Corrigés des TD du chapitre 8

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, on note $(e_1,...,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Exercice 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une éventuelle valeur propre de *u* et *f* un vecteur propre associé. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(f)(x) = \lambda f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{h(x)}\int_0^x h(t)f(t)dt = \lambda f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^x h(t)f(t)dt = \lambda h(x)f(x).$$

Si on pose $F(x) = \int_0^x h(t)f(t)dt$, alors $F(0)=0$ et *F* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$u(f)(x) = \lambda f(x) \quad \Leftrightarrow \quad F(x) = \lambda F'(x).$$

Distinguons alors deux cas.

- Si $\lambda = 0$, alors $F = 0$, donc $f = 0$, ce qui est absurde car *f* est un vecteur propre.
  Donc, 0 n'est pas valeur propre de *u*.
- Si $\lambda \neq 0$, alors *F* et solution de $y' = \frac{1}{\lambda}y$, donc $F : x \mapsto Ke^{\frac{x}{\lambda}}$ et $F(0)=0$ donne $K=0$, donc on a à nouveau $F=0$, d'où $f=0$, ce qui est absurde car *f* est un vecteur propre. Ainsi, tout $\lambda \neq 0$ n'est pas valeur propre de *u*.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ n'a pas d'élément propre.}}$$

Exercice 2

Soient $(P_1,P_2) \in \mathbb{C}[X]^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$. Pour $i=1$ ou 2, la division euclidienne de P_i par *A* s'écrit $P_i = Q_iA + R_i$ avec $Q_i, R_i \in \mathbb{C}[X]$ et $\deg R_i < n$. On a alors :

$$\lambda P_1 + \mu P_2 = \lambda(Q_1A+R_1) + \mu(Q_2A+R_2) = (\lambda Q_1 + \mu Q_2)A + \lambda R_1 + \mu R_2.$$

Et $(R_1,R_2) \in \mathbb{C}_{n-1}[X]^2$, donc $\lambda R_1 + \mu R_2 \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, ce qui donne :

$$\deg\left(\lambda R_1 + \mu R_2\right) < n.$$

Par unicité de la division euclidienne, $\lambda R_1 + \mu R_2$ est donc le reste de la division euclidienne de $\lambda P_1 + \mu P_2$ par *A*, ce qui prouve que $f\left(\lambda P_1 + \mu P_2\right) = \lambda f(P_1) + \mu f(P_2)$ et donc que *f* est linéaire. Comme le reste d'une division euclidienne de polynômes est un polynôme, *f* est bien à images dans $\mathbb{C}[X]$ et donc :

$$\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{C}[X].}$$

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une éventuelle valeur propre de *f* et $P \neq 0$ un vecteur propre associé. Si $P = QA + R$ avec $\deg R < n$ est la division euclidienne de *P* par *A*, alors on a :

$$f(P) = R = \lambda(QA+R) \quad \Rightarrow \quad (1-\lambda)R = \lambda QA.$$

- Si $\lambda = 0$, alors $R = 0$, donc $P = QA$.
- Si $\lambda \neq 0$ et $Q = 0$, alors $(1-\lambda)R = 0$ et $R \neq 0$ (sinon $P = 0A + 0 = 0$), donc $\lambda = 1$ et $P = R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.
- Si $\lambda \neq 0$ et $Q \neq 0$, alors $\deg\big((1-\lambda)R\big) = \deg(\lambda QA) = \deg(\lambda QA) = \deg(Q) + \deg(A) \geq n$, ce qui est absurde car $\deg\big((1-\lambda)R\big) \leq \deg R < n$.

Ainsi, soit $\lambda = 0$ et $A \mid P$, soit $\lambda = 1$ et $P = R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$.

Réciproquement, toujours avec la division euclidienne $P = QA + R$ ($\deg R < n$), on a :

- si $A \mid P$, alors $R = f(P) = 0$;
- si $P = R \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$, alors $f(P) = R = P$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont 0 et 1, avec } E_0 = \{AQ, Q \in \mathbb{C}[X]\} = A.\mathbb{C}[X] \text{ et } E_1 = \mathbb{C}_{n-1}[X].}$$

Exercice 3

1) Il est clair que *f* est à images dans *E*.

Soient u et u' deux suites de *E* et *a* et *b* deux réels. On pose $v = f(u)$, $v' = f(u')$ et $V = f(au + bu')$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(au_k + bu_k') = a\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k + b\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k' = av_n + bv_n'.$$

Donc, $V = av + bv'$, soit $f(au + bu') = af(u) + bf(u')$ et ainsi, *f* est linéaire, ce qui finit de prouver que :

$$\boxed{f \text{ est endomorphisme de } E.}$$

2) Comme la suite u est un élément propre de *f*, elle n'est pas la suite nulle donc possède au moins un terme non nul. Ceci revient à dire que l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \setminus u_n \neq 0\}$ n'est pas vide.

Or, cet ensemble est une partie de $\mathbb{N}$, donc il possède un plus petit élément. Ainsi :

$$\boxed{p = \min\{n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0\} \text{ existe.}}$$

Si λ est la valeur propre de *f* associée à u, si $v = f(u)$, on a $v = \lambda u$, soit pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k = \lambda u_n.$$

Comme $p = \min\{n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0\}$, on a $u_k = 0$ pour tout entier $k < p$. Alors :

$$v_p = \frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}u_k = \frac{1}{p+1}u_p = \lambda u_p.$$

Et comme $u_p \neq 0$, on obtient :

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{p+1}}$$

3) Soient $p\in\mathbb{N}$ et $m\in\mathbb{N}$.

Si $m=0$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0}\binom{p+k}{k}=\binom{p}{0}=1=\binom{p+1}{0}$.

Si $m\geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}\binom{p+1+k}{k}&=1+\sum_{k=1}^{m}\binom{p+1+k}{k}\\&=1+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{p+1+k+1}{k+1}\\&=1+\sum_{k=0}^{m-1}\left[\binom{p+1+k}{k}+\binom{p+1+k}{k+1}\right]\quad\text{(à l'aide de la formule de Pascal)}\\&=1+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{p+1+k}{k}+\sum_{k=0}^{m-1}\binom{p+1+k}{k+1}\\&=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{p+1+k}{k}+1+\sum_{k=1}^{m}\binom{p+k}{k}\\&=\sum_{k=0}^{m-1}\binom{p+1+k}{k}+\sum_{k=0}^{m}\binom{p+k}{k}\end{aligned}$$

Donc :

$$\binom{p+1+m}{m}=\sum_{k=0}^{m}\binom{p+1+k}{k}-\sum_{k=0}^{m-1}\binom{p+1+k}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{p+k}{k}.$$

Ainsi, on a bien pour tous $p,m\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{m}\binom{p+k}{k}=\binom{p+m+1}{m}}$$

4) On a $v=f(u)=\dfrac{1}{p+1}u$ avec $u_k=0$ pour tout entier $k<p$ et pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$v_{p+m}=\frac{1}{p+m+1}\sum_{k=0}^{p+m}u_k=\frac{1}{p+m+1}\sum_{k=p}^{p+m}u_k=\frac{1}{p+1}u_{p+m}$$

Ceci donne :

$$\sum_{k=p}^{p+m-1}u_k=\frac{p+m+1}{p+1}u_{p+m}-u_{p+m}\quad\Rightarrow\quad u_{p+m}=\frac{p+1}{m}\sum_{k=p}^{p+m-1}u_k$$

On a alors :

- $u_{p+1}=(p+1)u_p$;
- $u_{p+2}=\dfrac{p+1}{2}\left(u_p+u_{p+1}\right)=\dfrac{(p+1)(p+2)}{2}u_p$;
- $u_{p+3}=\dfrac{p+1}{3}\left(u_p+u_{p+1}+u_{p+2}\right)=\dfrac{(p+1)(p^2+5p+6)}{6}u_p=\dfrac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}u_p$; …

On conjecture que pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$u_{p+m}=\frac{(p+1)(p+2)...(p+m)}{m!}u_p=\frac{(p+m)!}{p!m!}u_p=\binom{p+m}{m}u_p.$$

On prouve cette formule par récurrence forte sur m.

On vient de voir que cette formule est vraie pour $m=1$, $m=2$ et $m=3$ (dans sa version avec coefficient binomial, elle l'est même pour $m=0$).

