

Corrigés des TD du chapitre 5
Exercice 1

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|a_n z^n| = \left| \frac{i^n n^2}{(n^2 + 1)2^n} z^n \right| = \frac{n^2}{n^2 + 1} \left(\frac{|z|}{2} \right)^n.$$

La suite $(|a_n z^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $|z| \leq 2$, donc $R = 2$ et pour $|z| = 2$, $|a_n z^n| \rightarrow 1$, donc $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. Ainsi :

$R = 2 \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$|a_n z^n| = \left| \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n} z^n \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \left(\frac{|z|}{e} \right)^n.$$

Comme ci-dessus :

$R = e \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$|a_n z^n| \leq 9|z|^n.$$

Or, la suite $(9|z|^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée quand $|z| \leq 1$, donc $(|a_n z^n|)_{n \in \mathbb{N}}$ aussi.

Remarquons que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de chiffres (entiers compris entre 0 et 9) qui ne converge pas vers 0, car sinon, elle serait stationnaire sur 0 et $\sqrt{2}$ serait décimal, ce qui est faux. Donc, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la série $\sum a_n (e^{i\theta})^n$ diverge grossièrement et ainsi :

$R = 1 \text{ et } \sum a_n z^n \text{ diverge sur le bord du disque de convergence.}$

Pour mémoire : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = E(10^n \sqrt{2}) - 10E(10^{n-1} \sqrt{2})$.

d. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$a_n = \ln \left(\frac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \right) = \ln \left[\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-1/2} \right] = \ln \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right).$$

Donc :

$$a_n = \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{3n\sqrt{n}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n\sqrt{n}} \right) \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right) \right] = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{3n^{1.5}} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{1.5}} \right).$$

Ainsi, $|a_n| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et comme le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ est 1, on a $R = 1$.

De plus, les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ convergent (CSSA, la seconde est même absolument convergente), mais pas la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$, donc $\sum a_n$ diverge.

De plus, avec ce qui précède, on a immédiatement $(-1)^n a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc $\sum (-1)^n a_n$ diverge.

Finalement :

$$R=1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge sur le bord de l'intervalle de convergence.}$$

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^3 + nx - 1$ est continue sur \mathbb{R} et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$, donc elle réalise une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et s'annule une unique fois en a_n . Comme elle vaut $-1 < 0$ en 0 et $n \geq 0$ en 1, on a de plus, $0 < a_n \leq 1$. Enfin :

$$a_n^3 + na_n - 1 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{1 - a_n^3}{a_n} = g(a_n).$$

La fonction $g : x \mapsto \frac{1 - x^3}{x} = \frac{1}{x} - x^2$ est continue sur $]0;1]$ et strictement décroissante de $+\infty$ à 0, donc elle réalise une bijection de $]0;1]$ dans \mathbb{R}_+ . On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = g^{-1}(n)$.

D'après le théorème de la bijection continue, g^{-1} est continue sur \mathbb{R}_+ et décroissante de 1 à 0, donc $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, de limite nulle.

Comme $a_n^3 + na_n - 1 = 0$, on a $na_n = 1 - a_n^3 \rightarrow 1$, donc $a_n \sim \frac{1}{n}$.

Ceci nous permet de conclure que :

- le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ est $R=1$;
- la série $\sum a_n$ diverge.

Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation $a_n^3 + na_n - 1 = 0$ peut se récrire $a_n = \frac{1}{n} - \frac{a_n^3}{n}$ et comme $a_n \sim \frac{1}{n}$, on a

$a_n^3 \sim \frac{1}{n^3}$, soit $a_n^3 = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et ainsi :

$$a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Alors, comme la série alternée $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge et la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^4}$ converge absolument :

- la série $\sum (-1)^n a_n$ converge.

Finalement :

$$R=1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge pour } x=1 \text{ et converge pour } x=-1.$$

f. Pour tout entier $n \geq 2$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left| \frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n} \right| = \frac{\ln(n+1)}{\ln n} |x| = \left(1 + \frac{1}{\ln n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) |x| \rightarrow |x|.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $R = 1$.

Les séries $\sum (-1)^n \ln n$ et $\sum \ln n$ divergent grossièrement, donc :

$$R = 1 \text{ et } \sum a_n x^n \text{ diverge sur le bord de l'intervalle de convergence.}$$

De plus, pour tout $x \in]-1; 1[$ et tout entier $N \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} (1-x) \sum_{n=1}^N a_n x^n &= (1-x) \sum_{n=1}^N (\ln n) x^n = \sum_{n=1}^N (\ln n) x^n - \sum_{n=1}^N (\ln n) x^{n+1} = \sum_{n=2}^N (\ln n) x^n - \sum_{n=2}^{N+1} (\ln(n-1)) x^n \\ &= \sum_{n=2}^N [\ln n - \ln(n-1)] x^n + (\ln N) x^{N+1} = - \sum_{n=2}^N \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) x^n + (\ln N) x^{N+1} \end{aligned}$$

Soit, pour tout $x \in]-1; 1[$ et tout entier $N \geq 2$:

$$\sum_{n=1}^N a_n x^n = - \frac{1}{1-x} \sum_{n=2}^N \left[\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right] x^n + \frac{(\ln N) x^{N+1}}{1-x}.$$

Comme $(\ln N) x^{N+1} \rightarrow 0$ quand $N \rightarrow +\infty$, on obtient, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$f(x) = - \frac{1}{1-x} \sum_{n=2}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) x^n.$$

On a $\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o \left(\frac{1}{n^2} \right)$, donc si $b_n = -\ln \left(1 - \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n}$, on a $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.

