

Corrigés des TD du chapitre 2
Exercice 1

1) On a $\frac{\|y-x\|}{\|x\|} \leq a$, soit $\|y-x\| \leq a\|x\|$. En écrivant $x = x - y + y$, on obtient :

$$\|y-x\| \leq a\|x-y+y\| \leq a\|x-y\| + a\|y\| \Rightarrow (1-a)\|y-x\| \leq a\|y\|.$$

Et comme $a \in [0,1[$, on a $1-a > 0$, donc, avec aussi $\|y\| > 0$:

$$\frac{\|y-x\|}{\|y\|} \leq \frac{a}{1-a}$$

2) Remarquons que dans la formule désirée, x et y jouent le même rôle, donc quitte à intervertir les deux vecteurs, on peut supposer que $0 < \|x\| \leq \|y\|$ (donc $\max(\|x\|, \|y\|) = \|y\|$).

Posons alors $k = \frac{\|x\|}{\|y\|}$ (on a donc $0 < k \leq 1$), $u = \frac{x}{\|x\|}$ et $v = \frac{y}{\|y\|}$ (on a donc $\|u\| = \|v\| = 1$).

Le résultat voulu se réécrit alors : $\|u-v\| \leq 2 \frac{\|x-y\|}{\|y\|} = 2\|ku-v\|$. On a :

$$\|u-v\| = \|u-ku+ku-v\| \leq \|u-ku\| + \|ku-v\| = \|(1-k)u\| + \|ku-v\|.$$

Et comme $\|u\| = 1$ et $1-k \geq 0$, on a :

$$\|u-v\| \leq 1-k + \|ku-v\|.$$

Enfin, d'après l'« autre » inégalité triangulaire : $|\|ku\| - \|v\|| \leq \|ku-v\|$. Avec $\|u\| = \|v\| = 1$, on obtient :

$$1-k = |k-1| \leq \|ku-v\|.$$

Finalement, on obtient :

$$\|u-v\| \leq 1-k + \|ku-v\| \leq 2\|ku-v\|.$$

Soit :

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x-y\|}{\max(\|x\|, \|y\|)}$$

Exercice 2

Les preuves que N_1 , N_∞ et N sont des normes sur E se font exactement comme celles faites dans le cours pour les deux premières normes usuelles sur \mathbb{K}^p (le fait que le nombre $n+1$ de composantes varie ne change pas la preuve) et pour la norme infinie sur $C([a,b], \mathbb{R})$ avec $[a,b] = [0,1]$ (en remarquant que les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R} et que si un polynôme s'annule en tout point de $[0,1]$, alors il admet une infinité de racines, donc il est nul).

Soit $P = X^n + \dots + X + 1$. On a $N_\infty(P) = 1$ et $N_1(P) = N(P) = n + 1$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_1(P)}{N_\infty(P)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(P)}{N_\infty(P)} = +\infty.$$

Ainsi, il n'existe pas de réel $a > 0$ tel que $N_1 \leq aN_\infty$ ou $N \leq aN_\infty$, et donc :

N_∞ n'est équivalente ni à N_∞ , ni à N .

Soit maintenant $P = (1 - X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k X^k$. On a $N_1(P) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ et $N(P) = 1$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N_1(P)}{N(P)} = +\infty.$$

Ainsi, il n'existe pas de réel $a > 0$ tel que $N_1 \leq aN$:

N_1 et N ne sont pas équivalentes.

Exercice 3

On a vu dans le cours que si u est un isomorphisme de \mathbb{K}^p dans E , alors $x \mapsto \|u(x)\|$ est une norme sur \mathbb{K}^p et dans la preuve, l'aspect bijectif n'est utilisé que pour prouver la séparation.

On prouve donc exactement comme dans le cours que $N : x \mapsto \|u(x)\|$ est une application de F dans \mathbb{R}_+ vérifiant la propriété d'homogénéité et l'inégalité triangulaire. De plus, pour tout $x \in F$, on a :

$$N(x) = 0 \Leftrightarrow \|u(x)\| = 0 \Leftrightarrow u(x) = 0.$$

Et pour que $u(x) = 0$ soit équivalent à $x = 0$, il est nécessaire et suffisant que u soit injective.

Ainsi :

L'application $N : x \mapsto \|u(x)\|$ est une norme sur F si et seulement si u est injective.