Supposons alors qu'elle soit vraie jusqu'à un rang $m\in\mathbb{N}$. On a alors :

$$u_{p+m+1}=\frac{p+1}{m+1}\sum_{k=p}^{p+m}u_k=\frac{p+1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}u_{p+k}\underset{\text{par H.R.}}{=}\frac{p+1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{p+k}{k}u_p=\frac{p+1}{m+1}\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{p+k}{k}\right]u_p.$$

Et, d'après la question précédente :

$$u_{p+m+1}=\frac{p+1}{m+1}\binom{p+m+1}{m}u_p=\frac{p+1}{m+1}\frac{(p+m+1)!}{m!(p+1)!}u_p=\frac{(p+m+1)!}{(m+1)!\,p!}u_p=\binom{p+m+1}{m+1}u_p.$$

La formule est donc vérifiée au rang $m+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $m\in\mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{u_{p+m}=\binom{p+m}{m}u_p}$$

5) Pour tout $p\in\mathbb{N}$, notons $\alpha^{(p)}$ la suite nulle jusqu'au rang p et telle que pour tout entier $n\geq p$:

$$\alpha_n^{(p)}=\binom{n}{n-p}.$$

Alors :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } f \text{ sont les } \frac{1}{p+1} \text{ avec } p\in\mathbb{N} \text{ avec } E_{\frac{1}{p+1}}=\mathrm{Vect}\left(\alpha^{(p)}\right).}$$

Exercice 4

1) On veut :

$$A \text{ nilpotente} \iff Sp(A)=\{0\}.$$

($\Rightarrow$) On suppose que A est nilpotente, donc il existe $p\in\mathbb{N}^*$ tel que $A^p=0_n$.

Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé. On a alors $AX=\lambda X$ et si pour $k\in\mathbb{N}$, $A^kX=\lambda^kX$, alors :

$$A^{k+1}X=A^k(AX)=A^k(\lambda X)=\lambda A^kX=\lambda.\lambda^kX=\lambda^{k+1}X.$$

Ceci prouve par récurrence que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A^kX=\lambda^kX$. Et en particulier :

$$A^pX=\lambda^pX \quad\Rightarrow\quad \lambda^pX=0 \quad (\text{car } A^p=0_n) \quad\Rightarrow\quad \lambda^p=0 \quad (\text{car } X\neq 0) \quad\Rightarrow\quad \lambda=0.$$

Ainsi, la seule valeur propre réelle ou complexe de A est 0.

($\Leftarrow$) On suppose la seule valeur propre réelle ou complexe de A est 0.

Alors, 0 est la seule racine du polynôme caractéristique de A, donc $\chi_A=X^n$ et alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_A(A)=A^n=0_n$, donc A est nilpotente.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{A \text{ nilpotente} \iff Sp(A)=\{0\}.}$$

2) On veut :

$$A \text{ nilpotente} \iff \forall\, k \in [\![1,n]\!],\ Tr(A^k) = 0.$$

On a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et comme $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on a $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors, A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc il existe une matrice triangulaire supérieure $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $T = P^{-1}AP$.

On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $T^k = P^{-1}A^kP$, donc :

- A est nilpotente si et seulement si T est nilpotente ;
- $Tr(A^k) = Tr(T^k)$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

On veut donc prouver que :

$$T \text{ nilpotente} \iff \forall\, k \in [\![1,n]\!],\ Tr(T^k) = 0.$$

Or, si on note $t_1, t_2, \dots, t_n$ les coefficients diagonaux de T, on a $Sp(T) = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ et, d'après la question précédente :

$$T \text{ nilpotente} \iff Sp(T) = \{0\} \iff t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0.$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, les coefficients diagonaux de T^k sont ceux de T élevés à la puissance k, soit $t_1^k, t_2^k, \dots, t_n^k$ et donc $Tr(T^k) = t_1^k + t_2^k + \dots + t_n^k$. Ainsi :

$$\forall\, k \in [\![1,n]\!],\ Tr(T^k) = 0 \iff \forall\, k \in [\![1,n]\!],\ t_1^k + t_2^k + \dots + t_n^k = 0 \iff \begin{cases} t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0 \\ t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = 0 \\ \quad\vdots \\ t_1^n + t_2^n + \dots + t_n^n = 0 \end{cases}$$

Ainsi, on veut prouver que :

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0 \iff \begin{cases} t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0 \\ t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = 0 \\ \quad\vdots \\ t_1^n + t_2^n + \dots + t_n^n = 0 \end{cases}$$

Le sens direct est alors immédiat. Prouvons la réciproque.

Soit $(t_1, t_2, \dots, t_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que :

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + \dots + t_n = 0 \\ t_1^2 + t_2^2 + \dots + t_n^2 = 0 \\ \quad\vdots \\ t_1^n + t_2^n + \dots + t_n^n = 0 \end{cases}$$

Par combinaisons linéaires de ces n équations, on a immédiatement pour tout $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\deg P \geq 1$:

$$P(t_1) + P(t_2) + \dots + P(t_n) = 0.$$

Appelons T l'ensemble des valeurs distinctes prises par les t_i et $p \in [\![1,n]\!]$ le nombre de ces valeurs.

Supposons que T contienne plus d'une valeur, soit $p \geq 2$.

Soit $t_\alpha \in T$. L'ensemble $T\setminus\{t_\alpha\}$ contient alors au moins un élément et $P=\prod_{\tau\in T\setminus\{t_\alpha\}}(X-\tau)$ est un polynôme de $\mathbb{C}_n[X]$, de degré supérieur ou égal à 1. Donc, $\sum_{i=1}^{n} P(t_i)=0$.

Or, pour $t_i \neq t_\alpha$, on a $P(t_i)=0$, donc $\sum_{i=1}^{n} P(t_i)=kP(t_\alpha)$ où k est le nombre de fois où t_α apparait dans la liste $t_1, t_2, \dots, t_n$.

On a donc $kP(t_\alpha)=0$, soit $P(t_\alpha)=0$ et donc t_α est racine de $P=\prod_{\tau\in T\setminus\{t_\alpha\}}(X-\tau)$, soit $t_\alpha \in T\setminus\{t_\alpha\}$. Ceci est bien entendu absurde, donc $p=2$, ce qui veut dire que $t_1=t_2=\dots=t_n$.

L'équation $t_1+t_2+\dots+t_n=0$ donne alors immédiatement $t_1=t_2=\dots=t_n=0$.

Finalement, on a bien :

$$t_1=t_2=\dots=t_n=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} t_1+t_2+\dots+t_n=0 \\ t_1^2+t_2^2+\dots+t_n^2=0 \\ \quad\vdots \\ t_1^n+t_2^n+\dots+t_n^n=0 \end{cases}$$

Et donc :

$$\boxed{A \text{ nilpotente } \Leftrightarrow \forall\, k\in [\![1,n]\!],\ Tr(A^k)=0.}$$

Exercice 5

1) Si on pose $U=(1,1,\dots,1)\in\mathbb{R}^n$ et $AU=(y_1, y_2, \dots, y_n)$, on a pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$y_i=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}1=\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}=1.$$

Donc, $AU=U$ et comme $U\neq 0$, on peut conclure que :

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de } A.}$$

2) Soit $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)\in\mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé à λ. Posons $|x_p|=\max\left(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\right)$.

Comme $X\neq 0$ (car c'est un vecteur propre), on a $|x_p|>0$. On a $AX=\lambda X$, donc $\sum_{j=1}^{n} a_{p,j}x_j=\lambda x_p$ et :

$$|\lambda||x_p|=\left|\sum_{j=1}^{n} a_{p,j}x_j\right|\leq\sum_{j=1}^{n}|a_{p,j}||x_j|=\sum_{j=1}^{n} a_{p,j}|x_j|\leq\sum_{j=1}^{n} a_{p,j}|x_p|=\left(\sum_{j=1}^{n} a_{p,j}\right)|x_p|=|x_p|.$$

Ainsi, $|\lambda||x_p|\leq|x_p|$ et comme $|x_p|>0$, ceci donne :

$$\boxed{|\lambda|\leq 1}$$

3) a. Soit $\lambda \in Sp(A)$. En reprenant les notations ci-dessus, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{p,j}x_j = \lambda x_p \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq p}}^{n} a_{p,j}x_j = (\lambda - a_{p,p})x_p .$$

Alors :

$$\left|\lambda - a_{p,p}\right|\left|x_p\right| \leq \sum_{j=1,\, j\neq p}^{n} a_{p,j}\left|x_j\right| \leq \left(\sum_{j=1,\, j\neq p}^{n} a_{p,j}\right)\left|x_p\right| = (1-a_{p,p})\left|x_p\right| .$$