Et, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} + b_n \right) x^n.$$

On a vu dans le cours que pour tout $x \in]-1; 1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n = -\ln(1-x)$, donc :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \left[\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n \right] = \frac{1}{1-x} \left[-\ln(1-x) - x + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n \right].$$

Comme $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, la série $\sum b_n x^n$ converge normalement sur $[-1; 1]$ et donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} b_n$ est finie.

Enfin, comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} [-\ln(1-x)] = +\infty$, on a $-\ln(1-x) - x + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n x^n \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} -\ln(1-x)$, d'où :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} - \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

Exercice 2

1) a. On a $a_n \sim n^2$ donc :

$$R = 1$$

Pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n + 3}{n+1} x^n = \sum_{n \geq 0} \left(n^2 - n + 2 + \frac{1}{n+1} \right) x^n = \sum_{n \geq 0} n^2 x^n - \sum_{n \geq 0} n x^n + 2 \sum_{n \geq 0} x^n + \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n+1}.$$

Et pour tout $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$:

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} n^2 x^n - \sum_{n \geq 0} n x^n + 2 \sum_{n \geq 0} x^n + \frac{1}{x} \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}.$$

On a :

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad \sum_{n \geq 0} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \sum_{n \geq 0} n^2 x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x).$$

On obtient, pour tout $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$:

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \frac{x(x+1)}{(1-x)^3} - \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x}$$

b. On a $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^3} \rightarrow 0$, on a :

$$R = +\infty$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{(n+1)^2}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{n(n-1) + 3n + 1}{n!} x^n = \sum_{n \geq 2} \frac{x^n}{(n-2)!} + 3 \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{(n-1)!} + \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} = x^2 \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} + 3x \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}.$$

Donc :

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = (x^2 + 3x + 1)e^x$$

c. On a $a_n \sim \frac{1}{n}$, donc :

$$R = 1$$

Pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n - (-1)^n} x^n = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n-1} x^n + \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n+1} x^n.$$

Alors, pour tout $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} a_n x^n &= -1 + x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n-1} x^{n-1} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -1 + x \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} \\ &= -1 + x \sum_{\substack{n \geq 0 \\ n \text{ impair}}} \frac{x^n}{n} + x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} - x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{x} \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} = -1 + x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} + \left(\frac{1}{x} - x\right) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} \\ &= -1 + x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} + \left(\frac{1}{x} - x\right) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^{2n}}{2n} = -1 + x \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{x^n}{n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x\right) \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ pair}}} \frac{(x^2)^n}{n} \end{aligned}$$

Et avec $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, on obtient, pour tout $x \in]-1; 1[\setminus \{0\}$:

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n x^n = -1 - x \ln(1-x) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} - x\right) \ln(1-x^2)}$$

d. On a $\left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| \rightarrow 2 \frac{2n-1}{n+1} |x| = 4|x|$, on a :

$$\boxed{R = \frac{1}{4}}$$

Pour tout $x \in \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[$, on a :

$$\begin{aligned} (1+4x)f'(x) - 2f(x) &= (1+4x) \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} - 2 \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n \geq 0} (n+1) a_{n+1} x^n + 2 \sum_{n \geq 0} (2n-1) a_n x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} (n+1) \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \binom{2n+2}{n+1} x^n + 2 \sum_{n \geq 0} (2n-1) \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n} x^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left[(n+1) \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} + 2(2n-1) \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n} \right] x^n \end{aligned}$$

Donc, on a bien pour tout $x \in \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[$:

$$(1+4x)f'(x) - 2f(x) = 0.$$

Ainsi, f est solution sur $\left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[$ de l'équation différentielle :

$$(E): y' - \frac{2}{1+4x} y = 0.$$

Les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto k\sqrt{1+4x}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Avec $f(0) = a_0 = -1$, on obtient, pour tout $x \in \left] -\frac{1}{4}; \frac{1}{4} \right[$:

$$\boxed{f(x) = -\sqrt{1+4x}}$$

2) a. On a pour tout entier $n \geq 2$:

$$a_n = \frac{2^n + 3^n n}{5^n n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Remarquons que $\frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{2}{5}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc $\sum \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\sum \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ convergent et ainsi, la série $\sum a_n$ converge bien et on peut écrire :

$$\sum_{n \geq 2} a_n = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(n-1)} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n = \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Comme ci-dessus, $\sum \frac{1}{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ et $\sum \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ convergent, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 2} a_n &= \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n-1} \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= \frac{2}{5} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n \\ &= \frac{3}{5} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{3}{5}\right)^n - \frac{3}{5} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{2}{5} \end{aligned}$$

De plus, pour tout $x \in]-1;1[$, on a $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, donc :

$$\sum_{n \geq 2} a_n = \frac{3}{5} \left[-\ln\left(1 - \frac{3}{5}\right) \right] - \frac{3}{5} \left[-\ln\left(1 - \frac{2}{5}\right) \right] + \frac{2}{5}.$$

Soit finalement :

$$\boxed{\sum_{n \geq 2} a_n = \frac{3}{5} \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{5}}$$

b. Ici, la série converge clairement.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = e^z$, donc avec j tel que $j^3 = 1$:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{j^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{(j^2)^n}{n!} = e^1 + e^j + e^{j^2}.$$

Or :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{j^n}{n!} + \sum_{n \geq 0} \frac{(j^2)^n}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{1 + j^n + j^{2n}}{n!}.$$

On a $1 + j + j^2 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- si $n = 3k$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k} + j^{6k} = 3$;
- si $n = 3k + 1$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k+1} + j^{6k+2} = 1 + j + j^2 = 0$;
- si $n = 3k + 2$, $1 + j^n + j^{2n} = 1 + j^{3k+2} + j^{6k+4} = 1 + j^2 + j = 0$.