Exercice 4

On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} (e^t - t - 2) = +\infty$, donc pour tout réel k assez grand, $e^k - k - 2$ est positif. La fonction constante $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto k$ appartient alors à A et a pour norme $\|f\|_\infty = k$.

Ainsi, on peut trouver $f \in A$ de norme aussi grande que l'on veut, ce qui veut dire que :

A n'est pas bornée.

Soit maintenant $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A convergeant vers $f \in E$. On a donc $\|f_n - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty.$$

Donc, pour $x \in [0, 1]$ fixé, $f_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$.

De plus, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in A$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $2 + f_n(x) \leq e^{f_n(x)}$ et en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient pour tout $x \in [0,1]$: $2 + f(x) \leq e^{f(x)}$ et ainsi, $f \in A$.

Ceci prouve que :

A est fermée.

Finalement :

A est une partie fermée et non bornée de E .

Exercice 5

1) On a $A \subset \bar{A}$ donc $E \setminus \bar{A} \subset E \setminus A$ et, comme, \bar{A} est fermé, $E \setminus \bar{A}$ est un ouvert inclus dans $E \setminus A$.

Soit un ouvert O inclus dans $E \setminus A$. On a $O \subset E \setminus A$, donc : $E \setminus (E \setminus A) = A \subset E \setminus O$.

Or, $E \setminus O$ est fermé, c'est donc un fermé contenant A . Comme \bar{A} est le plus petit fermé contenant A , on a $\bar{A} \subset E \setminus O$ et donc : $O \subset E \setminus \bar{A}$. Ainsi, tout ouvert O inclus dans $E \setminus A$ est inclus dans $E \setminus \bar{A}$.

Finalement, $E \setminus \bar{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans $E \setminus A$, soit :

$$E \setminus \bar{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}$$

Si on remplace A par $E \setminus A$ dans la relation ci-dessus, on obtient : $E \setminus \overline{E \setminus A} = \overset{\circ}{E \setminus (E \setminus A)} = \overset{\circ}{A}$.

En passant aux complémentaires, on obtient immédiatement :

$$\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$$

2) Pour tout $a \in \bar{A}$, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a . Or, les éléments de A sont dans B , donc il existe une suite d'éléments de B qui converge vers a . Ceci prouve que $a \in \bar{B}$ et ainsi :

$$\bar{A} \subset \bar{B}$$

Si $A \subset B$, alors $E \setminus B \subset E \setminus A$, et d'après ce qui précède : $\overline{E \setminus B} \subset \overline{E \setminus A}$.

D'après la question précédente : $\overset{\circ}{E \setminus B} \subset \overset{\circ}{E \setminus A}$.

En passant aux complémentaires, on obtient immédiatement :

$$\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$$

3) On a $A \cap B \subset A$, donc d'après le résultat ci-dessus : $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A}$. De même, $\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{B}$ et donc :

$$\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$$

Soit maintenant $a \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Il existe alors $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $B(a, r_1) \subset A$ et $B(a, r_2) \subset B$.

En posant $r = \min(r_1, r_2) > 0$, on a $B(a, r) \subset B(a, r_1) \subset A$ et $B(a, r) \subset B(a, r_2) \subset B$, donc $B(a, r) \subset A \cap B$.

Ceci prouve que $a \in \overset{\circ}{A \cap B}$ et ceci étant vrai pour tout $a \in \overset{\circ}{A \cap B}$, on a :

$$\overset{\circ}{A \cap B} \subset \overset{\circ}{A \cap B}.$$

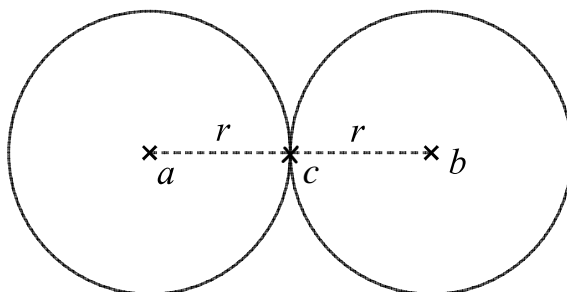
Finalement, on bien :

$$\boxed{\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A \cap B}}$$

4) On a $A \cap B \subset A$, donc d'après la question 2 : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A}$. De même, $\overline{A \cap B} \subset \overline{B}$ et ainsi :

$$\boxed{\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}}$$

Soit $a, b \in E$ tels que $a \neq b$. Posons $r = \frac{\|a-b\|}{2}$, $A = B(a, r)$ et $B = B(b, r)$.



