

Corrigés des TD du chapitre 11

Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, $t^n \in [0, 1]$ et la fonction $f_n : t \mapsto f(t^n)$ est définie sur $[0, 1]$.

De plus :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0, 1]$ comme composée de fonctions continues (donc I_n est bien définie) ;
- pour tout $t \in [0, 1]$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} t^n = 0$, et par continuité de f en 0, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t^n) = f(0)$;
- f est continue sur le segment $[0, 1]$, donc est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f| \leq M$; alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, 1]$, $|f_n(t)| = |f(t^n)| \leq M$.

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right] dt = \int_0^1 f(0) dt .$$

Soit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = f(0)$$

Exercice 2

La série $\sum |a_n|$ converge (donc $\sum a_n$ aussi et $a_n \rightarrow 0$) et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$.

Comme $a_n \rightarrow 0$, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée : il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$.

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{a_n}{n!} x^n \right| = \frac{|a_n|}{n!} |x|^n \leq M \frac{|x|^n}{n!}$ et $M \frac{|x|^n}{n!} \rightarrow 0$, donc $\left(\frac{a_n}{n!} x^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et ainsi, le

rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est infini, autrement dit :

S est définie sur \mathbb{R} .

On a :

$$I = \int_0^{+\infty} S(x) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \right) e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n e^{-x} \right) dx = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right) dx$$

avec $f_n(x) = \frac{a_n}{n!} x^n e^{-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^n e^{-x}$ et donc f_n sont continues sur \mathbb{R} (produit).

De plus, on a $x^n e^{-x} = o(e^{-x/2})$ et la fonction $x \mapsto e^{-x/2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . Alors, $x \mapsto x^n e^{-x}$ et donc f_n sont intégrables sur \mathbb{R}_+ .

Et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $X \in \mathbb{R}_+$, on a par IPP :

$$\int_0^X x^{n+1} e^{-x} dx = \left[-x^{n+1} e^{-x} \right]_0^X - \int_0^X \left(-(n+1)x^n e^{-x} \right) dx = -X^{n+1} e^{-X} + (n+1) \int_0^X x^n e^{-x} dx.$$

Donc :

$$\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx = (n+1) \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx.$$

Comme $x \mapsto x^n e^{-x}$ est positive et non nulle sur \mathbb{R}_+ , on a $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx > 0$ et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx}{\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx} = n+1.$$

Avec un produit télescopique, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = n! \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = n! \Rightarrow \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \frac{a_n}{n!} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = a_n.$$

Ainsi :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ ;
- la série $\sum f_n$ converge simplement vers $x \mapsto S(x)e^{-x}$, qui est continue (et même de classe C^∞) sur \mathbb{R} (car produit d'une somme d'une série entière et d'une fonction exponentielle) ;
- $\sum \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum |a_n|$ converge.

Donc :

$$x \mapsto S(x)e^{-x} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \int_0^{+\infty} S(x)e^{-x} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Ceci revient à dire :

$$I = \int_0^{+\infty} S(x)e^{-x} dx \text{ converge et vaut } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Exercice 3

1) a. L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ est impropre en 0 et $+\infty$. Mais :

- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1$ donc $t \mapsto \frac{t}{e^t - 1}$ se prolonge par continuité en 0 ;
- $\frac{t}{e^t - 1} = o_{t \rightarrow +\infty}(e^{-t/2})$ et la fonction $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Donc, $I = \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$ converge, autrement dit :

I est bien définie.

b. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{-t} \in]0,1[$, donc la série géométrique $\sum (e^{-t})^n$ converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(n+1)t} = e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t-1}.$$

D'où, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} t e^{-(n+1)t}}$$

c. En intégrant par parties, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $X \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \int_0^X t e^{-(n+1)t} dt &= \left[-\frac{1}{n+1} t e^{-(n+1)t} \right]_0^X + \frac{1}{n+1} \int_0^X e^{-(n+1)t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{n+1} t e^{-(n+1)t} \right]_0^X + \frac{1}{n+1} \left[-\frac{1}{n+1} e^{-(n+1)t} \right]_0^X \\ &= -\left(\frac{1}{n+1} X + \frac{1}{(n+1)^2} \right) e^{-(n+1)X} + \frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Et en faisant tendre X vers $+\infty$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\int_0^{+\infty} t e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{(n+1)^2}}$$

Alors, si on note $f_n : t \mapsto t e^{-(n+1)t}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ ;
- $\sum f_n$ converge simplement vers $t \mapsto \frac{t}{e^t-1}$, qui, prolongée par continuité en 0, est continue sur \mathbb{R}_+ ;
- $\sum \int_0^{+\infty} |f_n| = \sum \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum \frac{1}{(n+1)^2}$ converge.

