

## Corrigés des TD du chapitre 9

### Exercice 1

Il est clair que si  $k = f'(a)$  alors  $c = a$  convient et si  $k = f'(b)$ , alors  $c = b$  convient.

On considère maintenant  $k$  tel que  $f'(a) < k < f'(b)$ .

- Supposons  $k = 0$ . On a donc  $f'(a) < 0 < f'(b)$ .

La fonction  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$ , donc continue sur  $[a, b]$  et comme  $[a, b]$  est un segment,  $f$  admet un minimum atteint en  $c \in [a, b]$ .

Mais  $f'(a) < 0$  donc  $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$ . Ceci implique que  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < 0$ , soit  $f(x) < f(a)$ , au voisinage de  $a^+$  donc que le minimum de  $f$  n'est pas atteint en  $a$  et  $c \neq a$ .

De même avec  $f'(b) > 0$ , on prouve que  $c \neq b$ .

Ainsi,  $f$  atteint un minimum en  $c \in ]a, b[$  donc  $f'$  s'annule (et change de signe) en  $c$ .

- Supposons  $k$  quelconque tel que  $f'(a) < k < f'(b)$ .

Posons  $g(x) = f(x) - kx$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $[a, b]$  et  $g'(x) = f'(x) - k$  donc  $g'(a) < 0 < g'(b)$ . Ainsi,  $g$  vérifie les hypothèses du cas précédent, donc il existe  $c \in ]a, b[$  tel que  $g'(c) = 0$ , ce qui revient à  $f'(c) = k$ .

Finalement, pour tout  $k \in [f'(a), f'(b)]$  :

Il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f'(c) = k$ .

### Exercice 2

1) On a  $[x_{n+1}, x_n] \subset ]0, 1]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $[x_{n+1}, x_n]$  et on peut appliquer le théorème des accroissements finis : il existe  $c_n \in ]x_{n+1}, x_n[$  tel que  $\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} = f'(c_n)$  et donc :

$$\left| \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{x_{n+1} - x_n} \right| = |f'(c_n)| \leq M.$$

Ceci prouve que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq M |x_{n+1} - x_n|$$

Soient maintenant  $n, p \in \mathbb{N}$ . On a pour tout  $k \in \mathbb{N}$  :

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq M |x_{k+1} - x_k| = M \left| \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^k} \right| = \frac{M}{2^{k+1}}.$$

Et si  $n \geq 1$  :

$$|f(x_{n+p}) - f(x_p)| = \left| \sum_{k=p}^{n+p-1} [f(x_{k+1}) - f(x_k)] \right| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leq \sum_{k=p}^{n+p-1} \frac{M}{2^{k+1}}.$$

Enfin :

$$\sum_{k=p}^{n+p-1} \frac{M}{2^{k+1}} = \frac{M}{2^{p+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{M}{2^p} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \leq \frac{M}{2^p}.$$

En remarquant que la relation voulue est immédiatement vraie quand  $n = 0$ , on a bien pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$  :

$$\boxed{|f(x_{n+p}) - f(x_p)| \leq \frac{M}{2^p}}$$

2) En prenant  $p = 0$  dans l'inégalité ci-dessus, on obtient pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|f(x_n) - f(x_0)| = |f(x_n) - f(1)| \leq M \Rightarrow f(1) - M \leq f(x_n) \leq f(1) + M.$$

Ainsi :

La suite  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

3) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = \sup_{k \geq n} f(x_k)$  est bien défini car  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée et  $u_n = \max(f(x_n), u_{n+1})$ , donc :

$$u_n \geq u_{n+1}.$$

Ainsi,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. Comme  $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  l'est aussi et donc :

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une limite finie  $L$ .

4) En intervertissant  $n$  et  $p$  dans le résultat de la question 1, on a pour tous  $n, p \in \mathbb{N}$ ,  $|f(x_{n+p}) - f(x_n)| \leq \frac{M}{2^n}$ .

On peut récrire cela sous la forme : pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout entier  $k \geq n$ ,  $|f(x_k) - f(x_n)| \leq \frac{M}{2^n}$ .