Donc :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{1 + j^n + j^{2n}}{n!} = \sum_{\substack{n \geq 0 \\ 3|n}} \frac{3}{n!} = \sum_{n \geq 0} \frac{3}{(3n)!} = 3 \sum_{n \geq 0} a_n.$$

Ainsi :

$$3 \sum_{n \geq 0} a_n = e + e^j + e^{j^2}.$$

Avec $j^2 = \bar{j}$, donc $e^{j^2} = e^{\bar{j}} = \overline{e^j}$, on obtient :

$$e^j + e^{j^2} = e^j + \overline{e^j} = 2 \operatorname{Re}(e^j) = 2 \operatorname{Re}(e^{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}) = 2e^{-\frac{1}{2}} \operatorname{Re}(e^{i\frac{\sqrt{3}}{2}}) = \frac{2}{\sqrt{e}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Et finalement :

$$\boxed{\sum_{n \geq 0} a_n = \frac{1}{3} \left[e + \frac{2}{\sqrt{e}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]}$$

Exercice 3

1) On notera R le rayon de convergence de la série entière.

a. On a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{\sin 4x}{\sin x} = \frac{2 \cos 2x \sin 2x}{\sin x} = \frac{4 \cos 2x \cos x \sin x}{\sin x} = 4 \cos 2x \cos x = 2(\cos 3x + \cos x).$$

Remarquons que f est prolongeable par continuité en 0.

La fonction cosinus est développable en série entière sur \mathbb{R} avec $\cos x = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2 \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{(3x)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right)$, soit :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n 2 \frac{9^n + 1}{(2n)!} x^{2n} \text{ avec } R = +\infty}$$

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x^4 - 3x^2 + 2 = (x^2 - 2)(x^2 - 1).$$

Donc, pour tout $X \in \mathbb{R} \setminus \{1; 2\}$:

$$\frac{1}{X^2 - 3X + 2} = \frac{1}{(X-2)(X-1)} = \frac{1}{1-X} - \frac{1}{2-X} = \frac{1}{1-X} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{X}{2}}.$$

Soit, pour tout $X \in]-1; 1[$:

$$\frac{1}{X^2 - 3X + 2} = \sum_{n=0}^{+\infty} X^n - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{X}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) X^n.$$

Donc :

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) x^{2n} \text{ avec } R = 1}$$

c. Posons $u(x) = \frac{1+x}{1-x} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. La fonction u est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et :

$$u'(x) = \frac{2}{(1-x)^2} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

La fonction $f : x \mapsto \arctan(u(x))$ est alors définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, comme composée de u par la fonction arctangente qui est dérivable sur \mathbb{R} .

On a pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2} = \frac{\frac{2}{(1-x)^2} \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1 + \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2} \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2 \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{(1+x^2) \left(1 + \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) - 2x \left(1 - \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)} = \frac{\sin \alpha}{x^2 - 2x \cos \alpha + 1}$$

Donc :

$$f'(x) = \frac{\sin \alpha}{(x - e^{i\alpha})(x - e^{-i\alpha})} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x - e^{i\alpha}} - \frac{1}{x - e^{-i\alpha}} \right) = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{i\alpha}}{1 - e^{i\alpha}x} - \frac{e^{-i\alpha}}{1 - e^{-i\alpha}x} \right).$$

Or, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Alors, pour tout $x \in]-1; 1[$, on a $|e^{i\alpha}x| < 1$ et $|e^{-i\alpha}x| < 1$ donc $\frac{1}{1 - e^{i\alpha}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\alpha}x)^n$ et $\frac{1}{1 - e^{-i\alpha}x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-i\alpha}x)^n$, et :

$$f'(x) = \frac{1}{2i} \left(e^{i\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{i\alpha}x)^n - e^{-i\alpha} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-i\alpha}x)^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{i(n+1)\alpha} - e^{-i(n+1)\alpha}}{2i} x^n.$$

Soit, pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sin((n+1)\alpha) x^n.$$

En intégrant terme à terme et avec $f(0) = \arctan\left(\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \frac{\alpha}{2}$ (car $\frac{\alpha}{2} \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$), on obtient :

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\alpha)}{n+1} x^{n+1} = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n.$$

Remarquons que si $|x| > 1$, alors $\left(\frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas et finalement :

$$f(x) = \frac{\alpha}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\alpha)}{n} x^n \text{ avec } R=1.$$

2) Comme $\operatorname{ch} x = 1$ uniquement en $x = 0$, la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{ch} x - 1}$ est définie et de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* en tant que différence de telles fonctions et on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{ch} x - 1} = \frac{2(\operatorname{ch} x - 1) - x^2}{x^2(\operatorname{ch} x - 1)}.$$

La fonction ch est développable en série entière sur \mathbb{R} avec $\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$2(\operatorname{ch} x - 1) - x^2 = 2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1 \right) - x^2 = 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+4}}{(2n+4)!} = x^4 g(x) \text{ avec } g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+4)!} x^{2n}$$

$$x^2(\operatorname{ch} x - 1) = x^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - 1 \right) = x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} = x^4 h(x) \text{ avec } h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!}$$

Alors, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{x^4 g(x)}{x^4 h(x)} = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Remarquons que $h(0) = \frac{1}{2} \neq 0$ et sur \mathbb{R}^* , $x^2 h(x) = \operatorname{ch} x - 1 \neq 0$ donc $h(x) \neq 0$. Ainsi, h ne s'annule pas sur \mathbb{R} .