On a $A \cap B = \emptyset$ (si $x \in A \cap B$, on a $2r = \|a-b\| = \|a-x+x-b\| \leq \|a-x\| + \|x-b\| < r+r = 2r$: absurde), donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$, mais $\overline{A \cap B} = \overline{B}(a, r) \cap \overline{B}(b, r) = \{c\}$ avec $c = \frac{1}{2}(a+b)$, donc :

L'inclusion réciproque n'est pas forcément vraie.

Exercice 6

Soient a et b deux éléments de \overline{C} et un réel $\lambda \in [0, 1]$.

Il existe deux suites de C , $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a et b respectivement.

Comme C est convexe, $\lambda a_n + (1-\lambda)b_n \in C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\lambda a_n + (1-\lambda)b_n) = \lambda a + (1-\lambda)b \in \overline{C}.$$

Ainsi :

\overline{C} est convexe.

Soient a et b deux éléments de $\overset{\circ}{C}$ (donc de C aussi).

Comme a et b sont intérieurs à C , il existe deux réels $r_1 > 0$ et $r_2 > 0$ tels que $B(a, r_1) \subset C$ et $B(b, r_2) \subset C$.

En posant $r = \min(r_1, r_2) > 0$, on a $B(a, r) \subset B(a, r_1) \subset C$ et $B(b, r) \subset B(b, r_2) \subset C$.

Soit maintenant $t \in [0,1]$ et $c = ta + (1-t)b$. Posons :

$$A = \{tx + (1-t)y, (x, y) \in B(a, r) \times B(b, r)\}.$$

Pour tout $(x, y) \in B(a, r) \times B(b, r)$, on a $(x, y) \in C^2$, donc $tx + (1-t)y \in C$ (car C est convexe). Ainsi :

$$\underline{A \subset C}.$$

Prouvons que $A = B(c, r)$.

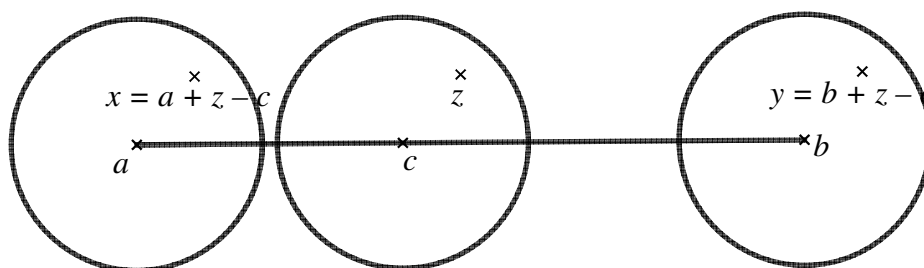
Soit $(x, y) \in B(a, r) \times B(b, r)$. On a $\|x - a\| < r$, $\|y - b\| < r$ et :

$$\|tx + (1-t)y - c\| = \|t(x - a) + (1-t)(y - b)\| \leq t\|x - a\| + (1-t)\|y - b\| < tr + (1-t)r = r.$$

Donc, $tx + (1-t)y \in B(c, r)$ et ainsi : $\underline{A \subset B(c, r)}$.

Soit maintenant $z \in B(c, r)$.

On considère les vecteurs $x = a + z - c$ et $y = b + z - c$ comme sur le schéma ci-dessous :



On a :

$$\left. \begin{array}{l} \|x - a\| = \|a + z - c - a\| = \|z - c\| < r \Rightarrow x \in B(a, r) \\ \|y - b\| = \|b + z - c - b\| = \|z - c\| < r \Rightarrow y \in B(b, r) \end{array} \right\} \Rightarrow tx + (1-t)y \in A.$$

Or :

$$tx + (1-t)y = t(a + z - c) + (1-t)(b + z - c) = ta + (1-t)b + t(z - c) + (1-t)(z - c) = c + z - c = z.$$

Donc, $z \in A$ et ainsi : $\underline{B(c, r) \subset A}$.

Finalement, on a bien :

$$\underline{A = B(c, r)}.$$

En résumé, on vient de prouver que pour tout $t \in [0,1]$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(ta + (1-t)b, r) \subset C$,

autrement dit, pour tout $t \in [0,1]$, $ta + (1-t)b \in \overset{\circ}{C}$.

Donc, pour tous $a, b \in \overset{\circ}{C}$, $[a, b] \subset \overset{\circ}{C}$, ce qui prouve que :

$\overset{\circ}{C}$ est convexe.

