \mapsto -\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$]-1\,;1[$
$t \mapsto \arcsin t$	$[-1\,;1]$	$t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$	$]-1\,;1[$

5. Extremum locaux et dérivées

Définitions :

Soit f une fonction définie sur I. Un point a de I est un point critique si f est dérivable en a et $f'(a)=0$.

Propriété :

Soit f une fonction définie sur I et a un point intérieur à I.

Si f est dérivable en a et admet un extremum local en a, alors a est un point critique.

6. Fonctions de classe C^k

a. Définition :

Définitions :

Soit n un entier naturel. Si on note $f^{(0)}=f$, on dit que f est n fois dérivable sur I si f est $n-1$ dérivable sur I et sa dérivée $n-1^{\text{ième}}$ est dérivable sur I. La dérivée $n^{\text{ième}}$ de f est notée $f^{(n)}$, $D^n f$, $\dfrac{d^n f}{dx^n}$.

On dit que f est indéfiniment dérivable sur I, si elle est n fois dérivable sur I pour tout entier naturel n.

Pour $0 \le n \le \infty$, on dit que f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue sur I (de classe C^∞ = indéfiniment dérivable).

On note $C^n(I,\mathbb{R})$ ou $C^n(I)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, l'ensemble des fonctions de classe C^n sur I.

b. Opérations :

Propriétés :

Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, si f et g sont deux fonctions de classe C^n sur I, alors :

- Pour tout $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est de classe C^n sur I et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$.
- fg est de classe C^n sur I et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ (*formule de Leibniz*).
- Si g est de classe C^n sur f(I), alors $g \circ f$ est de classe C^n sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe C^n sur I.
- Si f est bijective de I dans f(I) et f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est de classe C^n sur f(I).

II – Etude globale des fonctions dérivables

1. Théorème de Rolle

Théorème (*de Rolle*) :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)$.

Il existe $c\in\ ]a,b[$, tel que $f'(c)=0$.

2. Egalité et inégalité des accroissements finis

a. Egalité des accroissements finis :

Théorème : (*des accroissements finis - TAF*)

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.

Il existe $c\in\ ]a,b[$, tel que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

b. Inégalité des accroissements finis :

Corollaire : *Inégalité des accroissements finis*

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $m\le f'\le M$. Alors :

$$m(b-a)\le f(b)-f(a)\le M(b-a).$$

Propriété : *Application de l'inégalité des accroissements finis*

Pour tout réel x, on a :

$$|\sin x|\le|x|.$$

3. Fonctions lipschitziennes

Définition :

Soient $f\in\mathbb{R}^I$. On dit que f est lipschitzienne si $\exists\, k\in\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x,y)\in I^2$:

$$|f(x)-f(y)|\le k\,|x-y|.$$

On dit alors que f est k-lipschitzienne.

Propriété :

Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $|f'|\le k$, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.

4. Dérivation et sens de variation

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'intérieur de I.

- f est constante sur I ssi f' est nulle sur l'intérieur de I.
- f est croissante (*resp.* décroissante) sur I ssi f' est positive ou nulle (*resp.* négative ou nulle) sur l'intérieur de I.

  De plus, si la dérivée s'annule uniquement sur une partie de I finie ou en bijection avec $\mathbb{N}$, la monotonie est stricte.

Corollaire :

Soit f une fonction dérivable sur I et a un point intérieur à I .

Si f' s'annule et change de signe en a, alors f admet un extremum local en a.

5. Lien entre f '(a) et la limite de f '(x) en a

Théorème (*de la limite de la dérivée*) :

Si f est continue sur $[a,b]$, de classe C^1 sur $]a,b]$.

- si f' admet en a une limite finie ℓ, alors f est de classe C^1 sur $[a,b]$ avec $f'(a)=\ell$.
- si f' admet une limite infinie en a, alors $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet la même limite en a et la fonction f n'est pas dérivable en a.

III – Fonctions convexes

1. Définition

Définitions :

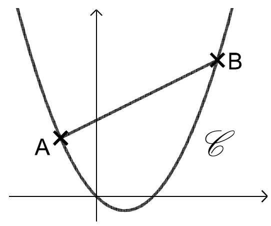
Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On dit que f est convexe sur I si pour tous $x, y \in I$ et tout $\lambda \in [0;1]$:

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)y\right) \le \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Si – f est convexe, on dit que f est concave (*Attention* : « non convexe » ne vaut pas dire « concave »).

Interprétation graphique :

Si $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction convexe f, et A et B sont deux points de $\mathscr{C}$, alors l'arc $\overset{\frown}{AB}$ de $\mathscr{C}$ est situé en dessous de la corde $[AB]$.



Propriété (*inégalité de Jensen, hors programme*) :

Soit f une fonction convexe sur I.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1, a_2, ..., a_n) \in I^n$ et $\forall (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in [0;1]^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(a_i).$$

2. Convexité et dérivation

Propriété :

Si f est dérivable sur I.

- f est convexe si et seulement si f' est croissante.
- f est concave si et seulement si f' est décroissante.

Corollaire :

Si f est deux fois dérivable sur I.

- f est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I.
- f est concave si et seulement si $f'' \leq 0$ sur I.

Propriété :

Une fonction dérivable est convexe (*resp*. concave) si et seulement si sa courbe est située au-dessus (*resp*. en-dessous) de toutes ses tangentes.

3. Deux inégalités de convexité

Propriétés :

Pour tout réel x :

$$e^x \geq 1+x \quad (\textit{la fonction exponentielle est convexe})$$

$$\ln(1+x) \leq x \quad (\textit{la fonction logarithme est concave})$$

IV – Extension aux fonctions à valeurs complexes

Sur $\mathbb{C}^I$, les notions de taux de variation et de limite ont du sens. Donc, on peut définir nombre dérivé et fonction dérivée.

Propriété :

Soient $f \in \mathbb{C}^I$ et $a \in I$.

f dérivable en a (*resp*. sur I) $\Leftrightarrow$ Re(f) et Im(f) dérivables en a (*resp*. sur I).

f dérivable en a (*resp*. sur I) $\Leftrightarrow$ $\overline{f}$ dérivable en a (*resp*. sur I).

Et dans ce cas, $\overline{f}' = \overline{f'}$, $\mathrm{Re}(f') = [\mathrm{Re}(f)]'$ et $\mathrm{Im}(f') = [\mathrm{Im}(f)]'$.

Les propriétés associées à la dérivation qui ne mettent pas en jeu des inégalités s'étendent aux fonctions à valeurs complexes.

En particulier, restent valables dans $\mathbb{C}$:

- la propriété « dérivable implique continue » ;
- la caractérisation des fonctions constantes par leur dérivée nulle (se prouve avec les parties réelles et imaginaires) ;
- la stabilité de la dérivabilité par opérations ainsi que les formules associées (attention pour la composition : on peut définir la composée d'une fonction à valeurs *réelles* par une fonction à valeurs complexes).

Propriété :

Soit φ une fonction à valeurs complexes dérivable sur I.

La fonction $\exp(\varphi)$ est dérivable sur I, de dérivée $\varphi'\exp(\varphi)$.

Attention :

- toutes les propriétés qui parlent de variations, d'extremums, de comparaison,… n'ont bien sûr pas de sens sur $\mathbb{C}$;

- le théorème de Rolle et le TAF ne sont plus vrais sur $\mathbb{C}$.

<u>*Propriété*</u> (*inégalité des accroissements finis*) :

> Soit f une fonction à valeurs complexes, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $|f'|\leq M$. Alors :
>
> $$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leq M.$$