De plus, les fonctions g et h sont (de par leur définition) développables en série entière sur \mathbb{R} , donc de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

On a alors $\lim_0 f = \frac{g(0)}{h(0)} = \frac{1}{6}$ donc f est prolongeable par continuité en 0 et, ainsi prolongée, $f = \frac{g}{h}$ est le quotient de deux fonctions C^∞ sur \mathbb{R} dont le dénominateur ne s'annule jamais, donc :

La fonction f se prolonge par continuité en une fonction de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 4

1) Notons $R > 0$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $] -R; R[$ avec :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \text{ et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n.$$

Comme f est solution de (E), on a pour tout $x \in] -R; R[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + b \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + c \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + b(n+1) a_{n+1} + c a_n] x^n = 0.$$

Or, une série entière est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+2)(n+1) a_{n+2} + b(n+1) a_{n+1} + c a_n = 0$$

2) Si $c = -b - 1$, l'équation (E) devient $y'' + by' - (b+1)y = 0$ et la relation ci-dessus s'écrit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+2} = -\frac{b}{n+2} a_{n+1} + \frac{b+1}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

L'équation caractéristique associée à (E) est $r^2 + br - (b+1) = 0$ de discriminant $\Delta = b^2 + 4(b+1) = (b+2)^2$.

Les racines sont $r_1 = \frac{-b + (b+2)}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{-b - (b+2)}{2} = -b - 1$, et 1 est une racine double quand $b = -2$.

- Quand $b = -2$, les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, soit :

$$x \mapsto (\lambda x + \mu) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda n + \mu}{n!} x^n.$$

Par unicité du développement en série entière, on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{\lambda n + \mu}{n!}$.

- Quand $b \neq -2$, les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-(b+1)x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, soit :

$$x \mapsto \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-(b+1)x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda + \mu(-b-1)^n}{n!} x^n.$$

Et, toujours par unicité du développement en série entière, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{\lambda + \mu(-b-1)^n}{n!}$.

Finalement, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \begin{cases} \frac{\lambda + \mu(-b-1)^n}{n!} & \text{quand } b \neq -2 \\ \frac{\lambda n + \mu}{n!} & \text{quand } b = -2 \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$$

Exercice 5

- 1) a. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$ et f est bornée sur $[0; 1[$, il existe un réel $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in [0; 1[, \quad 0 \leq \sum_{k=0}^n a_k x^k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = f(x) \leq M.$$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1[$, $0 \leq \sum_{k=0}^n a_k x^k \leq M$ et en passant à la limite quand $x \rightarrow 1^-$, on

obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sum_{k=0}^n a_k \leq M$. Ainsi, $\sum a_n$ est une série à termes positifs dont les sommes partielles sont majorées par un réel fixé, donc :

La série $\sum a_n$ converge.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [-1; 1]$, $|a_n x^n| \leq a_n$ et $\sum a_n$ converge, donc la série $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-1; 1]$. Sa somme est alors continue sur ce segment et donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$, soit :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n$$

- b. Prenons $a_n = (-1)^n$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0; 1[$:

$$\sum_{k=0}^n a_k x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^n (-x)^k = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x}.$$

Donc, on a bien $R = 1$ et $f : x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est bornée sur $[0; 1[$.

Par contre, série $\sum a_n = \sum (-1)^n$ diverge, donc :

Le résultat ne subsiste pas quand les a_n sont de signe quelconque.

2) a. Posons $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$.

Commençons par remarquer que la série $\sum \frac{S}{(n+1)(n+2)}$ converge absolument, avec :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} = S \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = S.$$

La série entière $\sum \frac{S}{(n+1)(n+2)} x^n$ admet 1 pour rayon de convergence et converge alors normalement sur $[-1; 1]$ et sa somme est continue sur ce segment, d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} x^n = \sum_{n \geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} = S.$$

Posons $b_n = a_n R^n - \frac{S}{(n+1)(n+2)}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n b_k x^k = \sum_{k=0}^n a_k (Rx)^k - \sum_{k=0}^n \frac{S}{(k+1)(k+2)} x^k.$$

Comme le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est 1, $\sum a_n (Rx)^n$ converge pour $|Rx| < R$, soit $|x| < 1$ et diverge pour $|Rx| > R$, soit $|x| > 1$, donc le rayon de convergence de $\sum a_n (Rx)^n$ est 1 et ainsi, celui de $\sum b_n x^n$ est aussi égal à 1. De plus, on a :

$$\sum_{n \geq 0} b_n = \sum_{n \geq 0} \left(a_n R^n - \frac{S}{(n+1)(n+2)} \right) = \sum_{n \geq 0} a_n R^n - \sum_{n \geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} = S - S = 0.$$

Et enfin, si on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, on a pour tout $x \in]-1; 1[$, $g(x) = f(Rx) - \sum_{k=0}^n \frac{S}{(k+1)(k+2)} x^k$ et, comme

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} \frac{S}{(n+1)(n+2)} x^n = S$, on a :

$$\lim_{x \rightarrow R} f(x) = S \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(Rx) = S \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(f(Rx) - \sum_{k=0}^n \frac{S}{(k+1)(k+2)} x^k \right) = S \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 0.$$

Finalement, on a $\lim_{x \rightarrow R} f(x) = S$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{n \geq 0} b_n x^n = 0$ où rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est 1 et

$\sum_{n \geq 0} b_n = 0$. Ceci prouve que :

On peut se ramener au cas où $R = 1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

b. Pour tout $x \in]0; 1[$ et tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (S_n - S_{n-1}) x^n &= \sum_{n=0}^N S_n x^n - \sum_{n=0}^N S_{n-1} x^n = \sum_{n=0}^N S_n x^n - \sum_{n=1}^N S_{n-1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^N S_n x^n - \sum_{n=0}^{N-1} S_n x^{n+1} = \sum_{n=0}^N S_n x^n - \sum_{n=0}^N S_n x^{n+1} + S_N x^{N+1} \end{aligned}$$

Soit :

$$\sum_{n=0}^N (S_n - S_{n-1})x^n = \sum_{n=0}^N S_n (x^n - x^{n+1}) + S_N x^{N+1}$$

c. Soit $x \in]0;1[$. On a :

- $S_N = \sum_{k=0}^N a_k \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k = 0$, donc $S_N x^{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n - S_{n-1} = a_n$, donc $\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N (S_n - S_{n-1})x^n = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = f(x)$;
- pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\sum_{n=0}^N S_n (x^n - x^{n+1}) = (1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n$.