Avec toujours $\left|x_p\right| > 0$, ceci donne :

$$\left|\lambda - a_{p,p}\right| \leq 1 - a_{p,p} .$$

Posons alors $\omega = \min\limits_{i\in[\![1,n]\!]} a_{i,i}$. Comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $0 < a_{i,j} \leq 1$, on a bien $\omega \in \left]0,1\right]$ et :

$$|\lambda-\omega| = |\lambda - a_{p,p} + a_{p,p} - \omega| \leq |\lambda - a_{p,p}| + |a_{p,p} - \omega| \leq 1 - a_{p,p} + a_{p,p} - \omega = 1-\omega .$$

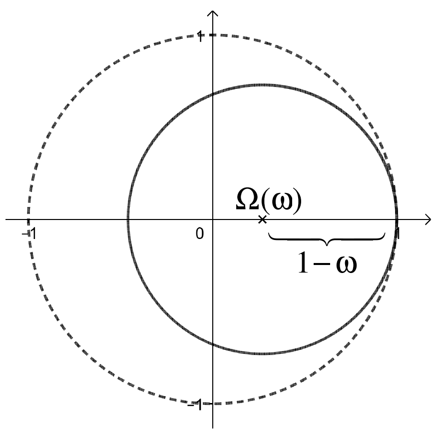
Comme la valeur propre l était quelconque et w ne dépend pas de l :

$$\boxed{\text{Il existe bien un réel } \omega \in \left]0,1\right] \text{ tel que pour tout } \lambda \in Sp(A),\ |\lambda-\omega| \leq 1-\omega .}$$

b. Si Ω est le point du plan complexe d'affixe ω, $|\lambda-\omega| \leq 1-\omega$, veut dire que :

$$\boxed{\text{Le point d'affixe l appartient au disque fermé de centre } \Omega \text{ et de rayon } 1-\omega .}$$

On a le schéma :



c. Soit $\lambda \in Sp(A)$ telle que $|\lambda| = 1$. L'inégalité triangulaire donne $\big||\lambda| - |\omega|\big| \leq |\lambda - \omega|$. Or, $\big||\lambda| - |\omega|\big| = |1-\omega| = 1-\omega$, donc avec l'inégalité de la question a, on obtient $1-\omega \leq |\lambda-\omega| \leq 1-\omega$, soit $|\lambda-\omega| = 1-\omega$.

Alors, avec $\lambda\overline{\lambda} = |\lambda|^2 = 1$ et $\omega \neq 0$, on a :

$$|\lambda-\omega|^2 = (1-\omega)^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda-\omega)(\overline{\lambda}-\omega) = 1 - 2\omega + \omega^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\lambda+\overline{\lambda}}{2} = \mathrm{Re}(\lambda) = 1 .$$

Et donc $1 = |\lambda|^2 = \mathrm{Re}(\lambda)^2 + \mathrm{Im}(\lambda)^2 = 1 + \mathrm{Im}(\lambda)^2$, soit $\mathrm{Im}(\lambda) = 0$ et ainsi, $\lambda = 1$.

Finalement, quand tous les coefficients diagonaux de A sont non nuls :

$$\boxed{\text{La seule valeur propre de } A \text{ de module 1 est 1.}}$$

Exercice 6

1) On a :

$$\chi_{A_m} = \det(XI_3 - A_m) = \begin{vmatrix} X-1 & 0 & -½ \\ 1 & X-1 & -½ \\ -4 & 0 & X-m \end{vmatrix} = (X-1)\begin{vmatrix} X-1 & -½ \\ -4 & X-m \end{vmatrix} = (X-1)\left[(X-1)(X-m)-2\right].$$

Soit :

$$\chi_{A_m} = (X-1)\left(X^2-(m+1)X+m-2\right).$$

Le discriminant de $X^2-(m+1)X+m-2$ est :

$$\Delta_m = (m+1)^2 - 4(m-2) = m^2+2m+1-4m+8 = (m-1)^2+8.$$

On a $\Delta_m > 0$ pour tout réel *m*, donc $X^2-(m+1)X+m-2$ admet toujours deux racines distinctes :

$$\frac{m+1+\sqrt{(m-1)^2+8}}{2} \text{ et } \frac{m+1-\sqrt{(m-1)^2+8}}{2}.$$

On a :

$$\frac{m+1\pm\sqrt{(m-1)^2+8}}{2} = 1 \iff \pm\sqrt{(m-1)^2+8} = 1-m \iff (m-1)^2+8 = (m-1)^2.$$

Ceci est impossible, donc les racines de $X^2-(m+1)X+m-2$ sont toujours distinctes de 1 et ainsi, χ_{A_m} admet trois racines réelles distinctes quel que soit *m*.

Ceci prouve que :

$$\boxed{A_m \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ pour tout réel } m.}$$

2) Pour que A_m soit semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, il faut que les trois racines de χ_{A_m} soit 1, – 1 et 2.

Avec ce qui précède, ceci veut dire que :

$$\begin{cases} \dfrac{m+1+\sqrt{(m-1)^2+8}}{2} = 2 \\ \dfrac{m+1-\sqrt{(m-1)^2+8}}{2} = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{(m-1)^2+8} = 3-m \\ \sqrt{(m-1)^2+8} = m+3 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{(m-1)^2+8} = 3 \\ m = 0 \end{cases} \iff m = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La matrice } A_0 \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.}$$

On a $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ½ \\ -1 & 1 & ½ \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ de valeurs propres 1, – 1 et 2.

Alors :

- $A_0\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x+½\,z=-x\\-x+y+½\,z=-y\\4x=-z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\3x/2\\-4x\end{pmatrix}$. Donc : $E_{-1}=\mathrm{Vect}\left(2e_1+3e_2-8e_3\right)$;

- $A_0\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x+½\,z=x\\-x+y+½\,z=y\\4x=z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix}$. Donc : $E_1=\mathrm{Vect}\left(e_2\right)$;

- $A_0\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x+½\,z=2x\\-x+y+½\,z=2y\\4x=2z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\0\\2x\end{pmatrix}$. Donc : $E_2=\mathrm{Vect}\left(e_1+2e_3\right)$.

On a alors $A_0=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&1&0\\-8&0&2\end{pmatrix}$ et $P^{-1}=\dfrac{1}{12}\begin{pmatrix}2&0&-1\\-6&12&3\\8&0&2\end{pmatrix}$.

On a alors, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A_0^k=PD^kP^{-1}$, soit :

$$\boxed{A_0^k=\begin{pmatrix}\dfrac{(-1)^k+2^{k+1}}{3}&0&\dfrac{2^k-(-1)^k}{6}\\\dfrac{(-1)^k-1}{2}&1&\dfrac{1-(-1)^k}{4}\\\dfrac{2^{k+2}-4(-1)^k}{3}&0&\dfrac{4(-1)^k+2^k}{3}\end{pmatrix}}$$

3) a. Entre l'année k (à la fin de laquelle il y a a_k Mmes Lapin, b_k M. Lapin et c_k Bébés Lapin) et l'année suivante, $k+1$, tous les c_k bébés Lapin sont devenus adultes (la moitié sont devenus des Mmes Lapin et l'autre moitié des M. Lapin). De plus, chacune des a_k Mmes Lapin a engendré quatre nouveaux bébés Lapin et a trucidé un M. Lapin.

- Le nombre de Mmes Lapin en fin d'année $k+1$ est égal au nombre de Mmes Lapin l'année k plus le nombre de Mlles Bébés Lapin devenues adultes, soit :
$$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{2}c_k\,.$$
- Le nombre de M. Lapin en fin d'année $k+1$ est égal au nombre de M. Lapin l'année k plus le nombre de M. Bébés Lapin devenus adultes moins le nombre de malheureux M. Lapin trucidés par les Mmes Lapin :
$$b_{k+1}=-a_k+b_k+\frac{1}{2}c_k\,.$$
- Le nombre de bébés Lapins en fin d'année $k+1$ est égal au nombre de nouveaux bébés Lapins engendrés au cours de l'année k, soit :
$$c_{k+1}=4a_k\,.$$

On a alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$X_{k+1} = \begin{pmatrix} a_{k+1} \\ b_{k+1} \\ c_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k + \frac{1}{2}c_k \\ -a_k + b_k + \frac{1}{2}c_k \\ 4a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ½ \\ -1 & 1 & ½ \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix} = A_0 X_k$$

Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{X_{k+1} = AX_k \text{ où } A = A_0 \text{, la matrice de la question précédente.}}$$

b. On a $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$ et si $X_k = A^k X_0$, alors $X_{k+1} = AX_k = AA^k X_0 = A^{k+1} X_0$. Ceci prouve par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{X_k = A^k X_0}$$

c. On a $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$X_k = A^k X_0 = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^k + 2^{k+1}}{3} & 0 & \frac{2^k - (-1)^k}{6} \\ \frac{(-1)^k - 1}{2} & 1 & \frac{1-(-1)^k}{4} \\ \frac{2^{k+2} - 4(-1)^k}{3} & 0 & \frac{4(-1)^k + 2^k}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a_k = \frac{(-1)^k + 2^{k+1}}{3} \\ b_k = \frac{(-1)^k + 1}{2} \\ c_k = \frac{2^{k+2} - 4(-1)^k}{3} \end{cases}$$

On a alors :

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = +\infty \text{ et } b_k = \begin{cases} 1 \text{ quand } k \text{ est pair} \\ 0 \text{ quand } k \text{ est impair} \end{cases}$$

Donc :

Le nombre de Mesdames Lapin croît indéfiniment alors qu'il n'y jamais plus de un Monsieur Lapin en fin d'année.