Exercice 7

1) Comme on a bien lu l'énoncé jusqu'au bout, on a repéré la question 7.a. que l'on résout maintenant.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$.

Si on pose $AB = (c_{i,j})$, on a $\|AB\|_\infty = \max_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} |c_{i,j}|$ et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$|c_{i,j}| = \left| \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{i,k}| |b_{k,j}| \leq \sum_{k=1}^n \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty = n \cdot \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty.$$

Donc :

$$\|AB\|_\infty \leq n \cdot \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty.$$

Si on pose maintenant pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = n \cdot \|A\|_\infty$, $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $A \mapsto \|A\|_\infty$ en est une et $n > 0$. On a de plus, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|AB\| = n \cdot \|AB\|_\infty \leq n(n \cdot \|A\|_\infty \cdot \|B\|_\infty) = (n \cdot \|A\|_\infty)(n \cdot \|B\|_\infty) = \|A\| \cdot \|B\|.$$

Ainsi :

Il existe bien une norme $\|\cdot\|$ de E telle que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

2) Soit $A \in E$. Une récurrence immédiate permet de prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Or, si $\|A\| < 1$, on a $\|A\|^k \rightarrow 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, $\|A^k\| \rightarrow 0$ et ainsi :

$$\|A\| < 1 \Rightarrow A^k \rightarrow 0_n$$

Posons $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_2$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

On a $\|A\|_\infty = \|B\|_\infty = 2$, donc $\|A\| = \|B\| = 4$ et :

- pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = 2^k I_2$ donc $\|A^k\| \rightarrow +\infty$ et la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de limite ;
- $B^2 = \frac{1}{2} I_2$ donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $B^{2k} = \frac{1}{2^k} I_2$ et $B^{2k+1} = \frac{1}{2^k} B$. On a alors $\|B^k\| \rightarrow 0$, donc $B^k \rightarrow 0_n$.

Ainsi :

Si $\|A\| \geq 1$, on ne peut pas conclure quant à la limite de $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$.

3) Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $S_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$), avec pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = (a_{k,i,j})$, qui converge vers $A = (a_{i,j})$. Comme $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, on a convergence coefficient par coefficient, donc pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{k,i,j} \rightarrow a_{i,j}$ et $a_{k,j,i} \rightarrow a_{j,i}$. Or, $a_{k,j,i} = a_{k,i,j}$ (resp. $a_{k,j,i} = -a_{k,i,j}$), donc en passant à la limite quand $k \rightarrow +\infty$, on obtient $a_{j,i} = a_{i,j}$ (resp. $a_{j,i} = -a_{i,j}$) et ceci, pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

Ainsi, A est symétrique (resp. A est antisymétrique), donc :

$S_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont fermés dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

D'une part, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ est fermé donc :

$$M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}).$$

D'autre part, $(A^2)^\top = (A^\top)^2 = (-A)^2 = A^2$, donc $A^2 \in S_n(\mathbb{R})$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{2k} \in S_n(\mathbb{R})$ et $A^{2k} \rightarrow M$, donc, comme $S_n(\mathbb{R})$ est fermé :

$$M \in S_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \cap S_n(\mathbb{R}) = \{0_n\}$, soit $M = 0_n$ et finalement :

Si $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, la seule limite possible de la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est 0_n .

4) On a $\mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} > 0\}$. On a alors :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) = \{A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \exists (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \leq 0\}.$$

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = (a_{k,i,j})$ et $A = (a_{i,j})$. On a :

$$A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{k,i,j} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a_{i,j}.$$

Comme les matrices A_k possèdent toutes n^2 coefficients, il existe $(i_0, j_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ et une suite extraite $(A_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{\varphi(k), i_0, j_0} \leq 0$ et :

$$a_{i_0, j_0} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{k, i_0, j_0} = \lim_{k \rightarrow +\infty} a_{\varphi(k), i_0, j_0} \leq 0.$$

Ainsi, il existe $(i_0, j_0) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $a_{i_0, j_0} \leq 0$ et donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$.

Ceci prouve que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est fermé, donc que :

$\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de E .

5) La trace est une forme linéaire sur E , donc l'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un hyperplan H de E . Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de H convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k = (a_{k,i,j})$ et $A = (a_{i,j})$. On a :

$$A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A \Leftrightarrow \forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{k,i,j} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a_{i,j}.$$

Comme pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k \in H$, on a $\sum_{i=1}^n a_{k,i,i} = 0$ et en passant à la limite quand $k \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n a_{k,i,i} = \sum_{i=1}^n a_{i,i} = 0.$$

Donc, $A \in H$ et H est fermé.