La relation de la question précédente permet de conclure que $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$ existe et que pour tout $x \in]0;1[$:

$$f(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n$$

On a vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 0$, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a $|S_n| \leq \varepsilon$.

Alors, pour tout $x \in]0;1[$ et tout entier $n > N$:

$$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |S_n| x^n \leq \varepsilon \sum_{n=N+1}^{+\infty} x^n \leq \varepsilon \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{\varepsilon}{1-x}.$$

Donc :

$$|f(x)| = (1-x) \left| \sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \right| = (1-x) \left| \sum_{n=0}^N S_n x^n + \sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n \right| \leq (1-x) \left| \sum_{n=0}^N S_n x^n \right| + (1-x) \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} S_n x^n \right| \leq (1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n + \varepsilon.$$

Et la fonction $x \mapsto (1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n$ est polynomiale donc continue sur \mathbb{R} et s'annule en 1, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n = 0.$$

Alors, il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que pour tout $x \in]1-\alpha;1[$, on a $\left| (1-x) \sum_{n=0}^N S_n x^n \right| \leq \varepsilon$ et finalement :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in]0;1[, \forall x \in]1-\alpha;1[, |f(x)| \leq 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

Exercice 6

1) a. Remarquons déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} = a_0 c_n + \sum_{k=1}^n a_k c_{n-k} = c_n + \sum_{k=1}^n a_k c_{n-k}$, donc :

$$\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} = 0 \Leftrightarrow c_n = - \sum_{k=1}^n a_k c_{n-k} = -a_1 c_{n-1} - a_2 c_{n-2} - \dots - a_{n-1} c_1 - a_n c_0.$$

Comme $c_0 = 1$, la suite est définie de manière unique par récurrence (forte : un terme dépend de tous les précédents). Ainsi :

Il existe bien une unique suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $c_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} = 0$.

b. Si $r \in]0; R[$, la série $\sum a_n r^n$ converge, donc $a_n r^n \rightarrow 0$. Or, toute suite convergente est bornée, donc $(a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et ainsi :

Il existe bien un réel $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n r^n| \leq M$.

La suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant définie par récurrence forte, prouvons l'inégalité voulue par récurrence forte.

Au rang $n=1$, on a $c_1 = -a_1 c_0 = -a_1$, donc, avec $|a_1 r^1| \leq M$, on a :

$$|c_1| = |a_1| \leq \frac{M}{r} = \frac{M(M+1)^{1-1}}{r^1}.$$

L'inégalité est vraie au rang $n=1$.

Supposons l'inégalité vraie jusqu'à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$|c_{n+1}| = \left| - \sum_{k=1}^{n+1} a_k c_{n+1-k} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} a_k c_{n+1-k} \right| \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| |c_{n+1-k}| = \sum_{k=1}^n |a_k| |c_{n+1-k}| + |a_{n+1}| |c_0| = \sum_{k=1}^n |a_k| |c_{n+1-k}| + |a_{n+1}|.$$

Or, $|a_{n+1}| \leq \frac{M}{r^{n+1}}$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $|a_k| \leq \frac{M}{r^k}$ et, $n+1-k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, donc par hypothèse de récurrence, on a

$$|c_{n+1-k}| \leq \frac{M(M+1)^{n+1-k-1}}{r^{n+1-k}} \frac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}}. \text{ Ainsi :}$$

$$|c_{n+1}| \leq \sum_{k=1}^n \frac{M}{r^k} \frac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}} + \frac{M}{r^{n+1}}.$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{M}{r^k} \frac{M(M+1)^{n-k}}{r^{n+1-k}} + \frac{M}{r^{n+1}} &= \frac{M^2}{r^{n+1}} \sum_{k=1}^n (M+1)^{n-k} + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M^2}{r^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} (M+1)^k + \frac{M}{r^{n+1}} \\ &= \frac{M^2}{r^{n+1}} \frac{(M+1)^n - 1}{(M+1) - 1} + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^{n+1}} \left[(M+1)^n - 1 \right] + \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M(M+1)^{(n+1)-1}}{r^{n+1}} \end{aligned}$$

Donc $|c_{n+1}| \leq \frac{M(M+1)^{(n+1)-1}}{r^{n+1}}$ et l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

Finalement, la propriété est initialisé et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, |c_n| \leq \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}.$$

c. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| c_n \left(\frac{r}{M+1} \right)^n \right| \leq \frac{M}{M+1}$. Donc la suite $\left(c_n \left(\frac{r}{M+1} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, ce qui prouve que la série entière $\sum c_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à $\frac{r}{M+1} > 0$, donc :

$$\boxed{\sum c_n x^n \text{ a un rayon de convergence non nul.}}$$

Si on appelle R'' le rayon de convergence de $h(x) = \sum c_n x^n$ et $\rho = \min(R, R'')$, on a pour tout $x \in]-\rho; \rho[$:

$$f(x)h(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k c_{n-k} \right) x^n = a_0 c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 x^n = 1.$$

Donc, $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ sur $]-\rho; \rho[$, ce qui prouve que :

$$\boxed{\frac{1}{f} \text{ est développable en série entière au voisinage de 0.}}$$

2) On a $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ avec $R' = 1$, donc g est de classe C^∞ sur $] -1; 1[$ avec $g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n b_n x^{n-1}$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n > 0$, on a $g'(x) > 0$ sur $]0; 1[$, donc g est strictement croissante sur cet intervalle.

