Corrigés des TD du chapitre 4

Exercice 1

On pose $f_n(t)=(t^2+1)\dfrac{ne^t+te^{-t}}{n+t}$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est définie et continue sur $[0,1]$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f:t\mapsto(t^2+1)e^t$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $t\in[0,1]$, on a :

$$\left|f_n(t)-f(t)\right|=\left|(t^2+1)\frac{ne^t+te^{-t}}{n+t}-(t^2+1)e^t\right|=\left|(t^2+1)\frac{2t\,\mathrm{sh}\,t}{n+t}\right|\le\frac{2(t^2+1)t\,\mathrm{sh}\,t}{n}\le\frac{4\,\mathrm{sh}\,1}{n}.$$

Donc $\|f_n-f\|_\infty=\sup_{t\in[0,1]}\left|f_n(t)-f(t)\right|\le\dfrac{4\,\mathrm{sh}\,1}{n}$ et, comme $\dfrac{4\,\mathrm{sh}\,1}{n}\to 0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément.

On a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^1 f_n(t)dt\right]=\int_0^1\lim_{n\to+\infty}\left[f_n(t)\right]dt=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(t^2+1)e^t dt.$$

En intégrant deux fois par parties, avec les fonctions C^1, $t\mapsto t^2+1$ et $t\mapsto e^t$, puis $t\mapsto 2t$ et $t\mapsto e^t$, on obtient :

$$\int_0^1(t^2+1)e^t dt=\left[(t^2+1)e^t\right]_0^1-\int_0^1 2te^t dt=\left[(t^2+1)e^t\right]_0^1-\left[2te^t\right]_0^1+\int_0^1 2e^t dt$$
$$=\left[(t^2+1)e^t-2te^t+2e^t\right]_0^1=\left[(t^2-2t+3)e^t\right]_0^1=2e-3$$

Finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^1(t^2+1)\frac{ne^t+te^{-t}}{n+t}dt\right]=2e-3}$$

Exercice 2

1) Pour $x\in\mathbb{R}_+$, posons $f_x(t)=t^3+xt-1$.

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f_x est continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection continue, f_x réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $\dfrac{1}{n}$ admet un unique antécédent par f_x, ce qui veut dire que :

$$\boxed{\text{L'équation } (E_{x,n}) \text{ admet une unique solution réelle.}}$$

Remarquons que $f_x(0)=-1<\dfrac{1}{n}=f_x\left(u_n(x)\right)$, donc $u_n(x)>0$ car f_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a :

$$u_n(x)^3+xu_n(x)-1-\frac{1}{n}=0\quad\Leftrightarrow\quad f_x\left(u_n(x)\right)=\frac{1}{n}\quad\Leftrightarrow\quad u_n(x)=f_x^{-1}\left(\frac{1}{n}\right).$$

Comme f_x est continue sur $\mathbb{R}$, f_x^{-1} l'est aussi et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = \lim_{n\to+\infty} f_x^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{t\to 0} f_x^{-1}(t) = f_x^{-1}(0).$$

Et on a $f_x(t) = t^3 + xt - 1 = 0$ quand $t = f_x^{-1}(0)$, donc $f_x^{-1}(0)$ est l'unique solution de $t^3 + xt - 1 = 0$.

Finalement :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction u telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$.

On a $f_x\left(u(x)\right) = 0$. Or, la fonction f_x est strictement croissante et $f_x(0) = -1 < 0$, donc $u(x) > 0$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$, soit :

$$x = \frac{1-u(x)^3}{u(x)} = \frac{1}{u(x)} - u(x)^2 = g\left(u(x)\right)$$

avec $g(t) = \dfrac{1}{t} - t^2$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement décroissante de $+\infty$ à $-\infty$, donc, d'après le théorème de la bijection continue, g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Alors :

$$g\left(u(x)\right) = x \quad\Leftrightarrow\quad u(x) = g^{-1}(x).$$

La fonction g étant continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, le théorème de la bijection continue assure que la fonction g^{-1} est continue et strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi :

La fonction u est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Remarquons que $g(1) = 0$, donc $g^{-1}(0) = 1$ et $\lim\limits_{0^+} g = +\infty$, donc $\lim\limits_{+\infty} g^{-1} = 0$.