Soit M une éventuelle matrice de l'intérieur de H . Il existe alors une boule ouverte B de centre M et de rayon r incluse dans H . Alors, si on pose $N = M + \frac{r}{2\|E_{1,1}\|} E_{1,1}$ où $E_{1,1}$ est la première matrice de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\|N - M\| = \frac{r}{2} < r$, donc $N \in B \subset H$.

Or, H est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc si N et M sont dans H , alors $E_{1,1} = \frac{2\|E_{1,1}\|}{r}(N - M) \in H$. Ceci est absurde car $\text{Tr}(E_{1,1}) = 1 \neq 0$ donc $E_{1,1} \notin H$. Ainsi, l'existence d'un élément de l'intérieur de H mène à une absurdité, donc H est d'intérieur vide et, finalement :

L'ensemble des matrices de trace nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est fermé, d'intérieur vide.

6) En remplaçant $a_{i,j} \leq 0$ par $0 \leq a_{i,j} \leq 1$, on démontre exactement comme dans la question 4 que $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de E .

De plus, pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $\|A\|_\infty$ est l'un des coefficients de A , donc $\|A\|_\infty \in [0, 1]$ et ainsi, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de E .

Enfin, soient $A, B \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ avec $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$, et $\lambda \in [0, 1]$.

On a $\lambda \geq 0$ et $1 - \lambda \geq 0$, donc, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\begin{cases} 0 \leq a_{i,j} \leq 1 \\ 0 \leq b_{i,j} \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \lambda a_{i,j} \leq \lambda \\ 0 \leq (1 - \lambda) b_{i,j} \leq 1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow 0 \leq \lambda a_{i,j} + (1 - \lambda) b_{i,j} \leq 1.$$

Les $\lambda a_{i,j} + (1 - \lambda) b_{i,j}$ étant les coefficients de $\lambda A + (1 - \lambda) B$, on a $\lambda A + (1 - \lambda) B \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ et donc, $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie convexe de E . Finalement :

$\mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ est une partie convexe, fermée et bornée de E .

7) a. On l'a fait plus haut.

b. Une récurrence immédiate permet de prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\|_\infty \leq n^{k-1} \cdot \|A\|_\infty^k$.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = (a_{k,i,j})$. On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, |a_{k,i,j}| \leq \|A^k\|_\infty \leq n^{k-1} \cdot \|A\|_\infty^k \Rightarrow \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} |a_{k,i,j}| \leq |a_{0,i,j}| + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} n^{k-1} \cdot \|A\|_\infty^k.$$

Or, $\sum_{k=1}^p \frac{1}{k!} n^{k-1} \cdot \|A\|_\infty^k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^p \frac{(n \cdot \|A\|_\infty)^k}{k!}$ et la série exponentielle $\sum \frac{(n \cdot \|A\|_\infty)^k}{k!}$ converge. La série $\sum \frac{1}{k!} a_{k,i,j}$ est alors absolument convergente, donc convergente.

Comme pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A_p = \left(\sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} a_{k,i,j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2}$ et toutes les suites $\left(\sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} a_{k,i,j} \right)_{p \in \mathbb{N}}$ convergent :

La suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ converge.

c. Soit $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

En posant $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $A = aI_2 + N$, avec $N^2 = 0_2$ donc $N^k = 0_2$ pour tout entier $k \geq 2$.

Comme I_2 et N commutent, on peut utiliser la formule du binôme de Newton, soit pour tout entier $p \geq 2$:

$$A^p = (aI_2 + N)^p = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} (aI_2)^{p-k} N^k = \binom{p}{0} (aI_2)^p + \binom{p}{1} (aI_2)^{p-1} N = a^p I_2 + pa^{p-1} N.$$

Remarquons que cette formule reste valable pour $p = 0$ (en prenant ici $a^0 = 1$ même quand $a = 0$) et $p = 1$.

Alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} A_p &= \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} (a^k I_2 + ka^{k-1} N) = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} a^k I_2 + \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} ka^{k-1} N \\ &= \left(\sum_{k=0}^p \frac{a^k}{k!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=1}^p \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} \right) N = \left(\sum_{k=0}^p \frac{a^k}{k!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{p-1} \frac{a^k}{k!} \right) N \end{aligned}$$

Et donc :

$$\exp(A) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) I_2 + \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a^k}{k!} \right) N = e^a (I_2 + N).$$

Soit :

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \Rightarrow \exp(A) = \begin{pmatrix} e^a & e^a \\ 0 & e^a \end{pmatrix}}$$

Soit $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$ avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On a alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = \text{diag}(a_1^p, \dots, a_n^p)$ et :

$$A_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} A^k = \sum_{k=0}^p \frac{1}{k!} \text{diag}(a_1^k, \dots, a_n^k) = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^p \frac{a_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^p \frac{a_n^k}{k!} \right).$$

Donc :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k = \text{diag} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_1^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_n^k}{k!} \right).$$

Soit :

$$\boxed{A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n) \Rightarrow \exp(A) = \text{diag}(e^{a_1}, \dots, e^{a_n})}$$

Exercice 8

1) On a $a_0 = \inf_{P \in E_0} N(P)$ où E_0 est l'ensemble des polynômes constants et unitaires, soit $E_0 = \{1\}$.

Ainsi, $a_0 = N(1)$, soit :

$$\boxed{a_0 = 1}$$

On a $a_1 = \inf_{P \in E_1} N(P)$ où E_1 est l'ensemble des polynômes de degré 1 et unitaires, soit $E_0 = \{X - a, a \in \mathbb{R}\}$.

Or, pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$N(X - a) = \sup_{t \in [0,1]} |t - a| = \begin{cases} \sup_{t \in [0,1]} |t - a| = 1 - a & a \leq \frac{1}{2} \\ \sup_{t \in [0,1]} |t - a| = a & a \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} a \leq \frac{1}{2} \Rightarrow N(P) \geq \frac{1}{2} \\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow N(P) = \frac{1}{2} \\ a \geq \frac{1}{2} \Rightarrow N(P) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Donc :

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in E_n$, $N(P) \geq 0$, donc :

$$a_n = \inf_{P \in E_n} N(P) \geq 0$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $P \in E_n$, on a $XP \in E_{n+1}$ et :

$$\forall t \in [0,1], |tP(t)| = t|P(t)| \leq |P(t)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| = N(P) \Rightarrow N(XP) = \sup_{x \in [0,1]} |xP(x)| \leq N(P).$$

Or, $XP \in E_{n+1}$ donc $a_{n+1} = \inf_{Q \in E_{n+1}} N(Q) \leq N(XP)$ et ainsi :

$$\forall P \in E_n, a_{n+1} \leq N(P) \Rightarrow a_{n+1} \leq \inf_{P \in E_n} N(P) = a_n.$$

Ceci prouve que :

La suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

On a vu que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par 0. Comme elle est décroissante, elle converge, et toute suite extraite converge vers la même limite.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P = [X(X-1)]^n$. On a $P \in E_{2n}$ et pour tout $t \in [0,1]$:

$$|P(t)| = [t(1-t)]^n.$$

Or, sur $[0,1]$, $t \mapsto t(1-t) = t - t^2$ admet $\frac{1}{4}$ pour maximum, atteint en $\frac{1}{2}$, donc :

$$N(P) = \sup_{t \in [0,1]} |P(t)| = \frac{1}{4^n}.$$

Et comme $P \in E_{2n}$, on a :

$$a_{2n} = \inf_{Q \in E_{2n}} N(Q) \leq N(P) = \frac{1}{4^n}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

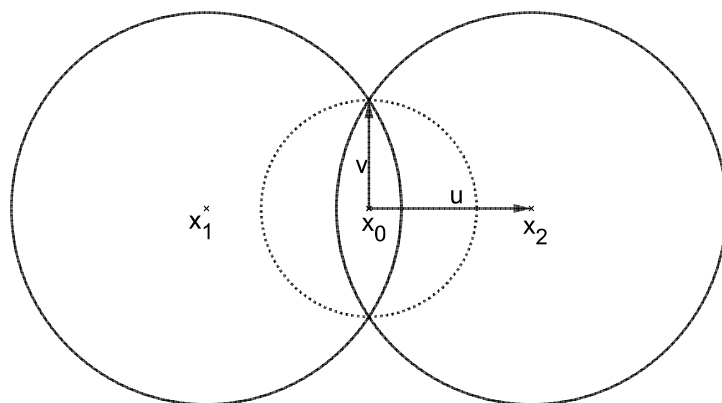
$$0 \leq a_{2n} \leq \frac{1}{4^n}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 0$ et donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$$