Si g est bornée sur $]0; 1[$, alors on se retrouve dans la situation de la question 1 de l'exercice 5, donc $\sum b_n$ converge, ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi, g est croissante et non bornée sur $]0; 1[$ donc :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty}$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in \mathbb{R}$, alors pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a, avec $b_n > 0$:

$$\ell - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \ell + \varepsilon \Leftrightarrow (\ell - \varepsilon)b_n \leq a_n \leq (\ell + \varepsilon)b_n.$$

Alors, pour tout $x \in]0; 1[$ et tout entier $n > N$:

$$\sum_{k=N+1}^n (\ell - \varepsilon)b_k x^k \leq \sum_{k=N+1}^n a_k x^k \leq \sum_{k=N+1}^n (\ell + \varepsilon)b_k x^k \Leftrightarrow (\ell - \varepsilon) \sum_{k=N+1}^n b_k x^k \leq \sum_{k=N+1}^n a_k x^k \leq (\ell + \varepsilon) \sum_{k=N+1}^n b_k x^k.$$

Soit en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, pour tout $x \in]0; 1[$:

$$(\ell - \varepsilon)(g(x) - g_N(x)) \leq f(x) - f_N(x) \leq (\ell + \varepsilon)(g(x) - g_N(x)).$$

avec $f_N(x) = \sum_{k=0}^N a_k x^k$ et $g_N(x) = \sum_{k=0}^N b_k x^k$.

Comme $g(x) > 0$ sur $]0; 1[$, on a, pour tout $x \in]0; 1[$:

$$\ell - \varepsilon + \frac{f_N(x) - (\ell - \varepsilon)g_N(x)}{g(x)} \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + \varepsilon + \frac{f_N(x) - (\ell + \varepsilon)g_N(x)}{g(x)}.$$

Or, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} [f_N(x) - (\ell \pm \varepsilon)g_N(x)] = f_N(1) - (\ell \pm \varepsilon)g_N(1)$, donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f_N(x) - (\ell \pm \varepsilon)g_N(x)}{g(x)} = 0$ et ainsi, il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que pour tout $x \in]1-\alpha;1[$, on a :

$$-\varepsilon \leq \frac{f_N(x) - (\ell - \varepsilon)g_N(x)}{g(x)} \leq \varepsilon \text{ et } -\varepsilon \leq \frac{f_N(x) - (\ell + \varepsilon)g_N(x)}{g(x)} \leq \varepsilon.$$

Finalement, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha \in]0;1[$ tel que pour tout $x \in]1-\alpha;1[$, on a :

$$\ell - 2\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \ell + 2\varepsilon.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell}$$

Exercice 7

1) Comme les fonctions f et $x \mapsto x$ sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} , φ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* en tant que quotient de telles fonctions. De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0).$$

Donc :

En posant $\varphi(0) = f'(0)$, on prolonge φ en une fonction continue sur \mathbb{R} .

2) Sur \mathbb{R}^* , on a $\varphi = hf$ avec $h: x \mapsto \frac{1}{x}$, qui est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* .

Avec la formule de Leibniz, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} h^{(n-k)} f^{(k)}$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\varphi^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{(-1)^{n-k} (n-k)!}{x^{n-k+1}} f^{(k)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(-x)^k f^{(k)}(x)}{k!}.$$

Or, la formule de Taylor avec reste intégrale appliquée à f (de classe C^∞ sur \mathbb{R}) entre x et 0 donne :

$$f(0) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (-x)^k + \int_x^0 \frac{(-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Soit, avec $f(0) = 0$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (-x)^k = - \int_x^0 \frac{(-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Ainsi :

$$\varphi^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt = \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$\boxed{x^{n+1} \varphi^{(n)}(x) = \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est de classe C^∞ sur \mathbb{R} , $f^{(n+1)}$ est continue en 0, donc pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$, $|f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(0)| \leq \varepsilon$ et donc :

$$|t^n (f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(0))| \leq \varepsilon |t^n|.$$

Alors, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$ et tout $t \in [0, x]$ ou $[x, 0]$, on a $t \in [-\alpha, \alpha]$ et donc :

$$\left| \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt - \int_0^x t^n f^{(n+1)}(0) dt \right| = \left| \int_0^x t^n (f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(0)) dt \right| \leq \left| \int_0^x |t^n| (f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(0)) dt \right| \leq \left| \int_0^x \varepsilon |t^n| dt \right|.$$

Or :

$$\left| \int_0^x \varepsilon |t^n| dt \right| = \begin{cases} \varepsilon \int_0^x t^n dt = \varepsilon \frac{x^{n+1}}{n+1} & \text{quand } x \geq 0 \\ \varepsilon \left| \int_0^x (-t)^n dt \right| = \varepsilon (-1)^n \int_x^0 t^n dt = \varepsilon \frac{(-x)^{n+1}}{n+1} & \text{quand } x \leq 0 \end{cases}$$

Dans les deux cas, $\left| \int_0^x \varepsilon |t^n| dt \right| = \varepsilon \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$ et donc, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$:

$$\left| \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt - \int_0^x t^n f^{(n+1)}(0) dt \right| \leq \varepsilon \frac{|x|^{n+1}}{n+1}.$$