En fait, il y a même des années où il n'y en a plus du tout de M. Lapin, ce qui pourrait peut-être créer un tout petit problème aux Mmes Lapin pour faire leurs bébés… Bref, cet exercice est foireux… dans son application numérique bien sûr pas sur le plan mathématique, car là, les méthodes sont standardissimes…

Exercice 7

1) Remarquons que $A^2 = I_n$, donc $X^2 - 1$, qui est scindé à racines simples, annule A, et ainsi, la matrice A est diagonalisable de valeurs propres possibles 1 et – 1. Comme $A \neq I_n$ et $A \neq -I_n$, 1 et – 1 sont tous les deux effectivement valeurs propres.

Posons $p = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

On a :

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1-i} = x_i, \ \forall\, i \in [\![1, p]\!].$$

Ceci donne :

- une base de p vecteurs propres de E_1 : $(e_1 + e_n, e_2 + e_{n-1}, \dots, e_p + e_{p+1})$ quand $n = 2p$;
- une base de $p+1$ vecteurs propres de E_1 : $(e_1 + e_n, e_2 + e_{n-1}, \dots, e_p + e_{p+2}, e_{p+1})$ quand $n = 2p+1$.

De même, on obtient :

- une base de p vecteurs propres de E_{-1} : $(e_1 - e_n, e_2 - e_{n-1}, \dots, e_p - e_{p+1})$ quand $n = 2p$;
- une base de p vecteurs propres de E_{-1} : $(e_1 - e_n, e_2 - e_{n-1}, \dots, e_p - e_{p+2})$ quand $n = 2p+1$.

Finalement :

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable d'éléments propres donnés ci-dessus.}}$$

En calculant les puissances successives de B, on obtient $B^n = I_n$. Donc $X^n - 1$, qui est scindé à racines simples, annule B, et ainsi, la matrice B est diagonalisable de valeurs propres possibles les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Soit pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\omega_k = \exp\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$. On a :

$$B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \omega_k \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = x_1(1, \omega_k, \omega_k^2, \dots, \omega_k^{n-1}).$$

Ainsi :

$$\boxed{B \text{ est diagonalisable de valeurs propres les } \omega_k \text{ et de sous-espaces propres } E_{\omega_k} = \mathrm{Vect}\big((1, \omega_k, \omega_k^2, \dots, \omega_k^{n-1})\big).}$$

On a vu dans le chapitre précédent que $\begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \ddots & \vdots \\ a & a & \ddots & \ddots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & b & a \\ a & a & \cdots & a & b \end{vmatrix}_n = \big(b + (n-1)a\big)(b-a)^{n-1}$, donc :

$$\chi_C = \begin{vmatrix} X-4 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & X-4 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & & \ddots & X-4 & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & X-4 \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \ddots & \vdots \\ a & a & \ddots & \ddots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & b & a \\ a & a & \cdots & a & b \end{vmatrix}_n = \big(X - 4 - (n-1)\big)(X-4+1)^{n-1} = (X-3-n)(X-3)^{n-1}$$

Ainsi, $Sp(C) = \{3, n+3\}$.

Remarquons que $C - 3I_n$ est la matrice qui ne contient que des 1. Cette matrice est de rang 1, donc :

$$\dim E_3 = \dim \ker(C - 3I_n) = n - 1.$$

Et on obtient facilement que :

$$E_3 = \mathrm{Vect}\,(e_1 - e_n, e_2 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n).$$

Par ailleurs, $\dim E_{n+3}=1$ (car $1\leq \dim E_3 \leq n-\dim E_{n+3}=1$). Or, $Cu=(3+n)u$ avec $u=\sum_{k=1}^{n} e_k$, donc :

$$E_{n+3}=\operatorname{Vect}(u).$$

Finalement :

C est diagonalisable de valeurs propres 3 et $n+3$ et de sous-espaces propres :
$E_3=\operatorname{Vect}\left(e_1-e_n, e_2-e_n, \dots, e_{n-1}-e_n\right)$ et $E_{n+3}=\operatorname{Vect}(u)$.

Pour D, si on pose $u=e_1+e_2+\dots+e_n$ (non colinéaire à e_1), on a :

$$De_1=u \;;$$
$$De_k=e_1 \text{ pour tout } k\in [\![2,n]\!] \;;$$
$$Du=\sum_{k=1}^{n} De_k=u+(n-1)e_1.$$

Et $\operatorname{Im} D=\operatorname{Vect}(u, e_1)$, $rg(D)=2$ et $\dim(\ker D)=n-2$.

Quand $n\geq 3$, on a pour tout $k\in[\![3,n]\!]$, $D(e_k-e_2)=0$, donc $E_0=\ker D=\operatorname{Vect}\left(e_3-e_2, \dots, e_n-e_2\right)$

Si λ est une valeur propre non nul de D et x un vecteur propre associé, on a $Dx=\lambda x$, donc $x\in \operatorname{Im} D$, soit :

$$x=\alpha u+\beta e_1.$$

Et on a :

$$Dx=\alpha Du+\beta De_1=\alpha\left(u+(n-1)e_1\right)+\beta u=(\alpha+\beta)u+\alpha(n-1)e_1.$$

Donc :

$$Dx=\lambda x \iff (\alpha+\beta)u+\alpha(n-1)e_1=\lambda\alpha u+\lambda\beta e_1 \iff \begin{cases}\alpha+\beta=\lambda\alpha\\ \alpha(n-1)=\lambda\beta\end{cases} \iff \begin{cases}\beta=(\lambda-1)\alpha\\ (\lambda^2-\lambda-n+1)\alpha=0\end{cases}$$

Comme $x\neq 0$, on a $(\alpha,\beta)\neq(0,0)$ et le système ci-dessus donne $\alpha\neq 0$ et se récrit :

$$\begin{cases}\beta=(\lambda-1)\alpha\\ \lambda^2-\lambda-n+1=0\end{cases}$$

Les racines de $X^2-X-n+1$ sont $\frac{1\pm\sqrt{4n-3}}{2}$, qui sont distinctes car $n\neq\frac{3}{4}$ et on obtient :

$$\lambda_1=\frac{1-\sqrt{4n-3}}{2} \Rightarrow E_{\lambda_1}=\operatorname{Vect}\left(\lambda_1 e_1+e_2+\dots+e_n\right)$$
$$\lambda_2=\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2} \Rightarrow E_{\lambda_2}=\operatorname{Vect}\left(\lambda_2 e_1+e_2+\dots+e_n\right)$$

Enfin, on a $\dim E_0+\dim E_{\lambda_1}+\dim E_{\lambda_2}=n-2+1+1=n$, donc D est diagonalisable.

Finalement :

D est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1=\frac{1-\sqrt{4n-3}}{2}$, $\lambda_2=\frac{1+\sqrt{4n-3}}{2}$ et 0 (quand $n\geq 3$) de sous-espaces propres associés :
$E_0=\operatorname{Vect}\left(e_3-e_2, \dots, e_n-e_2\right)$ et $E_{\lambda_i}=\operatorname{Vect}\left(\lambda_i e_1+e_2+\dots+e_n\right)$, $i\in\{1,2\}$.

On a immédiatement $\operatorname{Im} E = \operatorname{Vect}(u)$ avec $u = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \neq 0$ (car les a_i ne sont pas tous nuls).

Donc, $\dim(\ker E) = n-1$ et on a facilement $E_0 = \ker E = \operatorname{Vect}(e_2 - e_1, \dots, e_n - e_1)$.

Supposons qu'il existe une autre valeur propre $\lambda \neq 0$. Si x est un vecteur propre associé à λ, on a $Ex = \lambda x$, donc $x = E\left(\frac{1}{\lambda} x\right) \in \operatorname{Im} E = \operatorname{Vect}(u)$. Donc, u serait un vecteur propre associé à λ. Or :

$$Eu = \sum_{k=1}^{n} a_k E e_k = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) u .$$

Donc, $\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Ceci prouve que :

- Si $\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k \neq 0$, E est diagonalisable de valeurs propres 0 et λ, de sous-espaces propres associés $E_0 = \operatorname{Vect}(e_2 - e_1, \dots, e_n - e_1)$ et $E_\lambda = \operatorname{Vect}(u)$;
- Si $\lambda = \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$, E n'est pas diagonalisable.