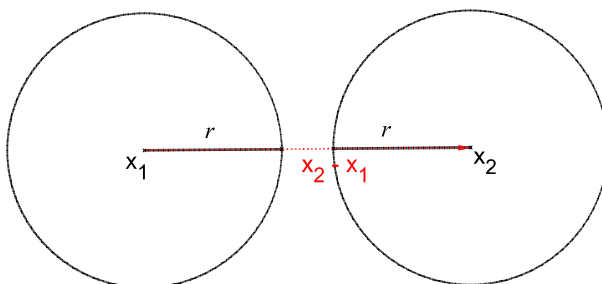
Exercice 9

1) Commençons par faire un dessin en dimension 2 :

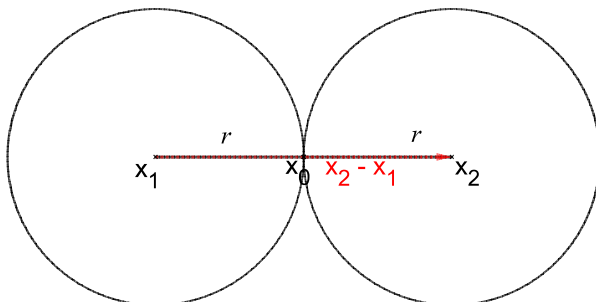


Posons $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ et $u = x_2 - x_0 = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$.

Si $\|x_2 - x_1\| > 2r$, soit $\|u\| > r$ (comme sur la figure ci-dessous), on a $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, donc toutes les boules contiennent $B_1 \cap B_2$ et $r_{\min} = 0$.



Si $\|x_2 - x_1\| = 2r$, soit $\|u\| = r$ (comme sur la figure ci-dessous), on a $B_1 \cap B_2 = \{x_0\}$, donc toutes les boules de centre x_0 contiennent $B_1 \cap B_2$ et $r_{\min} = 0$.



Si $\|x_2 - x_1\| < 2r$, soit $\|u\| < r$ (comme sur la figure ci-dessous), on est dans la situation du premier dessin.

Soit $x \in B_1 \cap B_2$ et posons $v = x - x_0$.

On a :

$$\begin{aligned}\|x - x_1\| &= \|x_0 + v - x_1\| = \|v + u\| \leq r \\ \|x - x_2\| &= \|x_0 + v - x_2\| = \|v - u\| \leq r\end{aligned}$$

Alors, l'identité du parallélogramme donne :

$$2(\|v\|^2 + \|u\|^2) = \|v + u\|^2 + \|v - u\|^2 \leq 2r^2 \Rightarrow \|v\|^2 \leq r^2 - \|u\|^2.$$

Rappelons qu'ici $\|u\| < r$, donc $\rho = \sqrt{r^2 - \|u\|^2}$ est défini et strictement positif et ainsi, pour tout $x \in B_1 \cap B_2$, on a $\|x - x_0\| = \|v\| \leq \rho$, donc $x \in \bar{B}(x_0, \rho)$. Ceci permet de conclure que :

$$B_1 \cap B_2 \subset \bar{B}(x_0, \rho) \text{ avec } \rho = \sqrt{r^2 - \left\| \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \right\|^2}.$$

Soit maintenant une boule $\bar{B}(z, R)$ contenant $B_1 \cap B_2$.

Considérons un vecteur v , orthogonal à u et tel que $\|v\| = \rho$ et posons $x = x_0 + v$ et $x' = x_0 - v$.

On a :

$$x - x_1 = x_0 - x_1 + v = v + u \Rightarrow \|x - x_1\|^2 = \|v + u\|^2 = \|v\|^2 + \|u\|^2 = \rho^2 + \|u\|^2 = r^2.$$

Donc, $\|x - x_1\| = r$ et $x \in B_1$.