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x t^n f^{(n+1)}(t) dt - \int_0^x t^n f^{(n+1)}(0) dt \right| &= \left| x^{n+1} \varphi^{(n)}(x) - f^{(n+1)}(0) \int_0^x t^n dt \right| \\ &= \left| x^{n+1} \varphi^{(n)}(x) - f^{(n+1)}(0) \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| = |x|^{n+1} \left| \varphi^{(n)}(x) - \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \right| \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in [-\alpha, \alpha]$, $|x|^{n+1} \left| \varphi^{(n)}(x) - \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \right| \leq \varepsilon \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$ soit pour tout $x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$:

$$\left| \varphi^{(n)}(x) - \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

Finalement, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$:

$$\left| \varphi^{(n)}(x) - \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}.$$

Par définition, ceci veut dire que :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \varphi^{(n)}(x) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}}$$

4) La fonction $\tilde{\varphi}$ est donc de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* , continue en 0 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi^{(n)}$ admet une limite finie en 0, qui est $\frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$. Ceci permet de conclure que $\tilde{\varphi}$ est de classe C^∞ en 0 et ainsi que :

$$\boxed{\tilde{\varphi} \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} .}$$

5) On suppose ici que f est développable en série entière au voisinage de 0, autrement dit qu'il existe un réel $R > 0$ et une suite de réels $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Comme $f(0) = 0$, on a $a_0 = 0$ et $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^{n+1}$. Donc, pour tout $x \in]-R, R[\setminus \{0\}$:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1} x^n.$$

Ceci prouve que φ , donc $\tilde{\varphi}$, sont développables en série entière au voisinage de 0, donc que $\tilde{\varphi}$ est de classe C^∞ en 0, et ainsi :

$\tilde{\varphi}$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

Exercice 8

1) Comme $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq M$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\left| \frac{a_n}{n!} x^n \right| = |a_n| \frac{|x|^n}{n!} \leq M \frac{|x|^n}{n!}$ et la série $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ converge, donc $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$ est absolument convergente ;
- $|S_n| = \left| \sum_{k=0}^n a_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| \leq \sum_{k=0}^n M = (n+1)M$, donc $\left| \frac{S_n}{n!} x^n \right| \leq M(n+1) \frac{|x|^n}{n!} = M \frac{n|x|^n}{n!} + M \frac{|x|^n}{n!}$, et pour $n \geq 1$, $\frac{n|x|^n}{n!} = \frac{|x|^n}{(n-1)!}$; comme les séries $\sum \frac{|x|^n}{n!}$ et $\sum \frac{|x|^n}{(n-1)!}$ convergent, $\sum \frac{S_n}{n!} x^n$ est absolument convergente.

Ainsi :

Le rayon de convergence des séries entières f et g est $+\infty$.

2) Les fonctions f et g étant des sommes de séries entières de rayon de convergence infini, elles sont de classe C^∞ sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n!} n x^{n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n.$$

De même $g'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{S_{n+1}}{n!} x^n$. Comme $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$, on a :

$$g'(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{S_n + a_{n+1}}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{S_n}{n!} x^n + \frac{a_{n+1}}{n!} x^n \right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{S_n}{n!} x^n + \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n = g(x) + f'(x).$$

Ainsi :

$$g' = g + f'$$

3) Les fonctions $x \mapsto -e^{-x}$ et f sont toutes les deux de classe C^1 sur \mathbb{R} , donc une intégration par parties donne pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \int_0^x e^{-t} f(t) dt &= \left[-e^{-t} f(t) \right]_0^x - \int_0^x (-e^{-t}) f'(t) dt \\ &= \left[-e^{-t} f(t) \right]_0^x + \int_0^x e^{-t} f'(t) dt \\ &= \left[-e^{-t} f(t) \right]_0^x + \int_0^x e^{-t} (g'(t) - g(t)) dt \end{aligned}$$

Or, $t \mapsto e^{-t} (g'(t) - g(t))$ est la dérivée de $t \mapsto e^{-t} g(t)$, donc :

$$\int_0^x e^{-t} f(t) dt = \left[-e^{-t} f(t) \right]_0^x + \left[e^{-t} g(t) \right]_0^x = -e^{-x} f(x) + f(0) + e^{-x} g(x) - g(0) = e^{-x} (g(x) - f(x)) + f(0) - g(0).$$

Enfin, $f(0) = a_0 = S_0 = g(0)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\int_0^x e^{-t} f(t) dt = e^{-x} (g(x) - f(x))}$$

4) Si $a_n = (-1)^n$, on a :

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{quand } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{quand } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{S_n}{n!} x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}, n \text{ pair}} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \text{ch } x.$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \text{ch } x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + e^{-2x}}{2}.$$

Soit, quand $a_n = (-1)^n$:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} g(x) = \frac{1}{2}}$$

5) On suppose que la série $\sum a_n$ converge, ce qui implique (entre autres) que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $|a_n| \leq \varepsilon$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout entier $n \geq N$, $\left| \frac{a_n}{n!} x^n \right| \leq \varepsilon \frac{x^n}{n!}$, donc :

$$|f(x)| = \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} x^n \right| \leq \left| \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n!} x^n \right| + \sum_{n \geq N+1} \left| \frac{a_n}{n!} x^n \right| \leq \left| \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n!} x^n \right| + \sum_{n \geq N+1} \varepsilon \frac{x^n}{n!} = \left| \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n!} x^n \right| + \varepsilon \left(e^x - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right).$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\left| e^{-x} f(x) \right| \leq e^{-x} \left| \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n!} x^n \right| + \varepsilon e^{-x} \left(e^x - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!} \right) = \left| \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n \right| - \sum_{n=0}^N \frac{e^{-x} x^n}{n!} + \varepsilon.$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} x^n = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n - \sum_{n=0}^N \frac{e^{-x} x^n}{n!} \right] = 0$ et il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout réel $x \geq A$, $\left| \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n!} e^{-x} x^n - \sum_{n=0}^N \frac{e^{-x} x^n}{n!} \right| \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout réel $x \geq A$, $|e^{-x} f(x)| \leq 2\varepsilon$, ce qui prouve que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} f(x) = 0.$$