Donc :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1} dt = \frac{\pi^2}{6}}$$

2) a. Posons $f(x,t) = \frac{t^x-1}{\ln t} = \frac{e^{x \ln t}-1}{\ln t}$ pour $(x,t) \in]-1, +\infty[\times]0,1[$. On a pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(x,t) = \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^{-x} \ln t} & \text{quand } x < 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} 0 & \text{quand } x = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1}{\ln t} & \text{quand } x > 0 \end{cases} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 1} f(x,t) = x \lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u-1}{u} = x.$$

Donc, $t \mapsto f(x, t)$ est prolongeable par continuité en 0 et 1. Alors :

- pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue et intégrable sur $]0, 1[$;
- pour tout $t \in]0, 1[$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur $] -1, +\infty[$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{x \ln t} = t^x$;
- pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = e^{x \ln t}$ est continue sur $]0, 1[$;

Enfin, pour tout $a \in]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$, on a pour tout $t \in]0, 1[$:

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| = e^{x \ln t} \leq e^{a \ln t} = t^a.$$

Et $t \mapsto t^a$ positive, continue et intégrable sur $]0, 1[$ (avec $\int_0^1 t^a dt = \frac{1}{a+1}$).

Alors :

$$J : x \mapsto \int_0^1 f(x, t) dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a, +\infty[\text{ avec } J'(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt = \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}.$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in]-1, +\infty[$:

$$J \text{ est définie et de classe } C^1 \text{ sur }]-1, +\infty[\text{ avec pour tout } x \in]-1, +\infty[, J'(x) = \frac{1}{x+1}.$$

b. Avec $J'(x) = \frac{1}{x+1}$ sur $] -1, +\infty[$, on a immédiatement pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$J(x) = \ln(x+1) + k$$

où k est une constante.

On a vu dans l'exercice 2)k. du TD 9 que $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt = \ln 2$, soit $J(1) = \ln 2$.

Or, $J(1) = \ln(1+1) + k = \ln 2 + k$ donc $k = 0$ et finalement pour tout $x \in]-1, +\infty[$:

$$J(x) = \ln(x+1)$$

Exercice 4

Posons $f(x, t) = \frac{1}{1+t^2 + e^{-xt}}$.

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ .
- Quel que soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a $0 \leq f(x, t) \leq \frac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ , donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(x, t) dt$ converge.

Ainsi :

$$F \text{ est définie sur } \mathbb{R}.$$

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, on a $e^{-bt} \leq e^{-at}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, avec égalité en $t = 0$ uniquement, donc $f(a, t) \leq f(b, t)$ avec égalité en $t = 0$ uniquement et ainsi :

$$F(a) < F(b).$$

Ceci prouve que :

F est strictement croissante sur \mathbb{R} .

On a :

$$F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) \right]_0^{+\infty}.$$

Soit :

$$F(0) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

Pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}_+$, on a $0 < f(x, t) \leq \frac{1}{e^{-xt}} = e^{xt}$, donc :

$$0 \leq F(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{xt} dt = \left[\frac{1}{x} e^{xt} \right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{x}.$$

Donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

On a vu que $f : (x, t) \mapsto \frac{1}{1+t^2+e^{-xt}}$ est définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur \mathbb{R}_+ .

De plus, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$, on a :

$$f(x, t) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{quand } t = 0 \\ \frac{1}{1+t^2} & \text{quand } t > 0 \end{cases}$$

La fonction ℓ est continue par morceaux sur \mathbb{R}_+ .

Enfin, pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$, on a $|f(x, t)| \leq \frac{1}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur \mathbb{R}_+ . Donc, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+e^{-xt}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan t]_0^{+\infty}.$$

Soit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 5

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \frac{\cos t}{t+x}$ est définie et continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc f est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

- pour tout $x \in [a, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\cos t}{t+x}$ est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $x \mapsto \frac{\cos t}{t+x}$ est continue sur $[a, +\infty[$;
- pour tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $0 \leq \frac{\cos t}{t+x} \leq \frac{\cos t}{t+a}$ et $t \mapsto \frac{\cos t}{t+a}$ est continue et intégrable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Donc, $f(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt$ est continue sur $[a, +\infty[$. Ceci étant vrai pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

f est bien définie et continue sur \mathbb{R}_+^* .

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x} dt = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\cos t}{t+x} - \frac{\cos t}{x} \right) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{-t \cos t}{x(t+x)} dt.$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$|g(x)| = \int_0^{\pi/2} \frac{t \cos t}{x(t+x)} dt \leq \int_0^{\pi/2} \frac{t \cos t}{x^2} dt = \frac{1}{x^2} \int_0^{\pi/2} t \cos t dt = \frac{1}{x^2} \frac{\pi-2}{2}.$$

Donc, on a bien :

$$g(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

On a :

$$g(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{x} dt = f(x) - \frac{1}{x} \int_0^{\pi/2} \cos t dt = f(x) - \frac{1}{x}.$$

Or, $g(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{O} \left(\frac{1}{x^2} \right)$ implique $g(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x} \right)$, donc :

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{x} = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x} \right).$$

Ce qui implique :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$h(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{t+x} dt - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t - 1}{t+x} dt.$$

Or, $-\frac{1}{2}t^2 \leq \cos t - 1 \leq 0$ sur \mathbb{R}_+ , donc sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, d'où pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$|h(x)| = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos t}{t+x} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{t^2}{t} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} t dt = \frac{\pi^2}{16}.$$