Ainsi, sur $\mathbb{R}_+$, g^{-1} est strictement décroissante de 1 à 0, d'où :

$$u(0) = 1 \quad\text{et}\quad \lim_{+\infty} u = 0.$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $u_n(x)^3 + xu_n(x) - 1 = \dfrac{1}{n}$ et $u(x)^3 + xu(x) - 1 = 0$, donc :

$$u_n(x)^3 - u(x)^3 + xu_n(x) - xu(x) = \frac{1}{n} \quad\Leftrightarrow\quad \left[u_n(x) - u(x)\right]\left[u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x\right] = \frac{1}{n}.$$

Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a $u_n(x) > 0$ et $u(x) > 0$, donc :

$$u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x > u(x)^2 + x$$

Sur $\mathbb{R}_+$, la fonction $h : x \mapsto u(x)^2 + x$ est continue (somme de telles fonctions), strictement positive (car u l'est) et telle que $h(0) = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$. Ceci permet de conclure que h admet un minimum $\mu > 0$ et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x > \mu \quad\Leftrightarrow\quad 0 < \frac{1}{u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x} < k = \frac{1}{\mu}.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$|u_n(x) - u(x)| = \frac{1}{n} \frac{1}{u_n(x)^2 + u_n(x)u(x) + u(x)^2 + x} < \frac{k}{n}.$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\|u_n - u\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |u_n(x) - u(x)| \le \frac{k}{n}.$$

Enfin, comme $\frac{k}{n} \to 0$ quand $n \to +\infty$, $\|u_n - u\|_\infty \to 0$ et donc :

$$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge uniformément vers } u.}$$

Exercice 3

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a $f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t)\,dt$, donc f_{n+1} est définie sur $[0,1]$ si l'on peut intégrer f_n sur ce segment, et ceci est le cas, quand f_n est continue sur $[0,1]$.

Si cela est vrai, alors $F_n : x \mapsto \int_0^x f_n(t)\,dt$ est elle aussi continue sur $[0,1]$ (et même de classe C^1), donc f_{n+1} est continue sur $[0,1]$.

Comme $f_0 = \varphi$ est continue sur $[0,1]$, nous avons prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est définie et continue sur $[0,1]$:

$$\boxed{\text{La suite } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bien définie.}}$$

2) Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction *f*, alors *f* est continue sur $[0,1]$ (car toutes les fonctions f_n le sont), $f_{n+1} \to f$ quand $n \to +\infty$ et pour tout $x \in [0,1]$, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers *f* sur $[0,x]$, donc $\int_0^x f_n(t)\,dt \to \int_0^x f(t)\,dt$ quand $n \to +\infty$.

En passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans la relation de récurrence, on obtient alors pour tout $x \in [0,1]$:

$$f(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt.$$

Ceci prouve immédiatement que $f(0) = 1$ et *f* est de classe C^1 sur $[0,1]$ avec $f' = f$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Si } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément, c'est vers la fonction exponentielle.}}$$

3) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $g_n(x) = f_n(x) - e^x$ et $\mu = \sup_{[0,1]} |g_0|$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, on a :

$$g_{n+1}(x) = f_{n+1}(x) - e^x = 1 + \int_0^x f_n(t)\,dt - e^x = \int_0^x \left(f_n(t) - e^t \right) dt = \int_0^x g_n(t)\,dt.$$

Donc :

$$|g_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x g_n(t)\,dt \right| \le \int_0^x |g_n(t)|\,dt.$$

Prouvons alors par récurrence sur n que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, on a $|g_n(x)|\le \mu\dfrac{x^n}{n!}$.

- On a $\mu=\sup\limits_{[0,1]}|g_0|$, donc pour tout $x\in[0,1]$, $|g_0(x)|\le\mu=\mu\dfrac{x^0}{0!}$, donc la propriété est vraie au rang $n=0$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$, soit pour tout $x\in[0,1]$, $|g_n(x)|\le\mu\dfrac{x^n}{n!}$.