En passant au sup sur  $k \geq n$ , on obtient :

$$\left| \sup_{k \geq n} f(x_k) - f(x_n) \right| \leq \frac{M}{2^n}.$$

Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\boxed{|u_n - f(x_n)| \leq \frac{M}{2^n}}$$

On a alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$|L - f(x_n)| = |L - u_n + u_n - f(x_n)| \leq |L - u_n| + |u_n - f(x_n)| \leq |L - u_n| + \frac{M}{2^n}.$$

Or,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( |L - u_n| + \frac{M}{2^n} \right) = 0$ , donc d'après le théorème des gendarmes :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = L}$$

5) Pour tout  $x \in ]0,1]$ , il existe un unique  $N_x \in \mathbb{N}$  tel que  $\frac{1}{2^{N_x+1}} < x \leq \frac{1}{2^{N_x}}$  :  $N_x = E\left(-\frac{\ln x}{\ln 2}\right)$ .

De la même façon que dans la question 1, on prouve qu'il existe  $c_x \in \left]x, \frac{1}{2^{N_x}}\right[$  tel que :

$$\frac{f(x) - f(x_{N_x})}{x - x_{N_x}} = f'(c_x) \Rightarrow |f(x) - f(x_{N_x})| = |f'(c_x)| |x - x_{N_x}| \leq |f'(c_x)| |x_{N_x+1} - x_{N_x}| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}}$$

On a alors :

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f(x_{N_x})| + |f(x_{N_x}) - L| \leq \frac{M}{2^{N_x+1}} + |f(x_{N_x}) - L|.$$

Or, quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $N_x \rightarrow +\infty$  donc  $f(x_{N_x}) \rightarrow L$  et  $\frac{M}{2^{N_x+1}} \rightarrow 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{M}{2^{N_x+1}} + |f(x_{N_x}) - L| \right) = 0$ , ce qui à nouveau grâce au théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = L}$$

### Exercice 3

1) Posons  $g(x) = \|f(x)\|^2$ . Comme  $f$  est deux fois dérivable sur  $I$ ,  $g$  l'est aussi avec pour tout  $x \in I$  :

$$g'(x) = 2(f'(x) | f(x)) \quad \text{et} \quad g''(x) = 2\left[\|f'(x)\|^2 + (f''(x) | f(x))\right].$$

Or,  $\|f\|$  est constante, donc  $g$  aussi et ainsi,  $g' = g'' = 0$ , donc pour tout  $x \in I$  :

$$g''(x) = 2\left[\|f'(x)\|^2 + (f''(x) | f(x))\right] = 0 \Rightarrow (f''(x) | f(x)) = -\|f'(x)\|^2 \leq 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \|f\| \text{ est constante, } (f'' | f'') \text{ est à valeurs négatives.}}$$

*Interprétation cinématique :*

Si on pose  $f(t) = \overline{OM}$ ,  $\vec{v} = \frac{d\overline{OM}}{dt} = f'(t)$  est la vitesse et  $\vec{a} = \frac{d^2\overline{OM}}{dt^2} = f''(t)$  est l'accélération du mobile  $M$ .

Si  $\|f(t)\| = OM = cste$ , le mobile a une trajectoire circulaire.

Dans ce cas, on a  $\overline{OM} \cdot \vec{v} = 0$ , le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire circulaire et  $\overline{OM} \cdot \vec{a} \leq 0$  indique que la composante colinéaire à  $\overline{OM}$  de l'accélération  $\vec{a}$  est de sens contraire au vecteur  $\overline{OM}$  : cela correspond à la force centripète.

2) Tel qu'indiqué, considérons la fonction  $g : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{-2kx}$ , définie sur  $I$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ .

Comme  $f$  est dérivable sur  $I$ ,  $x \mapsto \|f(x)\|^2$  l'est aussi de dérivée  $x \mapsto 2(f'(x) | f(x))$ . Alors,  $g$  est dérivable sur  $I$ , avec pour tout  $x \in I$  :

$$g'(x) = 2(f'(x) | f(x)) e^{-2kx} - 2k \|f(x)\|^2 e^{-2kx} = 2\left((f'(x) | f(x)) - k \|f(x)\|^2\right) e^{-2kx}.$$

Or, on a  $\|f'(x)\| \leq k \|f(x)\|$  et grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient :

$$(f'(x) | f(x)) \leq \|f'(x)\| \cdot \|f(x)\| \leq k \|f(x)\|^2 \Rightarrow -k \|f(x)\|^2 \leq (f'(x) | f(x)) \leq k \|f(x)\|^2 \quad (1).$$

Donc,  $g'(x) \leq 0$  et  $g$  est décroissante sur  $I$ .