Or, $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{t+x} dt = \ln\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - \ln x$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$|h(x)| = \left| f(x) - \ln\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \ln x \right| \leq \frac{\pi^2}{16}.$$

Alors, pour tout $x \in]0, 1[$:

$$\left| \frac{f(x)}{-\ln x} - 1 \right| = \frac{1}{-\ln x} |f(x) + \ln x| \leq \frac{1}{-\ln x} \left[\left| f(x) + \ln x - \ln\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right| + \ln\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right] \leq \frac{1}{-\ln x} \left[\frac{\pi^2}{16} + \ln\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right].$$

Et comme $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{-\ln x} \left[\frac{\pi^2}{16} + \ln\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \right] \right) = 0$, on obtient par comparaison, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{-\ln x} = 1$, soit :

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x}$$

Exercice 6

1) Soit $f(x, t) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$. Cette fonction est définie sur $\mathbb{R} \times [0, 1]$ et :

- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est continue, donc intégrable, sur le segment $[0, 1]$;
- pour tout $t \in [0, 1]$, $x \mapsto f(x, t)$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -2xe^{-x^2(1+t^2)}$ est continue sur $[0, 1]$;
- pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \sqrt{\frac{2}{e(1+t^2)}}$ (il suffit d'étudier $x \mapsto 2xe^{-x^2(1+t^2)}$ sur \mathbb{R}) et la fonction

$t \mapsto \sqrt{\frac{2}{e(1+t^2)}}$ est continue, donc intégrable, sur le segment $[0, 1]$.

Alors, la fonction F est de classe C^1 sur \mathbb{R} , de dérivée $x \mapsto -2 \int_0^1 x e^{-x^2(1+t^2)} dt$.

La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur \mathbb{R} , donc $g : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} . Comme $G = g^2$, G est aussi de classe C^1 sur \mathbb{R} et $G' = 2g'g$.

Finalement :

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R}, F'(x) = -2 \int_0^1 x e^{-x^2(1+t^2)} dt \text{ et } G'(x) = 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt.}$$

2) Comme F et G le sont, $F + G$ est de classe C^1 sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) + G'(x) = -2 \int_0^1 x e^{-x^2(1+t^2)} dt + 2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 2e^{-x^2} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt - \int_0^1 x e^{-(xt)^2} dt \right).$$

En posant $u = xt$, on obtient $\int_0^1 x e^{-(xt)^2} dt = \int_0^x e^{-u^2} du$ et ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(F+G)'(x) = 0$, donc ;

$$F + G \text{ est constante sur } \mathbb{R}.$$

3) Pour tout pour tout $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, on a $e^{-x^2(1+t^2)} = e^{-x^2} e^{-x^2 t^2} \leq e^{-x^2}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|F(x)| = F(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt \leq e^{-x^2} \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4} e^{-x^2}.$$

D'après le théorème des gendarmes, on obtient immédiatement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0$$

Remarquons préalablement que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ est impropre en $+\infty$, mais $e^{-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 = \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2.$$

Comme $F+G$ est constante sur \mathbb{R} , on a, avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 0 = G(0)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [F(x) + G(x)] = F(0) + G(0) \Leftrightarrow \left(\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt \right)^2 = F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Et comme $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt > 0$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

4) Comme $t \mapsto e^{-t^2}$ est paire sur \mathbb{R} , on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$, donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Remarquons préalablement que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est impropre en 0 et $+\infty$, mais :

- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$ donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ converge ;
- $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge.

Ainsi :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \text{ converge.}$$

En posant $u = \sqrt{t}$ dans $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.$$

Soit :

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\pi}}$$

Exercice 7

1) Pour $f \in E$, posons $h(x, t) = e^{-xt} f(t)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $f \in E$, la fonction $t \mapsto h(x, t) = e^{-xt} f(t)$ est continue \mathbb{R}_+ . De plus, $|f(t)| = O(1)$, donc

$e^{-xt} |f(t)| = O(e^{-xt})$. Or, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-xt} dt$ converge (car $x > 0$), ce qui permet de conclure que :

$\mathcal{L}(f)$ est bien définie sur \mathbb{R}_+^* .

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

- pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto h(x, t) = e^{-xt} f(t)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* avec :

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = (-t)^k e^{-xt} f(t) ;$$

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) = (-t)^k e^{-xt} f(t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ ;

de plus, $\left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| = O(t^k e^{-xt})$ et $t^k e^{-xt} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, donc $\int_0^{+\infty} t^k e^{-xt} dt$ converge et ainsi, $t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ ;

- pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $(x, t) \in [a, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, on a $\left| t \mapsto \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq t^k e^{-at} f(t)$ et on vient de voir que $t \mapsto t^k e^{-at} f(t)$ est continue et intégrable sur \mathbb{R}_+ .

Alors, $x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$ est de classe C^∞ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$, soit pour tout $f \in E$:

$$\boxed{\mathcal{L}(f) \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^* .}$$

De plus, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{L}(f)^{(k)} : x \mapsto \int_0^{+\infty} (-t)^k e^{-xt} f(t) dt$.