Exercice 8

Dans les deux questions, on note u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B respectivement. On a alors $uv = vu$.

1) Ici, on se place dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc A et B sont bien trigonalisables.

Nous allons prouver qu'elles le sont simultanément dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ par récurrence sur dans $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour $n = 1$, toute matrice de $\mathcal{M}_1(\mathbb{C})$ est triangulaire supérieure, donc la propriété est vraie.

Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ et considérons deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ qui commutent.

Soit λ une valeur propre de A et E_λ le sous-espace propre associé à λ. Comme A et B commutent, E_λ est stable par v. Soit μ une valeur propre de l'endomorphisme induit par v sur E_λ et e_1 un vecteur propre associé à μ. Comme $e_1 \in E_\lambda$, e_1 est aussi vecteur propre de A, associé à λ. Si on complète e_1 en une base $\mathcal{B}_0$ de $\mathbb{K}^{n+1}$, les matrices de u et v sont de la forme :

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ et } B_0 = \begin{pmatrix} \mu & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

avec $A', B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

De plus, $A_0 = P^{-1}AP$ et $B_0 = P^{-1}BP$, donc A_0 et B_0 commutent, soit :

$$A_0 B_0 = \begin{pmatrix} \lambda\mu & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & A'B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = B_0 A_0 = \begin{pmatrix} \lambda\mu & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & B'A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Ainsi, A' et B' sont deux matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui commutent, donc par hypothèse de récurrence, elles sont simultanément trigonalisables. Autrement dit, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A' = QT_AQ^{-1}$ et $B' = QT_BQ^{-1}$ où T_A et T_B sont deux matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Alors, en posant $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$, on a $R \in GL_{n+1}(\mathbb{C})$ avec $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et :

- $R^{-1}A_0R = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1}A'Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_A & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure ;
- $R^{-1}B_0R = \begin{pmatrix} \mu & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q^{-1}B'Q & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \times & \cdots & \times \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure.

Finalement, $(PR)^{-1}A(PR)$ et $(PR)^{-1}B(PR)$, donc A et B sont simultanément trigonalisables et la propriété vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\text{Si deux matrices } A \text{ et } B \text{ de } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \text{ commutent, elles sont simultanément trigonalisables.}}$$

2) On pose $Sp(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\}$ et E_{λ_i} le sous-espace propre associé à λ_i pour tout *i* entre 1 et *p*.

Comme *A* est diagonalisable alors $E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p} = E$. Comme *u* et *v* commutent, les E_{λ_i} sont stables par *v*.

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, notons v_i l'endomorphisme induit par *v* sur E_{λ_i}. Comme *B*, donc *v*, est diagonalisable, alors v_i l'est aussi. Soit $\mathcal{B}_i$ une base de E_{λ_i} dans laquelle la matrice de v_i est diagonale.

En posant $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup ... \cup \mathcal{B}_p$, on obtient une base dans laquelle la matrice de *v* est diagonale et cette base étant adaptée à la décomposition $E = E_{\lambda_1} \oplus ... \oplus E_{\lambda_p}$, la matrice de *u* est aussi diagonale dans $\mathcal{B}$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont simultanément diagonalisables.}}$$

Exercice 9

Comme le polynôme caractéristique de la matrice *A* est scindé sur $\mathbb{K}$, elle est trigonalisable. Donc, il existe une matrice *T* triangulaire supérieure et une matrice *P* inversible telles que $A = PTP^{-1}$.

Appelons alors D_0 la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont ceux de *T* et posons $N_0 = T - D_0$.

La matrice N_0 est triangulaire supérieure stricte. Son polynôme caractéristique est alors $\chi_{N_0} = X^n$ et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $N_0^n = 0_n$, donc N_0 est nilpotente.

Si on pose $N = PN_0P^{-1}$ et $D = PD_0P^{-1}$, *N* est nilpotente (car $N = PN_0P^{-1}$), *D* est diagonalisable (car semblable à D_0 qui est diagonale) et $T = D_0 + N_0$ donc :

$$A = PTP^{-1} = P(D_0 + N_0)P^{-1} = PD_0P^{-1} + PN_0P^{-1} = D + N\,.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{A = D + N \text{ avec } D \text{ diagonalisable et } N \text{ nilpotente.}}$$

Exercice 10

1) Comme $M^m = I_n$, on a $(\det M)^m = \det(M^m) = \det I_n = 1 \neq 0$, donc $\det M \neq 0$ et ainsi :

$$\boxed{M \text{ est inversible.}}$$

On a $M^m - I_n = 0_n$, donc il existe un polynôme $P = X^m - I_n$ de $\mathbb{C}[X]$, scindé à racines simples (les racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité) tel que $P(M) = 0_n$. Ceci permet de conclure que :

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$$

2) On veut prouver l'équivalence :

$$M^k = I_n \iff k \in p\mathbb{Z}.$$

($\Rightarrow$) Si $M^k = I_n$, posons $k = qp + r$ la division euclidienne de k par p, avec $0 \leq r < p$. On a alors :

$$I_n = M^k = M^{qp+r} = (M^p)^q M^r = (I_n)^q M^r = M^r.$$

Or, p est le plus petit entier naturel k non nul tel que $M^k = I_n$ et $0 \leq r < p$ donc $r = 0$ et ainsi, $k \in p\mathbb{Z}$.

($\Leftarrow$) Si $k \in p\mathbb{Z}$, alors $k = qp$ avec $q \in \mathbb{Z}$ et :

$$M^k = M^{qp} = (M^p)^q = (I_n)^q = I_n.$$

Remarquons que la matrice M est inversible, donc toutes ses puissances le sont aussi et M^{qp} et $(M^p)^q$ sont bien définies même si $k < 0$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{M^k = I_n \iff k \in p\mathbb{Z}.}$$

3) Appelons $\mathcal{U}_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont l'une des puissances est I_n.

On a $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et $I_n^1 = I_n$, donc $I_n \in \mathcal{U}_n(\mathbb{Z})$ et I_n d'ordre 1. Ainsi, $1 \in O_n$ et :

$$\boxed{O_n \text{ est non vide.}}$$

Soit $M \in \mathcal{U}_n(\mathbb{Z})$ d'ordre p. On a vu que M est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité (donc de module 1, entre autres).

Appelons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ces valeurs propres (distinctes ou pas). Le polynôme caractéristique de M s'écrit alors de deux façons (développée ou factorisée) :

$$\det(XI_n - M) = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = \prod_{j=1}^{n} (X - \lambda_j)$$

avec pour tout $k \in [\![1;n]\!]$:

$$a_{n-k} = (-1)^{n-k} \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} \lambda_{i_1} \lambda_{i_2} \ldots \lambda_{i_k} .$$

Cette somme contient $\binom{n}{k}$ termes, donc pour tout $k \in [\![1;n]\!]$:

$$|a_{n-k}| \le \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} |\lambda_{i_1}||\lambda_{i_2}|\ldots|\lambda_{i_k}| = \sum_{1 \le i_1 \le i_2 \le \ldots \le i_k \le n} 1 = \binom{n}{k}.$$

Si M est à coefficients entiers, son polynôme caractéristique l'est aussi, donc tous les a_k sont entiers relatifs tels que $|a_k| \le \binom{n}{k}$, soit $a_k \in \left[\!\left[-\binom{n}{k} ; \binom{n}{k} \right]\!\right]$. Chaque a_k peut donc prendre un nombre fini de valeurs.

Il y a ainsi un nombre fini de polynômes caractéristiques possibles, donc un nombre fini de n-uplets $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de valeurs propres possibles.

Alors, comme, si p est l'ordre de M, les valeurs propres sont des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité, il y a un nombre fini de valeurs possibles de p et ainsi :

$$\boxed{O_n \text{ est fini.}}$$

4) Rappelons à nouveau que $M \in \mathcal{U}_2(\mathbb{Z})$ est d'ordre p, si et seulement si ses valeurs propres sont des racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

Par ailleurs, si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ alors $\chi_M = X^2 - tr(M)X + \det M$ avec $\left(tr(M), \det M\right) \in \mathbb{Z}^2$.