Avec $x - x_1 = v - u$, on a de même $x \in B_2$ (avec $x - x_1 = v - u$) donc :

$$x \in B_1 \cap B_2 \subset \bar{B}(z, R).$$

Alors, avec $\|x - x_0\| = \|v\| = \rho$:

$$\|x - z\|^2 = \|x - x_0 + x_0 - z\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x_0 - z\|^2 + 2(x - x_0 | x_0 - z) = \rho^2 + \|x_0 - z\|^2 + 2(x - x_0 | x_0 - z) \leq R^2.$$

Donc :

$$\rho^2 \leq R^2 - \|x_0 - z\|^2 - 2(x - x_0 | x_0 - z) \leq R^2 - 2(x - x_0 | x_0 - z) = R^2 - 2(v | x_0 - z).$$

On prouve de même que $x' \in B_1 \cap B_2 \subset \bar{B}(z, R)$ et, avec $\|x' - x_0\| = \|-v\| = \rho$, on obtient :

$$\rho^2 \leq R^2 - 2(x' - x_0 | x_0 - z) = R^2 + 2(v | x_0 - z).$$

Ainsi, $\rho^2 - R^2 \leq 2(v | x_0 - z)$ et $\rho^2 - R^2 \leq -2(v | x_0 - z)$, ce qui prouve que $\rho^2 - R^2 \leq 0$ et donc que $\rho \leq R$.

Finalement, le rayon de toute boule qui contient $B_1 \cap B_2$ est supérieur ou égal ρ , qui est lui-même le rayon d'une boule contenant $B_1 \cap B_2$. Ceci prouve que :

$$r_{\min} = \rho = \sqrt{r^2 - \left\| \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \right\|^2}.$$

En définitive :

$$r_{\min} = \begin{cases} \sqrt{r^2 - \left\| \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \right\|^2} & \text{quand } \left\| \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \right\| < r \\ 0 & \text{quand } \left\| \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \right\| \geq r \end{cases}$$

2) Notons \mathbb{B} l'ensemble des rayons des boules fermées de E qui contiennent K .

Comme la partie K est compacte, elle est bornée, donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in K$, $\|x\| \leq M$. Ceci veut dire que $K \subset \overline{B}(0, M)$ et donc que $M \in \mathbb{B}$. Ainsi, \mathbb{B} est une partie non vide de \mathbb{R}_+ (minorée par 0), donc \mathbb{B} admet une borne inférieure. Ainsi :

$$r = \inf \mathbb{B} \text{ existe bien.}$$

3) Soit un réel $t > 0$.

Comme $r = \inf \mathbb{B}$ (avec les notations de la question précédente), il existe $r' \in [r, r+t[$ tel que $r' \in \mathbb{B}$, donc il existe $c \in E$ tel que $K \subset \overline{B}(c, r')$. Comme $\overline{B}(c, r') \subset \overline{B}(c, r+t)$, on a $K \subset \overline{B}(c, r+t)$.

Par ailleurs, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = r$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $|r_n - r| \leq t$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K \subset B_n$, donc $r_n \in \mathbb{B}$ et $r \leq r_n$. Ainsi, pour tout entier $n \geq N$, on a $r \leq r_n \leq r+t$ et :

$$K \subset \overline{B}(x_n, r_n) \subset \overline{B}(x_n, r+t).$$

Alors, on a $K \subset \overline{B}(c, r+t)$ et $K \subset \overline{B}(x_n, r+t)$, donc $K \subset \overline{B}(c, r+t) \cap \overline{B}(x_n, r+t)$ et d'après la question 1 :

$$K \subset \overline{B}\left(\frac{1}{2}(c+x_n), \rho\right) \text{ avec } \rho = \sqrt{(r+t)^2 - \left\|\frac{1}{2}(c-x_n)\right\|^2}.$$

Donc, $\rho \in \mathbb{B}$, ce qui implique que $r \leq \rho$, soit :

$$r^2 \leq \rho^2 = (r+t)^2 - \left\|\frac{1}{2}(c-x_n)\right\|^2 \Rightarrow \|c-x_n\| \leq 2\sqrt{(r+t)^2 - r^2}.$$

Alors, pour tous $k, n \in \mathbb{N}$ tels que $k > n \geq N$, on a :

$$\|x_k - x_n\| = \|x_k - c + c - x_n\| \leq \|c - x_k\| + \|c - x_n\| \leq 4\sqrt{(r+t)^2 - r^2}.$$

Comme ceci est vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > n$, $z_n = \sup_{k > n} \|x_k - x_n\|$ existe bien et :

$$0 \leq z_n \leq 4\sqrt{(r+t)^2 - r^2}.$$

Enfin, $\lim_{t \rightarrow 0} \left[4\sqrt{(r+t)^2 - r^2}\right] = 0$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $t > 0$ tel que $4\sqrt{(r+t)^2 - r^2} \leq \varepsilon$.

Finalement, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, $0 \leq z_n \leq \varepsilon$, ce qui prouve que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$$