  Alors, pour tout $x\in[0,1]$:

$$|g_{n+1}(x)|\le\int_0^x|g_n(t)|\,dt\le\int_0^x\mu\frac{t^n}{n!}dt=\mu\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in[0,1]$, $\mu\dfrac{x^n}{n!}\le\dfrac{\mu}{n!}$, donc $|g_n(x)|\le\dfrac{\mu}{n!}$, soit pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\sup_{x\in[0,1]}|g_n(x)|\le\frac{\mu}{n!}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\mu}{n!}=0$, la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}=(f_n-\exp)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers la fonction exponentielle.}}$$

Exercice 4

1) Pour tout $x\in\,]1;+\infty[$, $\zeta(x)$ est la somme d'une série de Riemann convergente, donc est bien défini.

De plus, pour tout $a\in\,]1;+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $\sup\limits_{x\in[a;+\infty[}\left|\dfrac{1}{n^x}\right|=\dfrac{1}{n^a}$ et $\sum\dfrac{1}{n^a}$ converge (car $a>1$).

Ainsi, la série $\sum\dfrac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[a;+\infty[$, et comme, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x\mapsto\dfrac{1}{n^x}=e^{-x\ln n}$ est continue sur cet intervalle, la fonction ζ est continue sur $[a;+\infty[$.

Ainsi, ζ est définie et continue sur $[a;+\infty[$ pour tout $a\in\,]1;+\infty[$, donc :

$$\boxed{\zeta \text{ est définie et continue sur }]1;+\infty[.}$$

2) Soient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n : x\mapsto\dfrac{1}{n^x}=e^{-x\ln n}$ et $a\in\,]1;+\infty[$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$ (comme composée de fonctions de classe C^∞) et pour tous $n,k\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\,]1;+\infty[$:

$$f_n^{(k)}(x)=(-\ln n)^k e^{-x\ln n}=\frac{(-\ln n)^k}{n^x}.$$

Alors, pour tous $n,k\in\mathbb{N}^*$:

$$\sup_{x\in[a;+\infty[}\left|f_n^{(k)}(x)\right|=\frac{(\ln n)^k}{n^a}.$$

On peut écrire $\dfrac{(\ln n)^k}{n^a}=\dfrac{(\ln n)^k}{n^{(a-1)/2}}\dfrac{1}{n^{(a+1)/2}}$ et comme $\dfrac{a-1}{2}>0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(\ln n)^k}{n^{(a-1)/2}}=0$ et donc :

$$\sup_{x\in[a;+\infty[}\left|f_n^{(k)}(x)\right|=\underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^{(a+1)/2}}\right).$$

Comme $a>1$, on a $\dfrac{a+1}{2}>1$, et donc la série $\sum\dfrac{1}{n^{(a+1)/2}}$ converge, ce qui prouve que $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a;+\infty[$ et ainsi, ζ est de classe C^∞ sur $[a;+\infty[$.

Comme ceci est vrai pour tout $a\in\,]1;+\infty[$:

$$\boxed{\zeta \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]1;+\infty[\text{ et pour tout } k\in\mathbb{N} \text{ et tout } x\in\,]1;+\infty[,\ \zeta^{(k)}(x)=\sum_{n\geq1}\frac{(-\ln n)^k}{n^x}.}$$

3) D'après ce qui précède, on a pour tout $x\in\,]1;+\infty[$:

$$\zeta'(x)=\sum_{n\geq1}\frac{-\ln n}{n^x}=-\sum_{n\geq1}\frac{\ln n}{n^x}<0.$$

Ainsi, ζ est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$.

Par ailleurs, $\sum\dfrac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[2;+\infty[$, donc :

$$\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}f_n(x)\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n^x}=1+\sum_{n=2}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{n^x}=1.$$

Enfin, pour tout $x\in\,]1;+\infty[$ et tout $N\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}e^{-(x-1)\ln n}.$$

Or, pour tout $h\in\mathbb{R}_+$, on a $e^{-h}\geq1-h$, donc

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}e^{-(x-1)\ln n}\geq\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}\big(1-(x-1)\ln n\big)=\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}-(x-1)\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n}.$$

Comme la série $\sum\dfrac{1}{n}$ diverge, pour tout réel $A>0$, il existe $N_0\in\mathbb{N}^*$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n}>A$ et :

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}>\sum_{n=1}^{N_0}\frac{1}{n^x}>A-(x-1)\sum_{n=1}^{N_0}\frac{\ln n}{n}.$$

Alors, si ζ admet une limite finie ℓ en 1, l'inégalité ci-dessus donne $\ell\geq A$ en passant à la limite quand $x\to1$.