D'après la question précédente :

$$\det M = \pm 1 \text{ et } |tr(M)| \le 2$$

Soit :

$$\det M \in \{-1, 1\} \text{ et } tr(M) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} .$$

Il y a donc 10 polynômes caractéristiques possibles et les seules acceptables sont ceux dont les racines sont de la forme $e^{i\frac{2k\pi}{p}}$ avec $0 \le k < p$ (et p est alors l'ordre de M).

Faisons un tableau :

$\det M$	$tr(M)$	Polynôme caractéristique	Racines	Possible ?	Ordre de M
1	-2	$X^2 + 2X + 1$	-1	oui	2
1	-1	$X^2 + X + 1$	j et j^2	oui	3
1	0	$X^2 + 1$	i et $-i$	oui	4
1	1	$X^2 - X + 1$	$-j$ et $-j^2$	oui	6
1	2	$X^2 - 2X + 1$	1	oui	1
-1	-2	$X^2 + 2X - 1$	$-1+\sqrt{2}$ et $-1-\sqrt{2}$	non	

-1	-1	X^2+X-1	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	non	
-1	0	X^2-1	1 et -1	oui	2
-1	1	X^2-X-1	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	non	
-1	2	X^2-2X-1	$1+\sqrt{2}$ et $1-\sqrt{2}$	non	

avec $j=e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Ainsi, on trouve :

$$\boxed{O_2=\{1,2,3,4,6\}}$$

Exercice 11

1) Si *f* est diagonalisable, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de *E* dans laquelle la matrice *D* de *f* est diagonale.

Mais alors, la matrice de f^2 dans la base $\mathcal{B}$ est D^2, qui est elle aussi diagonale, donc :

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est diagonalisable, alors } f^2 \text{ est diagonalisable.}}$$

Soit $f\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ de matrice $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ dans la base canonique. On a :

- $\chi_A=X^2$, donc la seule valeur propre de *f* est 0 et *f* n'est pas diagonalisable (car *f* n'est pas nul) ;
- $A^2=0_2$, donc f^2 est diagonalisable (c'est l'endomorphisme nul).

Ainsi :

$$\boxed{\text{La réciproque est fausse.}}$$

2) On suppose que f^2 est diagonalisable et on veut prouver que :

$$f \text{ est diagonalisable } \Leftrightarrow \ker f=\ker f^2.$$

($\Rightarrow$) On suppose que *f* est diagonalisable dans une base $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de *E*.

On a alors, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ $f(e_i)=\lambda_i e_i$ où les complexes λ_i sont les valeurs propres de *f*.

Alors pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $f^2(e_i)=\lambda_i^2 e_i$. Ainsi, f^2 est diagonalisable dans $\mathcal{B}$ et pour tout $i\in[\![1,n]\!]$:

$$\ker\left(f^2-\lambda_i^2 id_E\right)=\ker\left(f-\lambda_i id_E\right)\oplus\ker\left(f+\lambda_i id_E\right).$$

En particulier, si $0\in Sp(f)$, alors $\ker\left(f^2-0^2.id_E\right)=\ker\left(f-0.id_E\right)\oplus\ker\left(f+0.id_E\right)$, soit $\ker f=\ker f^2$.

Enfin, si $0\notin Sp(f)$, alors *f* et f^2 sont bijectives, donc $\ker f=\ker f^2=\{0\}$.

($\Leftarrow$) On suppose que $\ker f=\ker f^2$, avec f^2 diagonalisable. Soit $Sp(f^2)=\left\{\lambda_1^2,\lambda_2^2,\dots,\lambda_p^2\right\}$ (comme *E* est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, on peut exprimer les valeurs propres comme des carrés).

Comme f^2 est diagonalisable, le polynôme $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i^2)$ est annulateur de f^2, donc $\prod_{i=1}^{p}(f^2-\lambda_i^2 id_E)=0$.

Considérons de deux cas.

- $\ker f = \ker f^2 = \{0\}$.

  On a alors $\prod_{i=1}^{p}(f-\lambda_i id_E)(f+\lambda_i id_E)=0$ et $\prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)(X+\lambda_i)$ est un polynôme scindé à racines simples annulateur de *f*, donc *f* est diagonalisable.

- $\ker f = \ker f^2 \neq \{0\}$.

  On a 0 est alors valeur propre de *f* et f^2. On peut prendre $\lambda_1 = 0$. Alors, on a :

$$f^2\prod_{i=2}^{p}(f-\lambda_i id_E)(f+\lambda_i id_E)=0.$$

  Donc :

$$E=\ker f^2 \oplus \ker\left(f-\lambda_2 id_E\right)\oplus \ker\left(f+\lambda_2 id_E\right)\oplus ...\oplus \ker\left(f-\lambda_p id_E\right)\oplus \ker\left(f+\lambda_p id_E\right).$$

  Et comme $\ker f = \ker f^2$, on a :

$$E=\ker f \oplus \ker\left(f-\lambda_2 id_E\right)\oplus \ker\left(f+\lambda_2 id_E\right)\oplus ...\oplus \ker\left(f-\lambda_p id_E\right)\oplus \ker\left(f+\lambda_p id_E\right).$$

  Ceci permet de conclure que *f* est diagonalisable.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{f \text{ est diagonalisable si et seulement si } \ker f = \ker f^2.}$$

Exercice 12

1) $\mathcal{A}$ est l'ensemble des polynômes annulateurs de *u*. Or, on a vu dans le cours qu'un endomorphisme admet toujours un polynôme annulateur non nul, donc $\mathcal{D}$ est non vide.

D'autre part un polynôme constant non nul ne peut annuler *u*, donc tout polynôme annulateur de *u* est de degré supérieur ou égal à 1. Ainsi, $\mathcal{D}=\left\{\deg P \setminus P\in\mathcal{A}, P\neq 0\right\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$, donc :

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ admet un minimum } p\geq 1.}$$

2) Nous allons procéder par double inclusion.

Soit $P\in L.\mathbb{K}[X]$. On a $P=L.Q$ avec $Q\in\mathbb{K}[X]$, donc $P(u)=L(u)Q(u)=0$ car $L\in\mathcal{A}$. Ainsi :

$$L.\mathbb{K}[X]\subset\mathcal{A}.$$

Soit $P\in\mathcal{A}$ et $P=QL+R$ avec $\deg R<\deg L=p$ la division euclidienne de *P* par *L*.

On a $P(u)=L(u)=0$, donc $R(u)=P(u)-Q(u)L(u)=0$ et ainsi, $R\in\mathcal{A}$.

Or, $\deg R<p=\min\mathcal{D}$, donc $R=0$ et ainsi, $P=QL\in L.\mathbb{K}[X]$. Ceci prouve que :

$$\mathcal{A}\subset L.\mathbb{K}[X].$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\mathcal{A}=L.\mathbb{K}[X]}$$

3) Supposons qu'il existe deux polynômes unitaires L_1 et L_2 de $\mathcal{A}$ tels que $\deg L_1 = \deg L_2 = p$.

D'après la question précédente, on a $\mathcal{A} = L_1.\mathbb{K}[X] = L_2.\mathbb{K}[X]$. Alors :

$$\begin{cases} L_1 \in L_2.\mathbb{K}[X] \\ L_2 \in L_1.\mathbb{K}[X] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_2 \mid L_1 \\ L_1 \mid L_2 \end{cases} \Rightarrow L_2 = \alpha L_1 \text{ avec } \alpha \in \mathbb{K}.$$

Et comme L_1 et L_2 sont unitaires, on a $\alpha = 1$, soit $L_2 = L_1$. Ainsi :

$$\boxed{L \text{ est unique.}}$$

Exercice 13

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On veut :

$$P \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \iff \forall z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^n.$$

($\Rightarrow$) On suppose que P est scindé sur $\mathbb{R}$, donc qu'il existe des réels $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (distincts ou pas) tels que $P = (X - a_1)\dots(X - a_n)$. On a alors pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$|P(z)| = |(z - a_1)\dots(z - a_n)| = \prod_{k=1}^{n} |z - a_k|.$$

Et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$|z - a_1| = \sqrt{(\operatorname{Re}(z) - a_1)^2 + (\operatorname{Im}(z))^2} \geq \sqrt{(\operatorname{Im}(z))^2} = |\operatorname{Im}(z)|.$$

Donc :

$$|P(z)| \geq \prod_{k=1}^{n} |\operatorname{Im}(z)| = |\operatorname{Im}(z)|^n.$$

($\Leftarrow$) On suppose que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n$.