Si  $f$  s'annule en un point  $a \in I$ , alors  $g(a) = \|f(a)\|^2 e^{-2ka} = 0$  et ainsi, pour tout  $x \in I$  tel que  $x \geq a$ , on a  $g(x) \leq g(a) = 0$  et comme  $g$  est positive, on obtient  $g(x) = 0$  et donc :

$$f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I \text{ tel que } x \geq a.$$

Pour montrer que  $g$  est nulle à gauche de  $a$  aussi, la double inégalité **(1)**, nous invite à considérer la fonction  $h : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{2kx}$ , qui comme  $g$ , est positive et dérivable sur  $I$ , avec pour tout  $x \in I$  :

$$h'(x) = 2(f'(x) | f(x)) e^{2kx} + 2k \|f(x)\|^2 e^{2kx} = 2((f'(x) | f(x)) + k \|f(x)\|^2) e^{2kx}.$$

Grâce à **(1)**, on a  $h'(x) \geq 0$ , donc  $h$  est croissante sur  $I$  et ainsi, pour tout  $x \in I$  tel que  $x \leq a$ ,  $h(x) \leq h(a) = 0$ , ce qui donne  $h(x) = 0$  et donc :

$$f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in I \text{ tel que } x \leq a.$$

Finalement, on a  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in I$ , et ainsi :

Si la fonction  $f$  s'annule en un point de  $I$ , alors elle est nulle sur  $I$ .

#### Exercice 4

1) On a  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} [f(t) - f(kt)] \right) = \ell$  donc :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(kt)] - \ell \right\| \leq \varepsilon.$$

Or,  $k \in ]0, 1[$ , donc pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,  $0 < k^i \leq 1$  (égal à 1 pour  $i = 0$ ) et pour tout  $t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$ , on a :

$$0 < |t| \leq \alpha \Rightarrow 0 < |k^i t| \leq k^i \alpha \leq \alpha \Rightarrow \left\| \frac{1}{k^i t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - \ell \right\| \leq \varepsilon.$$

Et finalement, on a bien :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \forall i \in \mathbb{N}, \left\| \frac{1}{k^i t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - \ell \right\| \leq \varepsilon$$

2) Avec les notations de la question précédente, on a pour tout  $t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}$  et tout  $p \in \mathbb{N}^*$  :

$$\left\| \sum_{i=0}^{p-1} \left( \frac{1}{t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - k^i \ell \right) \right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \left\| \frac{1}{t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - k^i \ell \right\| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon k^i = \varepsilon \sum_{i=0}^{p-1} k^i.$$

Or :

$$\sum_{i=0}^{p-1} \left( \frac{1}{t} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - k^i \ell \right) = \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{p-1} [f(k^i t) - f(k^{i+1} t)] - \left( \sum_{i=0}^{p-1} k^i \right) \ell = \frac{1}{t} [f(t) - f(k^p t)] - \left( \sum_{i=0}^{p-1} k^i \right) \ell.$$

Avec  $\sum_{i=0}^{p-1} k^i = \frac{1-k^p}{1-k}$ , on obtient :

$$\left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(k^p t)] - \frac{1-k^p}{1-k} \ell \right\| \leq \frac{1-k^p}{1-k} \varepsilon.$$

Or,  $\lim_{p \rightarrow +\infty} k^p = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ , donc en passant à la limite quand  $p \rightarrow +\infty$  dans l'inégalité ci-dessus (qui est vraie quel que soit  $p$ ), on obtient :

$$\left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(0)] - \frac{1}{1-k} \ell \right\| \leq \frac{1}{1-k} \varepsilon.$$

Ainsi, avec  $K = \frac{1}{1-k} > 0$ , on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall t \in [-\alpha, \alpha] \setminus \{0\}, \left\| \frac{1}{t} [f(t) - f(0)] - \frac{1}{1-k} \ell \right\| \leq K\varepsilon$$