2) Soit $f \in E$. On veut $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt$.

Comme f est bornée sur \mathbb{R}_+ , il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $|f(t)| \leq M$ et :

$$|\mathcal{L}(f)(x)| = \left| \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt \right| \leq \int_0^{+\infty} |e^{-xt} f(t)| dt = \int_0^{+\infty} e^{-xt} |f(t)| dt \leq M \int_0^{+\infty} e^{-xt} dt = \frac{M}{x}.$$

Ceci donne immédiatement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(f)(x) = 0$$

3) Soit $g : t \mapsto \frac{\sin t}{t}$.

La fonction g est continue sur \mathbb{R}_+^* en tant que quotient de telles fonctions et, comme $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, elle se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$.

La fonction ainsi prolongée, renommée g , est continue sur le segment $[0, 1]$, donc y est bornée et pour tout $t \in [1, +\infty[$, on a $|g(t)| = \frac{|\sin t|}{t} \leq \frac{1}{t} \leq 1$, donc g est aussi bornée sur $[1, +\infty[$.

Ainsi, g est bornée sur $[0, 1]$ et $[1, +\infty[$, donc sur \mathbb{R}_+ , ce qui prouve que :

La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ se prolonge par continuité en une fonction g de E .

D'après la question 1, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{L}(g)'(x) = \int_0^{+\infty} (-t)e^{-xt} g(t) dt$, soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g)'(x) &= \int_0^{+\infty} (-t)e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt = - \int_0^{+\infty} e^{-xt} \sin t dt = \operatorname{Im} \left(- \int_0^{+\infty} e^{(-x+i)t} dt \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\left[\frac{-1}{-x+i} e^{(-x+i)t} \right]_0^{+\infty} \right) = \operatorname{Im} \left(\left[\frac{x+i}{x^2+1} e^{-xt} e^{it} \right]_0^{+\infty} \right) = - \operatorname{Im} \left(\frac{x+i}{x^2+1} \right) \end{aligned}$$

Soit pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathcal{L}(g)'(x) = - \frac{1}{x^2+1}$$

On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathcal{L}(g)(x) = -\arctan x + C$ où C est une constante d'intégration.

Or, d'après la question 2, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{L}(g)(x) = 0$, soit $-\frac{\pi}{2} + C = 0$ et donc $C = \frac{\pi}{2}$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\mathcal{L}(g)(x) = \frac{\pi}{2} - \arctan x = \arctan \left(\frac{1}{x} \right)$$

Exercice 8

1) Posons $f(s, x) = e^{-x} x^{s-1}$ pour tout $(s, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, la fonction $s \mapsto f(s, x)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^* avec, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial^k f}{\partial s^k}(s, x) = (\ln x)^k e^{-x} x^{s-1}.$$

- Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial s^k}(s, x)$ est continue, donc continue par morceaux, sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, tous $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a \leq 1 \leq b$ et tout $(s, x) \in [a, b] \times \mathbb{R}_+^*$:

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial s^k}(s, x) \right| = |\ln x|^k e^{-x} x^{s-1} \leq \varphi(x) = \begin{cases} |\ln x|^k e^{-x} x^{a-1} & \text{pour } x \leq 1 \\ |\ln x|^k e^{-x} x^{b-1} & \text{pour } x \geq 1 \end{cases}$$

La fonction φ est continue (même en 1 où elle vaut 0), donc continue par morceaux, et positive sur \mathbb{R}_+^* et :

- pour $x \leq 1$, $\varphi(x) = |\ln x|^k e^{-x} x^{a-1} = |\ln x|^k e^{-x} x^{\frac{a}{2}} x^{\frac{a}{2}-1} = o\left(x^{\frac{a}{2}-1}\right)$ (car $\lim_{x \rightarrow 0} |\ln x|^k e^{-x} x^{\frac{a}{2}} = 0$ par croissances comparées), et l'intégrale de Riemann $\int_0^1 x^{\frac{a}{2}-1} dx$ converge (car $\frac{a}{2}-1 > -1$), donc $\int_0^1 \varphi(x) dx$ converge ;
- pour $x \geq 1$, $\varphi(x) = |\ln x|^k e^{-x} x^{b-1} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (car $\lim_{x \rightarrow +\infty} |\ln x|^k e^{-x} x^{b+1} = 0$ par croissances comparées), et l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ converge, donc $\int_1^{+\infty} \varphi(x) dx$ converge

Ainsi, la fonction φ est intégrable sur \mathbb{R}_+^* .

Tout ceci permet de conclure que Γ est de classe C^∞ sur tout $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$ (avec $a \leq 1 \leq b$), donc :

$$\Gamma \text{ est définie et de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

De plus, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^k e^{-x} x^{s-1} dx$ pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$.

2) Pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, on a en intégrant par parties (on vérifie que toutes les intégrales convergent) :

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s dx = \left[-e^{-x} x^s \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s x^{s-1} e^{-x} dx = s \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

Soit pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\Gamma(s+1) = s \Gamma(s)$$

3) On a $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty}$, donc :

$$\Gamma(1) = 1$$

On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a $\Gamma(m+1) = m \Gamma(m)$. Une récurrence simple permet de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(m) \neq 0$ et on peut alors écrire pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m \geq 2$:

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m)} = m \Rightarrow \prod_{k=1}^{m-1} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k)} = \prod_{k=1}^{m-1} k \Rightarrow \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(1)} = (m-1)! \Rightarrow \Gamma(m) = (m-1)!$$

La relation reste valable pour $m=1$ et ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(m) = (m-1)!$$

On a $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$ et d'après l'exercice 6 :

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}}$$

On a pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(m + \frac{1}{2} + 1\right) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)$.

Avec $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \neq 0$, une récurrence simple permet de prouver que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \neq 0$ et on peut alors écrire pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{\Gamma\left(m + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} = m + \frac{1}{2} \Rightarrow \prod_{k=0}^{m-1} \frac{\Gamma\left(k + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \prod_{k=0}^{m-1} \left(k + \frac{1}{2}\right).$$

Et :

$$\prod_{k=0}^{m-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^m} \prod_{k=0}^{m-1} (2k+1) = \frac{1}{2^m} 1 \times 3 \times \dots \times (2m-3) \times (2m-1) = \frac{1}{2^m} \frac{(2m)!}{2 \times 4 \times \dots \times (2m-2) \times (2m)} = \frac{(2m)!}{2^{2m} m!}.$$

Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \prod_{k=0}^{m-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2m)!}{2^{2m} m!}.$$

La relation reste valable pour $m = 0$ et ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{(2m)!}{2^{2m} m!}}$$

4) En prenant $s = 1$ dans la relation de la question 2, on obtient $\Gamma(2) = \Gamma(1)$.

Or, on a vu que Γ est dérivable sur $]1, 2[$, donc on peut utiliser le théorème de Rolle pour conclure que :

Il existe $\alpha \in]1, 2[$ tel que $\Gamma'(\alpha) = 0$.

On a pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma''(s) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^2 e^{-x} x^{s-1} dx \geq 0$, donc :

Γ' est croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Comme Γ' est croissante sur \mathbb{R}_+^* et s'annule en $\alpha \in]1, 2[$, on a $\Gamma'(s) \leq 0$ sur $]0, \alpha[$ et $\Gamma'(s) \geq 0$ sur $[\alpha, +\infty[$.

Alors :

Γ est décroissante sur $]0, \alpha[$ et croissante sur $[\alpha, +\infty[$.

Pour construire le tableau de variation complet de Γ , il faut déterminer ses limites en 0 et $+\infty$.

On a vu que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(m) = (m-1)!$ donc $\lim_{m \rightarrow +\infty} \Gamma(m) = +\infty$ et la fonction Γ n'est pas bornée au voisinage de $+\infty$. Comme elle croissante sur $[\alpha, +\infty[$, on a :

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \Gamma(s) = +\infty$$

On a vu que pour tout $s \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. Or, Γ est continue sur \mathbb{R}_+^* , donc en 1, d'où :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s+1) = \lim_{x \rightarrow 1} \Gamma(x) = \Gamma(1) = 1.$$

Ainsi, $\lim_{s \rightarrow 0} s\Gamma(s) = 1$, donc :

$$\Gamma(s) \sim \frac{1}{s} \text{ et } \lim_{s \rightarrow 0} \Gamma(s) = +\infty$$

On obtient le tableau :

s	0	α	$+\infty$
Γ	$+\infty$	$\Gamma(\alpha)$	$+\infty$

5) On a :

$$\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x} \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{m} \leq e^{-\frac{x}{m}} \Leftrightarrow g\left(\frac{x}{m}\right) \geq 0$$

avec $g(t) = e^{-t} + t - 1$ et $x \in [0; m]$ pour $\frac{x}{m} \in [0; 1]$.

La fonction g est définie et dérivable sur \mathbb{R} et $g'(t) = 1 - e^{-t}$. Pour tout $t \geq 0$, $g'(t) \geq 0$ donc g est croissante sur \mathbb{R}_+ et $g(0) = 0$, donc g est positive sur \mathbb{R}_+ .

Ainsi, pour tout $x \in [0; m]$, on a $g\left(\frac{x}{m}\right) \geq 0$ et donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; m]$:

$$\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m \leq e^{-x}$$

On a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; m]$:

$$\left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = \exp\left[m \ln\left(1 - \frac{x}{m}\right)\right] = \exp\left[m\left(-\frac{x}{m} + o\left(\frac{x}{m}\right)\right)\right] = e^{-x + \frac{o}{m \rightarrow +\infty}(1)} = e^{-x} + \frac{o}{m \rightarrow +\infty}(1).$$

Donc :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m = e^{-x}$$

6) Pour tout réel $s > 0$ et pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, posons $t = \frac{x}{m}$:

$$\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} dx = \int_0^1 (1-t)^m (mt)^{s-1} m dt = m^s \int_0^1 (1-t)^m t^{s-1} dt.$$