Le polynôme P est scindé sur $\mathbb{C}$. Soit $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ ses racines complexes (distinctes ou pas). On a alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$|P(z_k)| = 0 \geq |\operatorname{Im}(z_k)|^n \Rightarrow 0 \geq |\operatorname{Im}(z_k)| \Rightarrow \operatorname{Im}(z_k) = 0.$$

Ainsi, toutes racines complexes de P sont réelles, donc :

$$P \text{ est scindé sur } \mathbb{R}.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{P \text{ est scindé sur } \mathbb{R} \text{ si et seulement si, pour tout } z \in \mathbb{C},\ |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^n.}$$

2) Notons $\mathcal{D}$ l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{T}$ celui des matrices trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On veut montrer que $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{T}$.

Soit $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathcal{D}$, convergeant vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le polynôme caractéristique χ_{A_k} de A_k est scindé sur $\mathbb{R}$, car A_k est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Donc, d'après la question 1, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\left|\chi_{A_k}(z)\right| \geq \left|\mathrm{Im}(z)\right|^n$.

Or, comme $M \mapsto X I_n - M$ et $M \mapsto \det M$ sont continues sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \mapsto \chi_M = \det\left(X I_n - M\right)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lim\limits_{k \to +\infty} \chi_{A_k} = \chi_A$, donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\lim_{k \to +\infty} \left|\chi_{A_k}(z)\right| = \left|\chi_A(z)\right|.$$

En passant à la limite quand $k \to +\infty$ dans $\left|\chi_{A_k}(z)\right| \geq \left|\mathrm{Im}(z)\right|^n$, on obtient pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\left|\chi_A(z)\right| \geq \left|\mathrm{Im}(z)\right|^n.$$

A nouveau d'après la question 1, on peut conclure que le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé sur $\mathbb{R}$, et donc que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Ceci prouve que :

$$\underline{\overline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{T}}.$$

Réciproquement, soit $A \in \mathcal{T}$. Il existe alors p réels $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1 < \dots < \lambda_p$, p entiers $n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $P \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $A = P^{-1}TP$ avec :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & \ddots & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & (0) & & \ddots & \lambda_p & \times & \times \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}$$

où chaque λ_i apparait n_i fois sur la diagonale.

Posons alors $\varepsilon = \dfrac{1}{2} \min\limits_{i \in [\![1, p-1]\!]} \left(\lambda_{i+1} - \lambda_i\right)$ si $p \geq 2$ et $\varepsilon = 1$ si $p = 1$, et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = P^{-1}T_kP$ avec :

$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \times & \cdots & \cdots\ \cdots & & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & \lambda_1 + \dfrac{\varepsilon}{k(n_1-1)} & \times & \cdots & \cdots\ \cdots & & \cdots & \cdots & \times \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 + \dfrac{\varepsilon}{k} & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots\ \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots\ \lambda_p & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & (0) & & \ddots & \lambda_p + \dfrac{\varepsilon}{(n_p-1)k} & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \times \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots & & \cdots & 0 & \lambda_p + \dfrac{\varepsilon}{k} \end{pmatrix}$$

où les éléments au-dessus de la diagonale sont les même que ceux de T.

On a alors $\lim\limits_{k \to +\infty} T_k = T$, donc :

$$\lim_{k \to +\infty} A_k = A.$$

Par ailleurs, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ et tout $i\in[\![1,p-1]\!]$ (quand $p\geq 2$) :

$$\frac{\varepsilon}{k}\leq\varepsilon<\lambda_{i+1}-\lambda_i \quad\Rightarrow\quad \lambda_i<\lambda_i+\frac{\varepsilon}{k(n_i-1)}<\lambda_i+\frac{2\varepsilon}{k(n_i-1)}<\ldots<\lambda_i+\frac{\varepsilon}{k}<\lambda_{i+1}.$$

Donc les coefficients diagonaux de T_k sont tous distincts, ce qui veut dire que le polynôme caractéristique de T_k, donc de A_k est scindé à racines simples, donc que A_k est diagonalisable pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

Ainsi, on a construit que une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, convergeant vers *A*. Ceci prouve que $A\in\overline{\mathcal{D}}$. Comme ceci est vrai pour toute matrice *A* de $\mathcal{T}$:

$$\underline{\mathcal{T}\subset\overline{\mathcal{D}}}.$$

Finalement, on a bien $\mathcal{T}=\overline{\mathcal{D}}$, autrement dit :

L'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.

Exercice 14

Notons $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ le base canonique de $\mathbb{R}^4$ et appelons *u* l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ canoniquement associé à *A*.

1) On a, en développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la dernière ligne :

$$\chi_A=\begin{vmatrix} X-2 & 0 & 0 & -5\\ 0 & X & 1 & 0\\ 0 & -1 & X-2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & X-2\end{vmatrix}=(X-2)\begin{vmatrix} X & 1 & 0\\ -1 & X-2 & 0\\ 0 & 0 & X-2\end{vmatrix}=(X-2)^2\begin{vmatrix} X & 1\\ -1 & X-2\end{vmatrix}$$

Soit :

$$\chi_A=(X-2)^2\left[X(X-2)+1\right]=(X-2)^2(X^2-2X+1)=(X-2)^2(X-1)^2.$$

Donc :

$$Sp(A)=\{1,2\}.$$

En notant E_1 et E_2 les sous-espaces propres associés à 1 et 2 respectivement et en résolvant les systèmes $Ax=x$ et $Ax=2x$, on obtient :

$$E_1=\mathrm{Vect}\left(e_2-e_3\right)\quad\text{et}\quad E_2=\mathrm{Vect}\left(e_1\right).$$

On a donc $\dim E_1+\dim E_2=2<4$, donc :

La matrice *A* n'est pas diagonalisable.

Par contre, χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, donc *A* est trigonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

2) Remarquons déjà que :

$$\begin{cases} u(e_1)=2e_1 \\ u(e_4)=5e_1+2e_4 \end{cases} \Rightarrow \quad P_1=\mathrm{Vect}(e_1,e_4) \text{ est stable par } A$$

$$\begin{cases} u(e_2)=e_3 \\ u(e_3)=-e_2+2e_3 \end{cases} \Rightarrow \quad P_2=\mathrm{Vect}(e_2,e_3) \text{ est stable par } A$$

$$\begin{cases} u(e_1)=2e_1 \\ u(e_2-e_3)=e_2-e_3 \end{cases} \Rightarrow \quad P_3=\mathrm{Vect}(e_1,e_2-e_3) \text{ est stable par } A$$

Soit maintenant $P=\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ un plan stable par A.

En complétant $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ en une base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ de $\mathbb{R}^4$, la matrice de u dans cette base est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_2 & A_3 \end{pmatrix} \text{ avec } A_1,A_2,A_3\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

Donc, $\chi_A=\chi_{A_1}\chi_{A_3}$ et ainsi, χ_{A_1} est un polynôme unitaire de degré 2 qui divise $\chi_A=(X-2)^2(X-1)^2$, donc :

$$\chi_{A_1}=(X-2)^2 \quad \text{ou} \quad \chi_{A_1}=(X-1)^2 \quad \text{ou} \quad \chi_{A_1}=(X-2)(X-1).$$

- Si $\chi_{A_1}=(X-2)^2$, 2 est la seule valeur propre de l'endomorphisme induit par u sur P (qui est stable par u), donc on peut choisir la base $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ telle que $\varepsilon_1=e_1$ et $u(\varepsilon_2)=\lambda e_1+2\varepsilon_2$.

  Or, si $\varepsilon_2=\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$, $u(\varepsilon_2)=\lambda e_1+2\varepsilon_2$ se récrit $\begin{pmatrix} 2a+5d\\ -c\\ b+2c\\ 2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \lambda+2a\\ 2b\\ 2c\\ 2d\end{pmatrix}$, soit $\varepsilon_2=\begin{pmatrix} a\\ 0\\ 0\\ d\end{pmatrix}$ avec $d\neq 0$ pour que la famille (e_1,ε_2) soit libre. Ainsi, $P=\mathrm{Vect}(e_1,ae_1+de_4)=\mathrm{Vect}(e_1,e_4)=P_1$.
- Si $\chi_{A_1}=(X-1)^2$, on montre de même que $P=\mathrm{Vect}(e_2,e_3)=P_2$.
- Si $\chi_{A_1}=(X-1)(X-2)$, Alors, 1 et 2 sont valeurs propres de l'endomorphisme induit par u sur P, donc e_1 et e_2-e_3 appartiennent à P, et comme P est de dimension 2, $P=\mathrm{Vect}(e_1,e_2-e_3)=P_3$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les plans stables par } A \text{ sont } P_1=\mathrm{Vect}(e_1,e_4),\ P_2=\mathrm{Vect}(e_2,e_3) \text{ et } P_3=\mathrm{Vect}(e_1,e_2-e_3).}$$

3) On a vu que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Plus précisément :

$$\begin{cases} u(5e_1)=2(5e_1) \\ u(e_4)=5e_1+2e_4 \\ u(e_2-e_3)=e_2-e_3 \\ u(e_2)=e_3=-(e_2-e_3)+e_2 \end{cases} \Rightarrow \quad M_{\mathcal{B}}(u)=A'=\begin{pmatrix} 2&1&0&0\\ 0&2&0&0\\ 0&0&1&-1\\ 0&0&0&1\end{pmatrix} \text{ avec } \mathcal{B}=(5e_1,e_4,e_2-e_3,e_2).$$

En posant $B=\begin{pmatrix} 2&1\\ 0&2\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 1&-1\\ 0&1\end{pmatrix}$, on a $A'=\begin{pmatrix} B&0_2\\ 0_2&C\end{pmatrix}$ et $A'=Q^{-1}AQ$ où Q est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}_c$ à la base $\mathcal{B}$.