Si on note S la somme de la série $\sum a_n$, la suite $(S_n - S)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 et on montre comme ci-dessus que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left(g(x) - \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{S}{n!} x^n \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{S_n - S}{n!} x^n \right) = 0.$$

Or, $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{S}{n!} x^n = S \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{x^n}{n!} = S e^x$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} (g(x) - S e^x) = 0$, soit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} g(x) = S.$$

Alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} (g(x) - f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} g(x) - e^{-x} f(x)) = S - 0 = S.$$

Et ainsi :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x e^{-t} f(t) dt = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n}$$

Exercice 9

1) On a $\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc pour tout réel x :

- si $|x| < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n = 0$, donc $\left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée ;
- si $|x| > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}} = +\infty$, donc $\left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée.

Alors, d'après le lemme d'Abel :

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série entière } f \text{ est } R = 1.}$$

La suite $\left(\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroît vers 0, donc la série $\sum \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) (-1)^n$ vérifie le critère spécial des séries alternées : elle converge.

Comme $\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la série de Riemann $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge, la série $\sum \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge.

Ainsi :

La série $\sum \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n$ converge quand $x = -1$ et diverge quand $x = 1$.

2) Pour tout $x \in]-1, 1[$, on a :

$$\begin{aligned}
 (1-x)f(x) &= (1-x) \sum_{n \geq 1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n \\
 &= \sum_{n \geq 1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n - \sum_{n \geq 1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^{n+1} \\
 &= \sum_{n \geq 1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x^n - \sum_{n \geq 2} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)x^n \\
 &= \tan(1)x + \sum_{n \geq 2} \left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right] x^n \\
 &= \tan(1)x - \sum_{n \geq 2} \left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] x^n
 \end{aligned}$$

Et pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) > 0$ avec :

$$a_n = \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)}{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}.$$

On a :

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}\sqrt{n-1}} = \frac{1}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})\sqrt{n}\sqrt{n-1}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n\sqrt{n}}.$$

Comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n\sqrt{n}}$ converge, la série $\sum a_n$ converge, donc la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[0, 1]$: sa somme est donc continue sur ce segment, donc en 1. Alors :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sum_{n \geq 2} \left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] x^n = \sum_{n \geq 2} \left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right].$$

Et, par télescopage :

$$\sum_{n \geq 2} \left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] = \tan\left(\frac{1}{\sqrt{2-1}}\right) = \tan(1).$$

Ainsi :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\tan(1)x - \sum_{n \geq 2} \left[\tan\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right] x^n \right) = \tan(1) - \tan(1).$$

Soit :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)f(x) = 0$$

Exercice 10

Posons $f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$.

En supposant que le rayon de convergence R de cette série entière est strictement positif, la série $\sum a_n x^n$ converge absolument pour tout $x \in]-R, R[$. On peut appliquer la formule du produit de Cauchy :

$$f(x)^2 = \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) = \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n (a_k x^k)(a_{n-k} x^{n-k}) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) x^n = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^n.$$

Donc :

$$x f(x)^2 = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n \geq 1} a_n x^n = f(x) - a_0 = f(x) - 1.$$

Ainsi, pour tout $x \in]-R, R[$, $x f(x)^2 - f(x) + 1 = 0$, donc au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Or, f est continue sur $]-R, R[$, donc :

- f continue au voisinage de 0, donc $f(x)$ vaut soit toujours $\frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x}$, soit toujours $\frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ au voisinage de 0 ;
- f est continue en 0 avec $f(0) = a_0 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \sqrt{1-4x}}{2x} = +\infty$, donc $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}$ au voisinage de 0.

Or, au voisinage de 0 :

$$\begin{aligned} \sqrt{1-4x} &= 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \dots \left(\frac{1}{2} - n + 1 \right) (-4x)^n = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (-1)^{n-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \dots \left(\frac{2n-3}{2} \right) (-4)^n x^n \\ &= 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} 1 \times 3 \times \dots \times (2n-3) \times 2^n x^n = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} 2x^n = 1 - \sum_{n \geq 0} \frac{(2n)!}{(n+1)!n!} 2x^{n+1} \\ &= 1 - 2x \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n \end{aligned}$$

Ainsi, au voisinage de 0 :

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n.$$

Remarquons que le rayon de convergence de cette série est $\frac{1}{4} > 0$.

Par unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Réciproquement, si on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ et $f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$, on a, pour tout $x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$:

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2x}.$$

Donc, $xf(x)^2 = f(x) - 1$ avec :

$$xf(x)^2 = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n b_k b_{n-k} \right) x^{n+1}$$
$$f(x) - 1 = \sum_{n \geq 1} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} b_{n+1} x^{n+1}$$

Et, à nouveau grâce à l'unicité du développement en série entière, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} = \sum_{k=0}^n b_k b_{n-k}.$$

Enfin, $b_0 = \frac{1}{0+1} \binom{0}{0} = 1$, donc les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont le même premier terme et vérifient la même relation de récurrence, donc elles sont égales et finalement :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.