Ceci prouve que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(t) - f(0)] = \frac{1}{1-k} \ell$  et donc que :

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ avec } f'(0) = \frac{1}{1-k} \ell.$$

### Exercice 5

1) Remarquons préalablement que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et tout  $t \in \mathbb{R}^*$ , on a  $\left| t \cos\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right| \leq |t|$  et  $\left| t \sin\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right| \leq |t|$ , donc :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left[ t \cos\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right] = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ t \sin\left(\frac{\alpha}{t}\right) \right] = 0.$$

La fonction  $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} y^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, 0), a \in \mathbb{R}\}$  en tant que produit de

telles fonctions avec pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $y \neq 0$  :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \cos\left(\frac{x}{y}\right) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) - x \cos\left(\frac{x}{y}\right).$$

Soit  $a \in \mathbb{R}$ .

- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x, 0) - f(a, 0)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} 0 = 0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, 0)$  existe et vaut 0.
- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(a, y) - f(a, 0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[ y \sin\left(\frac{a}{y}\right) \right] = 0$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial y}(a, 0)$  existe et vaut 0.

Ainsi,  $f$  admet des dérivées partielles en tout point de  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $a \in \mathbb{R}^*$ .

A l'aide de ce que l'on vu en introduction, on a :

- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, 0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(a, 0)$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial x}$  est continue en  $(a, 0)$  ;
- $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, 0)} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ , mais  $x \cos\left(\frac{x}{y}\right)$  n'admet pas de limite quand  $(x, y) \rightarrow (a, 0)$ , donc  $\frac{\partial f}{\partial y}$  n'admet pas de limite quand  $(x, y) \rightarrow (a, 0)$ .

Ainsi,  $f$  n'est pas de classe  $C^1$  en  $(a, 0)$  quand  $a \in \mathbb{R}^*$ .

Par contre,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \cos\left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2y \sin\left(\frac{x}{y}\right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \cos\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ , donc :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

Ainsi,  $f$  est de classe  $C^1$  en  $(0,0)$ .

Finalement :

$f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \cup \{(0,0)\}$ , mais pas plus.

Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$  existe, c'est la dérivée de  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$  en 0. Or, la fonction  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$  n'est pas définie, donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \text{ n'existe pas.}$$

Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$  existe, c'est la dérivée de  $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y$  en 0, soit 1. Donc :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) \text{ existe est vaut } 1.$$

2) La fonction sh étant une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , on a :

$$\text{sh } x - \text{sh } y = 0 \iff x = y.$$

La fonction  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$  où  $\Delta$  est la première bissectrice (d'équation  $x = y$ ) en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$  :

$$f(x,y) = \frac{\sin x - \sin y}{\text{sh } x - \text{sh } y} = \frac{2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2 \text{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}{\text{ch}\left(\frac{x+y}{2}\right) \text{sh}\left(\frac{x-y}{2}\right)} = \phi\left(\frac{x+y}{2}\right) \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

avec  $\phi(t) = \frac{\cos t}{\text{ch } t}$  et  $\varphi(t) = \frac{\sin t}{\text{sh } t}$ .

Remarquons que les fonctions  $\phi$  et  $\varphi$  sont toutes deux des fonctions d'une seule variable réelle et on a :

- Les fonctions  $(x,y) \mapsto \frac{x+y}{2}$  et  $(x,y) \mapsto \frac{x-y}{2}$  sont polynomiales, donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- La fonction  $\phi$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$  (la fonction ch ne s'annulant pas sur  $\mathbb{R}$ ).
- La fonction  $\varphi$  est définie et de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^*$  (la fonction sh ne s'annulant qu'en 0).

De plus, en 0, on a  $\varphi(t) \underset{0}{\sim} 1$  donc  $\varphi$  est prolongeable par continuité en 0 en posant  $\varphi(0) = 1$ .

Pour tout  $t \in \mathbb{R}^*$ ,  $\varphi'(t) = \frac{\cos t \operatorname{sh} t - \sin t \operatorname{ch} t}{\operatorname{sh}^2 t}$  et, au voisinage de 0, on a  $\varphi'(t) = \frac{o(t^2)}{t^2 + o(t^2)} = \frac{o(1)}{1 + o(1)}$ , donc

$\varphi'$  admet une limite finie en 0 (qui est 0) et le prolongement de  $\varphi$  est de classe  $C^1$  en 0, donc sur  $\mathbb{R}$ .