Ainsi, on aurait $\ell\geq A$ pour tout réel $A>0$, ce qui est absurde, et donc comme ζ est strictement décroissante sur $]1;+\infty[$, on a $\lim\limits_{x\to1}\zeta(x)=+\infty$.

On obtient le tableau :

x	1		$+\infty$
ζ	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1

4) D'après ce qui précède, la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est absolument convergente pour tout $x \in]1;+\infty[$, donc :

$$\boxed{\text{La fonction } \tau \text{ est bien définie sur }]1;+\infty[\,.}$$

On a pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\tau(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x} = \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^x} - \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x}$$

$$= \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^x} + \sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x} - 2\sum_{\substack{n\geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^x} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} - 2\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^x} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x} - 2\frac{1}{2^x}\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$$

Soit pour tout $x \in]1;+\infty[$:

$$\boxed{\tau(x) = \left(1 - \frac{1}{2^{x-1}}\right)\zeta(x)}$$

5) La fonction $x \mapsto 1 - \frac{1}{2^{x-1}}$ est de classe C^∞ sur $]1;+\infty[$, donc, en tant que produit de telles fonctions :

$$\boxed{\text{La fonction } \tau \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur }]1;+\infty[\,.}$$

6) La série alternée $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et sa somme est $\ln 2$ (obtenue avec la formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à $x \mapsto \ln(1+x)$ entre 0 et 1).

De plus, d'après le théorème sur les séries alternées, on a pour tout $x \in [1;+\infty[$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^x}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^x} \leq \frac{1}{n+1}\,.$$

Ceci prouve que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ converge uniformément sur $[1;+\infty[$ et comme les fonctions $x \mapsto \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ sont toutes continue (quel que soit $n \in \mathbb{N}^*$), la fonction $x \mapsto \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ est continue sur $[1;+\infty[$ et donc, τ est prolongeable par continuité en 1, avec $\lim_{x\to 1} \tau(x) = \ln 2$.

Alors :

$$\zeta(x) = \frac{2^{x-1}}{2^{x-1}-1}\tau(x) = \frac{2^{x-1}}{e^{(x-1)\ln 2}-1}\tau(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{(x-1)\ln 2}\ln 2\,.$$

Soit :

$$\boxed{\zeta(x) \underset{x\to 1}{\sim} \frac{1}{x-1}}$$

On a vu plus haut que pour tout $x\in[1;+\infty[$ et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\tau(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k^x}\right|\leq\frac{1}{(n+1)^x}$.

En particulier, pour $n=1$, on obtient pour tout $x\in[1;+\infty[$:

$$\left|\tau(x)-1\right|\leq\frac{1}{2^x}.$$

En passant à la limite quand $x\to+\infty$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty}\tau(x)=1$. Alors :

$$\lim_{x\to+\infty}\zeta(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\tau(x)}{1-\frac{1}{2^{x-1}}}=\frac{1}{1}=1.$$

Donc :

$$\boxed{\zeta(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}1}$$

Exercice 5

Soit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)=\frac{1}{x^2+n^2}$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\mathbb{R}^*$, on a :

$$\left|f_n(x)\right|\leq\frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+^*$ (et $\mathbb{R}_-^*$).

Soit $x>0$ fixé.

La fonction $t\mapsto\frac{1}{x^2+t^2}$ est décroissante, continue et positive sur $\mathbb{R}_+$. On peut donc appliquer la comparaison série-intégrale, qui donne pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^{n+1}\frac{dt}{x^2+t^2}\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x^2+k^2}\leq\frac{1}{x^2}+\int_0^{n}\frac{dt}{x^2+t^2}.$$

Or :

$$\int_0^{n}\frac{dt}{x^2+t^2}=\frac{1}{x}\int_0^{n}\frac{\frac{1}{x}dt}{1+\left(\frac{t}{x}\right)^2}=\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{n}{x}\right).$$

On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{n+1}{x}\right)\leq\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x^2+k^2}\leq\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}\arctan\left(\frac{n}{x}\right).$$

Et en passant à la limite quand $n\to+\infty$, on obtient :

$$\frac{\pi}{2x}\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+k^2}\leq\frac{1}{x^2}+\frac{\pi}{2x}\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\pi}{2}\leq x\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+k^2}\leq\frac{1}{x}+\frac{\pi}{2}.$$

On a alors immédiatement par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+k^2}\right]=\frac{\pi}{2}$, soit :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{x^2+n^2}\underset{x\to+\infty}{\sim}\frac{\pi}{2x}}$$

Exercice 6

1) Une étude rapide de $x \mapsto x(1-x)$ sur $[0,1]$, montre que pour tout $x \in [0,1]$, on a $0 \leq x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$.