En intégrant par parties, on a :

$$\int_0^1 (1-t)^m t^{s-1} dt = \left[(1-t)^m \frac{t^s}{s} \right]_0^1 - \int_0^1 [-m(1-t)^{m-1}] \frac{t^s}{s} dt = \frac{m}{s} \int_0^1 (1-t)^{m-1} t^s dt.$$

En recommençant plusieurs fois, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1-t)^m t^{s-1} dt &= \frac{m}{s} \int_0^1 (1-t)^{m-1} x^s dx \\ &= \frac{m}{s} \frac{m-1}{s+1} \int_0^1 (1-t)^{m-2} t^{s+1} dt \\ &= \frac{m}{s} \frac{m-1}{s+1} \frac{m-2}{s+2} \int_0^1 (1-t)^{m-3} t^{s+2} dt \\ &\vdots \\ &= \frac{m}{s} \frac{m-1}{s+1} \frac{m-2}{s+2} \dots \frac{m-(m-1)}{s+m-1} \int_0^1 t^{s+m-1} dt \\ &= \frac{m}{s} \frac{m-1}{s+1} \frac{m-2}{s+2} \dots \frac{m-(m-1)}{s+m-1} \frac{1}{s+m} = \frac{m!}{s(s+1)(s+2)\dots(s+m-1)(s+m)} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel $s > 0$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} dx = \frac{m^s m!}{s(s+1)(s+2)\dots(s+m-1)(s+m)}}$$

7) Soit un réel $s > 0$ fixé. Posons pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\gamma(x) = e^{-x} x^{s-1} f_m(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} & \text{pour } x \in [0; m] \\ 0 & \text{pour } x \in [m; +\infty[\end{cases}$$

- Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, f_m est continue sur \mathbb{R}_+ (même en m , où elle vaut 0).
- D'après la question 5, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\lim_{m \rightarrow +\infty} f_m(x) = \gamma(x)$ avec γ continue sur \mathbb{R}_+ .
- A nouveau d'après la question 5, on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0; m]$, $|f_m(x)| = f_m(x) \leq \gamma(x)$.

Ceci reste vrai pour $x \in [m; +\infty[$, donc pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f_m(x)| \leq \gamma(x).$$

Et γ est intégrable sur \mathbb{R}_+ (d'intégrale $\Gamma(s)$).

Alors, on a :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_m(x) dx = \int_0^{+\infty} \gamma(x) dx = \Gamma(s).$$

Or, d'après la question précédente, on a pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^{+\infty} f_m(x) dx = \int_0^m \left(1 - \frac{x}{m}\right)^m x^{s-1} dx = \frac{m! m^s}{s(s+1)\dots(s+m)}.$$

Ainsi, pour tout réel $s > 0$:

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{m! m^s}{s(s+1)\dots(s+m)} = \Gamma(s)$$

8) On pose pour $x \in [1; +\infty[$:

$$\varphi(x) = \int_x^{x+1} \ln(\Gamma(t)) dt = \int_1^{x+1} \ln(\Gamma(t)) dt - \int_1^x \ln(\Gamma(t)) dt.$$

La fonction φ est dérivable sur $[1; +\infty[$ en tant que différence de telles fonctions et pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$\varphi'(x) = \ln(\Gamma(x+1)) - \ln(\Gamma(x)) = \ln\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}\right).$$

Or, d'après la question 2, on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, donc pour tout $x \in [1; +\infty[$:

$$\varphi'(x) = \ln x.$$

Alors, $\varphi'(x) \geq 0$ sur $[1; +\infty[$ avec $\varphi'(x) = 0$ en 1 uniquement, donc φ est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

De plus, avec $\varphi'(x) = \ln x$, il existe une constante C telle que pour tout $x \in [1; +\infty[$, $\varphi(x) = x \ln x - x + C$.

On a alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

D'après la question 4, on a le tableau :

s	1	α	2	$+\infty$
Γ	1		1	$+\infty$

$\Gamma(\alpha)$

D'où le tableau de signes :

s	1	2	$+\infty$
$\ln(\Gamma(s))$	0	-	0

On a alors $\varphi(1) = \int_1^2 \ln(\Gamma(t)) dt < 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$, $\varphi(n) = \int_n^{n+1} \ln(\Gamma(t)) dt > 0$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \varphi(n)$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante, strictement positive à partir du rang 2 et de limite infinie.

Ceci permet de conclure que la série $\sum \frac{(-1)^n}{u_n}$ vérifie le critère spécial des séries alternées à partir du rang 2 et donc que :

$$\text{La série } \sum \frac{(-1)^n}{u_n} \text{ converge.}$$

En posant $u = \sqrt{t}$ (avec $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1 et bijective de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R}_+^*), on a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(\sqrt{t})} = \int_0^{+\infty} \frac{2u}{\text{sh} u} du.$$

L'intégrale est impropre en 0 et $+\infty$.

- Comme $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sh} u}{u} = 1$, la fonction $u \mapsto \frac{2u}{\text{sh} u}$ se prolonge par continuité en 0, donc $\int_0 \frac{2u}{\text{sh} u} du$ converge.
- On a $\frac{2u}{\text{sh} u} \underset{u \rightarrow +\infty}{\sim} 4u e^{-u}$, $4u e^{-u} = \underset{u \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{u^2} \right)$ (par croissances comparées) et l'intégrale de Riemann $\int \frac{du}{u^2}$ converge, donc $\int_0^{+\infty} \frac{2u}{\text{sh} u} du$ converge.