De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $P(A') = Q^{-1}P(A)Q$, donc $P(A)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ si et seulement si $P(A')$ l'est. Or, avec les opérations par blocs, on a :

$$P(A') = \begin{pmatrix} P(B) & 0_2 \\ 0_2 & P(C) \end{pmatrix}.$$

Alors, $P(A')$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ si et seulement si $P(B)$ et $P(C)$ le sont dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (car les plans P_1 (engendré par les deux premiers vecteurs de $\mathcal{B}$) et P_2 (engendré par les deux derniers vecteurs de $\mathcal{B}$) sont stables par u.

Notons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $N^2 = 0_2$, $B = 2I_2 + N$ et $C = I_2 - N$.

Comme I_2 et N commutent, on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$B^k = (2I_2 + N)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (2I_2)^{k-i} N^i = 2^k I_2 + k\, 2^{k-1} N = \begin{pmatrix} 2^k & k\, 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

La formule ci-dessus reste vraie pour $k = 0$ et, pour tout $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$P(B) = \sum_{k=0}^{p} a_k B^k = \sum_{k=0}^{p} a_k \begin{pmatrix} 2^k & k\, 2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{p} a_k 2^k & \sum_{k=1}^{p} k\, a_k 2^{k-1} \\ 0 & \sum_{k=0}^{p} a_k 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(2) & P'(2) \\ 0 & P(2) \end{pmatrix}.$$

On obtient de même $P(C) = \begin{pmatrix} P(1) & -P'(1) \\ 0 & P(1) \end{pmatrix}$.

Enfin, une matrice du type $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à aI_2 et la seule matrice semblable à aI_2 est aI_2, donc $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ est diagonalisable si et seulement si $b = 0$.

Alors, $P(B)$ et $P(C)$ sont diagonalisables dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $P'(2) = P'(1) = 0$ et finalement, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\boxed{P(A) \text{ est diagonalisable dans } \mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \text{ si et seulement si } P'(2) = P'(1) = 0.}$$

Exercice 15

On considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et on veut :

> A est diagonalisable $\Leftrightarrow$ tout polynôme dont une puissance est annulatrice de A est annulateur de A.

($\Rightarrow$) On suppose que A est diagonalisable.

Alors, si $Sp(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$, le polynôme $Q = (X - \lambda_1)\dots(X - \lambda_p)$ est annulateur de A.

Soient maintenant $P \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{N}$ tels que P^α annule A. Les valeurs de propres de A sont alors des racines de P^α, donc de P et ainsi, Q divise P, soit $P = RQ$ avec $R \in \mathbb{C}[X]$. On a alors :

$$P(A) = R(A) \circ Q(A) = R(A) \circ 0 = 0.$$

Ainsi, P annule A et finalement :

<u>tout polynôme dont une puissance est annulatrice de A est annulateur de A</u>.

($\Leftarrow$) On suppose que tout polynôme dont une puissance est annulatrice de A est annulateur de A.

Soit $\chi_A = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}...(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ le polynôme caractéristique de A. Posons $\alpha = \max\left(\alpha_1, \dots, \alpha_p\right)$ et :

$$P = (X-\lambda_1)^{\alpha-\alpha_1}...(X-\lambda_p)^{\alpha-\alpha_p}\chi_A = (X-\lambda_1)^{\alpha}...(X-\lambda_p)^{\alpha} = \left[(X-\lambda_1)...(X-\lambda_p)\right]^{\alpha}.$$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton, χ_A est annulateur de A, donc P l'est aussi.

Or $P = \left[(X-\lambda_1)...(X-\lambda_p)\right]^{\alpha}$, donc par hypothèse, $(X-\lambda_1)...(X-\lambda_p)$ est annulateur de A, et comme $(X-\lambda_1)...(X-\lambda_p)$ est scindé à racines simples :

<u>A est diagonalisable</u>.

Finalement, on a bien :

Finalement :

A est diagonalisable si et seulement si tout polynôme dont une puissance est annulatrice de A est annulateur de A.

<u>Exercice 16</u>

1) On cherche $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & \overline{j} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

On peut alors chercher sous la forme $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & B & \end{pmatrix}$ avec $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ semblable à $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \overline{j} \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. La similitude matricielle conservant la trace et le déterminant, on alors :

$$a + d = j + \overline{j} = -1$$
$$ad - bc = j\overline{j} = 1$$

Si on choisit $d = 0$ et $b = 1$, on obtient $a = c = -1$, soit :

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On a $\chi_B = X^2 - Tr(B)X + \det B = X^2 + X + 1 = (X-j)(X-\overline{j})$, donc B est bien semblable à $\begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & \overline{j} \end{pmatrix}$ et :

Les valeurs propres de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont exactement les racines troisièmes de l'unité : $1, j, \overline{j}$.

2) a. On a $A^3 - I_n = 0_n$, donc le spectre complexe de A, $Sp(A)$, est inclus dans l'ensemble des racines complexes de $X^3 - 1$, soit $\{1, j, \overline{j}\}$. Ici, 1 n'est pas valeur propre de A, donc $Sp(A) \subset \{j, \overline{j}\}$.

Ainsi, $\chi_A = (X-j)^a (X-\overline{j})^b$ avec $a+b=n$. Or, A est réelle, donc $\chi_A \in \mathbb{R}[X]$ et $a=b$.

Finalement, $n = 2a$ et donc :

$$\boxed{n \text{ est pair.}}$$

b. Comme 1 n'est pas valeur propre de A, $A - I_n$ est inversible et donc :

$$A^3 = I_n \quad \Leftrightarrow \quad A^3 - I_n = (A - I_n)(A^2 + A + I_n) = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad A^2 + A + I_n = 0_n .$$

Ainsi :

$$\boxed{A^2 = -A - I_n}$$

c. On a :

$$AX = X - B \quad \Leftrightarrow \quad AX - X = (A - I_n)X = -B \quad \Leftrightarrow \quad X = -(A - I_n)^{-1}B .$$

Et si $C = A - I_n$, on a :

$$A^2 + A + I_n = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad (C + I_n)^2 + C + I_n + I_n = 0_n \quad \Leftrightarrow \quad C^2 + 3C = -3I_n \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3}(C + 3I_n)C = I_n .$$

Donc $(A - I_n)^{-1} = C^{-1} = -\frac{1}{3}(C + 3I_n)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{L'équation } AX = X - B \text{ admet une unique solution : } X = \frac{1}{3}(A - I_n)B + B .}$$

3) Toujours avec $C = A - I_n$, l'équation $AX = X - B$ se récrit à nouveau $CX = -B$. Ici, C n'est plus inversible, mais on a $A^3 = (C + I_n)^3 = C^3 + 3C^2 + 3C + I_n = I_n$, donc $\frac{1}{3}C^3 + C^2 + C = 0_n$.

Si $B \notin \operatorname{Im} C$ l'équation n'admet pas de solution.

Si $B \in \operatorname{Im} C$, alors $B = CX_0$ et si on pose $X = \frac{1}{3}CB + B$, on a :

$$C\left(\frac{1}{3}CB + B\right) = \frac{1}{3}C^2B + CB = \frac{1}{3}C^3X_0 + C^2X_0 = -CX_0 = -B .$$

Donc, dans ce cas, $X = \frac{1}{3}(A - I_n)B + B$ est encore solution et toute solution est de la forme $X + X_k$ avec $X_k \in \ker C$, soit $AX_k = X_k$.

Finalement :

> L'équation $AX = X - B$:
> - n'admet pas de solution quand $B \notin \operatorname{Im}(A - I_n)$;
> - admet une infinité de solutions de la forme $\frac{1}{3}(A - I_n)B + B + X_k$ avec $AX_k = X_k$ quand $B \in \operatorname{Im}(A - I_n)$.