Alors, pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{4^n}.$$

Comme la série géométrique $\sum \dfrac{1}{4^n}$ converge :

$$\boxed{\text{La série } \sum f_n \text{ converge normalement sur } [0,1].}$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_0^1 f_n(t)dt = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$. On intègre par parties, avec $t \mapsto \dfrac{1}{n+1}t^{n+1}$ et $t \mapsto (1-t)^n$ de classe C^1 sur $[0,1]$:

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1}t^{n+1}(1-t)^n\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{n+1}t^{n+1}n(1-t)^{n-1}dt = \frac{n}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}(1-t)^{n-1}dt.$$

En recommençant plusieurs fois de suite, on obtient :

$$I_n = \frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\int_0^1 t^{n+2}(1-t)^{n-2}dt = \ldots = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+k)}\int_0^1 t^{n+k}(1-t)^{n-k}dt \ldots = \frac{n(n-1)\ldots(1)}{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}\int_0^1 t^{2n}dt.$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (la relation reste vraie pour $n = 0$) :

$$\boxed{I_n = \frac{n! \times n!}{(2n)!}\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est polynômiale, donc continue sur $[0,1]$ et $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$, donc la série $\sum I_n$ converge avec :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^1 f_n(t)dt\right) = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt.$$

Or, pour tout $t \in [0,1]$, $0 \leq t(1-t) \leq \dfrac{1}{4} < 1$, donc :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n(1-t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[t(1-t)\right]^n = \frac{1}{1-t(1-t)} = \frac{1}{t^2-t+1}.$$

Et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} I_n = \int_0^1 \frac{dt}{t^2-t+1} = \int_0^1 \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int_0^1 \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}dt}{\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Finalement, avec $I_n = \dfrac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}}$:

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} \text{ converge avec } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)\binom{2n}{n}} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.}$$

Exercice 7

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ (elle est définie sur $\mathbb{R}_+$ et rationnelle) et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f_n'(x) = \frac{1}{n} \frac{1}{(1+n^2x)^2} > 0.$$

La fonction f_n est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ de $f_n(0) = 0$ à $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{n^3 x} = \dfrac{1}{n^3}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$|f_n(x)| < \frac{1}{n^3}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^3}$ converge :

$$\boxed{\sum f_n \text{ converge normalement sur } \mathbb{R}_+.}$$

2) Comme les fonctions f_n sont toutes continues sur $\mathbb{R}_+$ et $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$:

$$\boxed{S = \sum_{n \geq 1} f_n \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a vu que la fonction f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$ et, on a de plus, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n} \frac{(-1)^{k+1} n^{2(k-1)} k!}{(1+n^2x)^{k+1}}.$$

Ici, on a immédiatement $\sup\limits_{\mathbb{R}_+} \left| f_n^{(k)} \right| = \left| f_n'(0) \right| = n^{2k-3} k!$ et comme la série $\sum \dfrac{1}{n^{2k-3}}$ diverge pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il n'y a pas de convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Par contre, pour tout réel $a > 0$, on a $\sup\limits_{[a,+\infty[} \left| f_n^{(k)} \right| = \left| f_n^{(k)}(a) \right| = \dfrac{n^{2k-3} k!}{(1+n^2a)^{k+1}} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{k!}{n^5 a^{k+1}}$.

Comme la série de Riemann $\sum \dfrac{1}{n^5}$ converge, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$ et donc, pour tout réel $a > 0$, S est de classe C^∞ sur $[a,+\infty[$.

Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{S \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $f_n(0)=0$, donc $S(0)=0$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{S(x)-S(0)}{x}=\frac{S(x)}{x}=\sum_{n\geq 1}\frac{f_n(x)}{x}=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(1+n^2x)}.$$

Par comparaison série-intégrale, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(1+k^2x)}\geq\int_1^{n+1}\frac{dt}{t(1+t^2x)}$$

Et :

$$\int_1^{n+1}\frac{dt}{t(1+t^2x)}\underset{u=t^2x}{=}\frac{1}{2}\int_x^{(n+1)^2x}\frac{du}{u(1+u)}=\frac{1}{2}\int_x^{(n+1)^2x}\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du=\frac{1}{2}\left[\ln\left(\frac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^2x}\right)-\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right].$$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(n+1)^2x}{1+(n+1)^2x}=1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_1^{n+1}\frac{dt}{t(1+t^2x)}=-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$ et ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(1+n^2x)}\geq-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{S(x)-S(0)}{x}\geq-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x}{1+x}\right).$$

Enfin, on a $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[-\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)\right]=+\infty$, donc par comparaison :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{S(x)-S(0)}{x}=+\infty.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{S\text{ n'est pas dérivable en }0.}$$

3) On a vu que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=\dfrac{1}{n^3}$ et que le série $\sum f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}_+$.

On a alors :

$$\lim_{x\to+\infty}S(x)=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n\geq 1}f_n(x)=\sum_{n\geq 1}\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3}.$$

Et $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^3}=\zeta(3)$ où ζ est la fonction de l'exercice 4 (on a $\zeta(3)\approx 1,2$), donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}S(x)=\zeta(3)}$$

Exercice 8

Pour tout $x\in[0,1]$, posons :

$$f_n(x)=x-P_n(x).$$

On a alors $f_0(x)=x$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)-\frac{1}{2}f_n(x)^2=g\left(f_n(x)\right)$$

avec $g(x)=x-\dfrac{1}{2}x^2$.

La fonction g est polynomiale donc dérivable sur $[0,1]$ avec pour tout $x\in[0,1]$, $g'(x)=1-x\geq 0$.

Ainsi, g est croissante sur $[0,1]$ de $g(0)=0$ à $g(1)=\dfrac{1}{2}$ et donc $g([0,1])\subset[0,1]$. Comme $f_0(x)=x\in[0,1]$, on a alors $f_n(x)\in[0,1]$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f_{n+1}(x)-f_n(x)=-\frac{1}{2}f_n(x)^2\leq 0 .$$

Ainsi, à $x\in[0,1]$ fixé, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et décroissante, donc elle converge vers $\ell(x)\in[0,1]$

Comme g est continue (car polynomiale) sur $[0,1]$ et $f_{n+1}(x)=g(f_n(x))$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$\ell(x)=g(\ell(x)) \quad\Leftrightarrow\quad \ell(x)=\ell(x)-\frac{1}{2}\ell(x)^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{2}\ell(x)^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad \ell(x)=0 .$$

Finalement, pour tout $x\in[0,1]$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, donc $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x, autrement dit :

La suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $x\mapsto x$.

L'énoncé admet que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions *polynômes* (on le prouve facilement par récurrence).

Les fonctions f_n sont alors elles aussi toutes polynomiales, donc continues sur le segment $[0,1]$.

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n admet un maximum sur $[0,1]$, noté M_n. On vu de plus que pour tous $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$, $f_n(x)\in[0,1]$, donc f_n est positive sur $[0,1]$ et $M_n\in[0,1]$.

Comme g est croissante sur $[0,1]$, on a alors pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$:

$$f_{n+1}(x)=g(f_n(x))\leq g(M_n) \quad\text{donc}\quad M_{n+1}\leq g(M_n).$$

Or, pour tout $x\in[0,1]$, $g(x)-x=-\dfrac{1}{2}x^2\leq 0$, donc $g(x)\leq x$, d'où :

$$M_{n+1}\leq M_n .$$

La suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0 : elle converge vers $m\in[0,1]$.

Toujours grâce à la continuité de g, on peut passer à la limite dans l'inégalité $M_{n+1}\leq g(M_n)$, ce qui donne :

$$m\leq g(m)=m-\frac{1}{2}m^2 .$$

On a alors, $0\leq -\dfrac{1}{2}m^2$, soit $m=0$.

Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\max_{x\in[0,1]}|P_n(x)-x|\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\max_{x\in[0,1]}|f_n(x)|\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\max_{x\in[0,1]}f_n(x)\right)=\lim_{n\to+\infty}M_n=0 .$$

Ceci prouve que :

La suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x\mapsto x$.