Finalement, $\int_0^{+\infty} \frac{2u}{\text{sh} u} du$ converge, donc :

$$\text{L'intégrale } I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{sh}(\sqrt{t})} \text{ existe bien.}$$

On a :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2u}{\text{sh} u} du = 4 \int_0^{+\infty} \frac{u e^{-u}}{1 - e^{-2u}} du.$$

Or, pour tout $u \in \mathbb{R}_+^*$, $0 < e^{-2u} < 1$, donc $\frac{1}{1 - e^{-2u}} = \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-2nu}$ et ainsi :

$$I = 4 \int_0^{+\infty} \left(u e^{-u} \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{-2nu} \right) du = 4 \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} u e^{-(2n+1)u} \right) du = 4 \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(u) \right) du$$

avec $f_n(u) = u e^{-(2n+1)u}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathbb{R}_+^*$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur \mathbb{R}_+^* (car définie et continue en 0 et $f_n(u) = \underset{u \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{u^2} \right)$).
- La série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction $f : u \mapsto \frac{u e^{-u}}{1 - e^{-2u}}$, continue, donc continue par morceaux, sur \mathbb{R}_+^* .
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n| = f_n$ et :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(u)| du = \int_0^{+\infty} f_n(u) du = \int_0^{+\infty} u e^{-(2n+1)u} du.$$

Les fonctions $u \mapsto u$ et $u \mapsto -\frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)u}$ sont de classe C^1 sur \mathbb{R}_+ et une intégration par parties donne, pour tout $A \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} \int_0^A u e^{-(2n+1)u} du &= \left[-\frac{u}{2n+1} e^{-(2n+1)u} \right]_0^A - \int_0^A \left(-\frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)u} \right) du = -\frac{A}{2n+1} e^{-(2n+1)A} + \frac{1}{2n+1} \int_0^A e^{-(2n+1)u} du \\ &= -\frac{A}{2n+1} e^{-(2n+1)A} + \frac{1}{2n+1} \left[-\frac{1}{2n+1} e^{-(2n+1)u} \right]_0^A = -\frac{A}{2n+1} e^{-(2n+1)A} - \frac{1}{(2n+1)^2} e^{-(2n+1)A} + \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Quand $A \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} |f_n(u)| du = \int_0^{+\infty} f_n(u) du = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Et donc, la série $\sum \int_0^{+\infty} |f_n|$ converge (car $\frac{1}{(2n+1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge).

On peut alors écrire :

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(u) \right) du = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_0^{+\infty} f_n(u) du = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Or :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} = \frac{3}{4} \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Avec $I = 4 \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(u) \right) du$, on obtient finalement :

$$\boxed{I = \frac{\pi^2}{2}}$$

Exercice 10

1) On a $f(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \lambda t^\alpha$, donc $\frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \lambda t^{x+\alpha}$ et $\int_0^1 t^{x+\alpha} dt$ converge si et seulement si $x+\alpha+1 > 0$, donc

$\int_0^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt$ converge si et seulement si $x+\alpha+1 > 0$, soit $x > -\alpha-1$.

Comme f est continue en 1, on a $\frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} \frac{f(1)}{\sqrt{1-t}}$ quand $f(1) \neq 0$ et $\frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} \underset{t \rightarrow 1}{\sim} o\left(\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ quand $f(1) = 0$.

Comme $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ converge, dans les deux cas, l'intégrale $\int_0^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt$ converge quel que soit x .

Finalement, $\int_0^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt$ converge si et seulement si $x > -\alpha-1$ et donc :

La fonction g est définie sur $] -\alpha-1, +\infty[$.

2) Remarquons déjà que $|f|$ est continue $]0,1[$ et vérifie $|f(t)| \underset{t \rightarrow 0}{\sim} |\lambda| t^\alpha$, donc on prouve comme plus haut que

$\int_0^1 \frac{t^x |f(t)|}{\sqrt{1-t}} dt$ converge si et seulement si $x > -\alpha-1$ et dans ce cas, $t \mapsto \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}}$ est intégrable sur $]0,1[$.

Soit $h : (x,t) \mapsto \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} = \frac{e^{x \ln t} f(t)}{\sqrt{1-t}}$, définie sur $] -\alpha-1, +\infty[\times]0,1[$.

- Pour tout $x \in] -\alpha-1, +\infty[$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $]0,1[$ (car f l'est).
- Pour tout $t \in]0,1[$, $x \mapsto h(x,t)$ est continue sur $] -\alpha-1, +\infty[$ (car $x \mapsto e^{x \ln t}$ l'est).
- Soit $a \in] -\alpha-1, +\infty[$. Pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times]0,1[$, on a :

$$|h(x,t)| = \frac{t^x |f(t)|}{\sqrt{1-t}} \leq \frac{t^a |f(t)|}{\sqrt{1-t}}.$$

On a vu plus haut que $t \mapsto \frac{t^a |f(t)|}{\sqrt{1-t}}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.