Soit $x\in[0,1]$. Posons $u_n=f_n(x)=x-P_n(x)$. On a donc et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=g(u_n)$ et $u_n\to 0$.

Pour $x=0$, on a $u_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ (car $0=g(0)$), donc $\sum u_n$ converge.

On suppose maintenant $x>0$.

Remarquons que la fonction g est strictement croissante sur $[0,1]$, donc si $u_n>0$, alors $u_{n+1}=g(u_n)>g(0)=0$ et comme $u_0=x>0$, on a (par récurrence) $u_n>0$ (donc $u_n\neq 0$) pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Alors, comme $u_n\to 0$, on a :

$$\frac{1}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_n-\frac{1}{2}u_n^2}=\frac{1}{u_n}\frac{1}{1-\frac{1}{2}u_n}=\frac{1}{u_n}\left(1+\frac{1}{2}u_n+o(u_n)\right)=\frac{1}{u_n}+\frac{1}{2}+o(1).$$

Donc, $\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}\to\frac{1}{2}$ et avec la propriété de Césaro, on obtient :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k}\right)\to\frac{1}{2}.$$

Or, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{u_{k+1}}-\frac{1}{u_k}\right)=\frac{1}{n\,u_n}-\frac{1}{n\,u_0}$ et comme $\frac{1}{n\,u_0}\to 0$, on a :

$$\frac{1}{n\,u_n}\to\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad n\,u_n\to 2\quad\Leftrightarrow\quad u_n\sim\frac{2}{n}.$$

Or, la série $\sum\frac{1}{n}$ diverge, donc $\sum u_n$ diverge.

Finalement :

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum\left(id-P_n\right) \text{ ne converge pas simplement sur } [0,1].}$$

Exercice 9

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, on a $\sin(\pi x)\neq 0$ et $\frac{1}{(x+n)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{(x-n)^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$, et la série de Riemann $\sum\frac{1}{n^2}$ converge, donc les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(x+n)^2}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(x-n)^2}$ convergent et ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n)^2}$ converge.

Finalement, quand $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $f(x)$ est bien défini, donc :

$$\boxed{f \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.}$$

On a $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ si et seulement si $x+1\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned}f(x+1)&=-\frac{\pi^2}{\sin^2\left(\pi(x+1)\right)}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x+1-n)^2}\\&=-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x+\pi)}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\left(x-(n-1)\right)^2}\\&\underset{n'=n-1}{=}-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}+\sum_{n'\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n')^2}=f(x)\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{f \text{ est 1-périodique sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.}$$

Soit $p\in\mathbb{Z}$ et $[a,b]\subset\,]p,p+1[$. Pour tout $x\in[a,b]$, on a :

- si $n\le p$, on a $0\le p-n<a-n\le x-n$, donc $0<\dfrac{1}{(x-n)^2}\le\dfrac{1}{(a-n)^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\le p}\frac{1}{(a-n)^2}$ converge, donc $x\mapsto\displaystyle\sum_{n\le p}\frac{1}{(x-n)^2}$ converge normalement sur $[a,b]$;
- si $n\ge p+1$, on a $x-n\le b-n<p+1-n\le 0$ donc $0<\dfrac{1}{(x-n)^2}\le\dfrac{1}{(b-n)^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\ge p+1}\frac{1}{(b-n)^2}$ converge, donc $x\mapsto\displaystyle\sum_{n\ge p+1}\frac{1}{(x-n)^2}$ converge normalement sur $[a,b]$.

Comme $x\mapsto\dfrac{1}{(x-n)^2}$ est continue sur $[a,b]$ pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $x\mapsto\displaystyle\sum_{n\le p}\frac{1}{(x-n)^2}$ et $x\mapsto\displaystyle\sum_{n\ge p+1}\frac{1}{(x-n)^2}$ sont continues sur $[a,b]$. Il en va de même de $x\mapsto-\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}$ et donc, f est continue sur $[a,b]$ en tant que somme de telles fonctions. Ceci étant vrai pour tout $[a,b]\subset\,]p,p+1[$, f est continue sur $]p,p+1[$.