Tout ceci permet de conclure que g est continue sur $[a, +\infty[$, et ceci pour tout $a \in]-\alpha-1, +\infty[$, donc :

$$\boxed{g \text{ est continue sur }]-\alpha-1, +\infty[.}$$

3) On reprend les notations de la question précédente.

- Pour tout $x \in]-\alpha-1, +\infty[$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,1[$.
- Pour tout $t \in]0,1[$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $]-\alpha-1, +\infty[$ (car $x \mapsto e^{x \ln t}$ l'est), avec :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{t^x \ln t f(t)}{\sqrt{1-t}}.$$

- Pour tout $x \in]-\alpha-1, +\infty[$, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, sur $]0,1[$.
- Soit $a \in]-\alpha-1, +\infty[$. Pour tout $(x,t) \in [a, +\infty[\times]0,1[$, on a :

$$\left| \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) \right| = -\frac{t^x \ln t |f(t)|}{\sqrt{1-t}} \leq -\frac{t^a \ln t |f(t)|}{\sqrt{1-t}} = \varphi(t).$$

La fonction φ est positive et continue par morceaux sur $]0,1[$.

De plus, comme \ln est continue en 1, on montre comme plus haut que $\int_0^1 \varphi(t) dt$ converge.

Enfin, on a :

$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} -|\lambda| t^{a+\alpha} \ln t = -|\lambda| t^{\frac{a+\alpha-1}{2}} t^{a+\alpha-\frac{a+\alpha-1}{2}} \ln t.$$

Comme $-1 < \frac{a+\alpha-1}{2} < a+\alpha$, on a $a+\alpha - \frac{a+\alpha-1}{2} > 0$, donc $\lim_{t \rightarrow 0} t^{a+\alpha-\frac{a+\alpha-1}{2}} \ln t = 0$ et $\varphi(t) = o_{t \rightarrow 0}(t^{(a+\alpha-1)/2})$.

Or, l'intégrale $\int_0^1 t^{(a+\alpha-1)/2} dt$ converge (car $\frac{a+\alpha-1}{2} > -1$), donc $\int_0^1 \varphi(t) dt$ converge et ainsi, φ est intégrable sur $]0,1[$.

Tout ceci permet de conclure que g est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$, et ceci pour tout $a \in]-\alpha-1, +\infty[$, donc :

$$\boxed{g \text{ est de classe } C^1 \text{ sur }]-\alpha-1, +\infty[.}$$

4) Sur le segment $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, f est continue donc bornée, et il existe $M \geq 0$ tel que $|f(t)| \leq M$ pour tout $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Soit $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$. Pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a :

$$g(x) = \int_0^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt = \int_0^{1-\varepsilon^2} \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt + \int_{1-\varepsilon^2}^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt.$$

Avec $t^x \leq 1$ pour tout $t \in [1-\varepsilon^2, 1]$ (car $x > 0$) et $[1-\varepsilon^2, 1] \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, on a alors :

$$\left| \int_{1-\varepsilon^2}^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt \right| \leq \int_{1-\varepsilon^2}^1 \frac{t^x |f(t)|}{\sqrt{1-t}} dt \leq \int_{1-\varepsilon^2}^1 \frac{M}{\sqrt{1-t}} dt = 2M\varepsilon.$$

Si de plus, $x > -\alpha + 1$, on peut poser $x = -\alpha + 1 + h$ et :

$$\left| \int_0^{1-\varepsilon^2} \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt \right| \leq \int_0^{1-\varepsilon^2} \frac{t^x |f(t)|}{\sqrt{1-t}} dt = \int_0^{1-\varepsilon^2} \frac{t^{-\alpha+1+h} |f(t)|}{\sqrt{1-t}} dt = \int_0^{1-\varepsilon^2} t^h \frac{t^{-\alpha+1} |f(t)|}{\sqrt{1-t}} dt \leq (1-\varepsilon^2)^h \int_0^{1-\varepsilon^2} \frac{t^{-\alpha+1} |f(t)|}{\sqrt{1-t}} dt.$$

Or, quand $x \rightarrow +\infty$, $h \rightarrow +\infty$ et $(1-\varepsilon^2)^h \rightarrow 0$ (car $0 < 1-\varepsilon^2 < 1$), donc il existe $A > 0$ tel que pour tout $x \geq A$, on a :

$$(1-\varepsilon^2)^h \int_0^{1-\varepsilon^2} \frac{t^{-\alpha+1} |f(t)|}{\sqrt{1-t}} dt \leq \varepsilon.$$

Finalement, pour tout $\varepsilon \in \left]0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ (donc pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$), il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geq A$:

$$|g(x)| \leq \left| \int_0^{1-\varepsilon^2} \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt \right| + \left| \int_{1-\varepsilon^2}^1 \frac{t^x f(t)}{\sqrt{1-t}} dt \right| \leq \varepsilon + 2M\varepsilon = (1+2M)\varepsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0}$$