Ceci étant vrai pour tout $p\in\mathbb{Z}$:

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}.}$$

2) On prouve comme ci-dessus que les séries $x\mapsto\displaystyle\sum_{n<0}\frac{1}{(x-n)^2}$ et $x\mapsto\displaystyle\sum_{n>0}\frac{1}{(x-n)^2}$ converge normalement sur $\left[-\dfrac12,\dfrac12\right]$, donc que $x\mapsto\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{(x-n)^2}$ est continue sur $\left[-\dfrac12,\dfrac12\right]$ et donc que $x\mapsto\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{(x-n)^2}$ admet une limite finie en 0 (qui est $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{n^2}=2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$).

Par ailleurs, au voisinage de 0 :

$$-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{\sin^2(\pi x)-\pi^2x^2}{x^2\sin^2(\pi x)}.$$

Et :

$$\sin^2(\pi x)-\pi^2x^2=\left(\pi x-\frac{(\pi x)^3}{6}+\underset{x\to0}{o}(x^4)\right)^2-\pi^2x^2=\pi^2x^2-2\pi x\frac{(\pi x)^3}{6}+\underset{x\to0}{o}(x^4)-\pi^2x^2\underset{x\to0}{\sim}-\frac{\pi^4}{3}x^4$$

$$x^2\sin^2(\pi x)\underset{x\to0}{\sim}\pi^2x^4$$

Donc, $-\dfrac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}+\dfrac{1}{x^2}\underset{x\to0}{\sim}\dfrac{-\frac{\pi^4}{3}x^4}{\pi^2x^4}$, soit :

$$\lim_{x\to0}\left(-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}+\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{\pi^2}{3}.$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}+\frac{1}{x^2}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}^*}\frac{1}{(x-n)^2}\right) = -\frac{\pi^2}{3}+2\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}.$$

Et donc, *f* se prolonge par continuité en 0.

Comme *f* est 1-périodique, elle se prolonge par continuité en tout $0+n\times 1 = n$ avec $n\in\mathbb{Z}$ et donc :

$$\boxed{f \text{ se prolonge par continuité sur } \mathbb{R}.}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, $\frac{x}{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et $\frac{x+1}{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, et on a :

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}-n\right)^2}-\frac{\pi^2}{\sin^2\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{\left(\frac{x+1}{2}-n\right)^2}$$

$$= -\pi^2\,\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin^2\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{4}{(x-2n)^2}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{4}{(x+1-2n)^2}$$

$$= -4\pi^2\,\frac{\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{\left[2\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi(x+1)}{2}\right)\right]^2}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{4}{(x-2n)^2}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{4}{(x+1-2n)^2}$$

Soit :

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right) = -4\pi^2\,\frac{1}{\left[\cos\left(\frac{\pi(x+1)}{2}-\frac{\pi x}{2}\right)-\cos\left(\frac{\pi(x+1)}{2}+\frac{\pi x}{2}\right)\right]^2}+\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n \text{ pair}}}\frac{4}{(x-n)^2}+\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n \text{ impair}}}\frac{4}{(x-n)^2}$$

$$= -\frac{4\pi^2}{\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\pi x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^2}+\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n \text{ pair}}}\frac{4}{(x-n)^2}+\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ n \text{ impair}}}\frac{4}{(x-n)^2} = 4\left[-\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}+\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{1}{(x-n)^2}\right]$$

Ainsi, $f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)=4f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ et par continuité de la fonction *f* prolongée sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{4f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)}$$

3) La fonction *f* (prolongée) est continue sur le segment $[0,1]$, donc $M=\sup\limits_{[0,1]}|f|=\max\limits_{[0,1]}|f|$ existe. Or, *f* est 1-périodique sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, donc elle l'est sur $\mathbb{R}$ une fois prolongée. Alors :

$$M=\sup_{\mathbb{R}}|f|.$$

Alors, d'après la question précédente, on a pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$4\left|f(x)\right| = \left|f\left(\frac{x}{2}\right)+f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leq \left|f\left(\frac{x}{2}\right)\right|+\left|f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right| \leq M+M=2M\ .$$

Donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $2\left|f(x)\right|\leq M$ d'où $2M\leq M$. Ceci prouve que $M=\sup\limits_{\mathbb{R}}\left|f\right|=0$ et donc que :

$$\boxed{f \text{ est nulle.}}$$

On a alors $f(0)=0$ et on a vu que $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-\frac{\pi^2}{3}+2\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}$, donc $-\frac{\pi^2}{3}+2\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}=0$, soit :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$