Ainsi, par composition,  $(x, y) \mapsto \phi\left(\frac{x+y}{2}\right)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et  $(x, y) \mapsto \varphi\left(\frac{x-y}{2}\right)$  est prolongeable en une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et finalement :

La fonction  $f$  admet un prolongement de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice 6

1) Soit  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a :

$$f(P) = \int_0^1 P^2 = \int_0^1 \left( \sum_{k=0}^n a_k t^k \right)^2 dt = \int_0^1 \left( \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i a_j t^{i+j} \right) dt = \sum_{0 \leq i, j \leq n} a_i a_j \int_0^1 t^{i+j} dt = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{1}{i+j+1} a_i a_j.$$

Ainsi,  $f$  est polynômiale sur  $\mathbb{R}_n[X]$  donc :

$f$  est différentiable sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a :

$$f(P) = \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ i, j \neq k}} \frac{1}{i+j+1} a_i a_j + 2 \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{1}{i+k+1} a_i a_k + \frac{1}{2k+1} a_k^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a_k}(P) = \sum_{i=0}^n \frac{2}{i+k+1} a_i.$$

Donc, pour tout  $H = \sum_{k=0}^n h_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $df(P) \cdot H = \sum_{j=0}^n \left( h_j \sum_{i=0}^n \frac{2}{i+j+1} a_i \right)$ , soit :

$$df(P) \cdot H = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{2a_i h_j}{i+j+1}$$

*Autre version (plus chic !)* :

Munissons  $\mathbb{R}_n[X]$  du produit scalaire  $(P|Q) = \int_0^1 PQ$  (on peut choisir le produit scalaire que l'on veut car  $\mathbb{R}_n[X]$  est de dimension finie). On a alors  $f(P) = \int_0^1 P^2 = \|P\|^2$  et pour tous  $P, H \in \mathbb{R}_n[X]$  :

$$f(P+H) = \|P+H\|^2 = \|P\|^2 + 2(P|H) + \|H\|^2 = f(P) + 2(P|H) + o(\|H\|).$$

Ceci prouve que :

$$df(P) \cdot H = 2(P|H) = 2 \int_0^1 PH$$

Remarquons qu'avec  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$  et  $H = \sum_{k=0}^n h_k X^k$ , on a  $2 \int_0^1 PH = \sum_{0 \leq i, j \leq n} \frac{2a_i h_j}{i+j+1}$ .

2) Remarquons que  $A \mapsto \det A$  est polynômiale en les coefficients de  $A$ , donc continue. Alors,  $\det^{-1}(\{0\})$  est fermé dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  (car  $\{0\}$  est fermé dans  $\mathbb{R}$ ), donc  $GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \det^{-1}(\{0\})$  est un ouvert de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$  et  $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0$ .

Comme  $A$  est inversible, 0 n'est pas valeur propre de  $A$ , donc  $\chi_A(0) = a_0 \neq 0$ . Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a  $\chi_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I_n = 0_n$ , donc :

$$-\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I_n)A = I_n \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \dots + a_1I_n).$$

Or,  $\chi_A = \det(XI_n - A)$ , donc les  $a_k$  sont polynômiaux en les coefficients de  $A$ . Comme les coefficients des puissances de  $A$ , sont aussi polynômiaux en les coefficients de  $A$ , les coefficients de  $A^{-1}$  sont polynômiaux en les coefficients de  $A$ .

Enfin, les fonctions polynômiales sont différentiables sur leur ensemble de définition, donc :

$f$  est différentiable sur son ensemble de définition.

Pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $A + tE_{i,j} \in GL_n(\mathbb{R})$  pour  $t$  réel proche de 0 (car  $GL_n(\mathbb{R})$  est ouvert) et :

$$\frac{1}{t} [f(A + tE_{i,j}) - f(A)] = \frac{1}{t} [(A + tE_{i,j})^{-1} - A^{-1}] = \frac{1}{t} (A + tE_{i,j})^{-1} (I_n - (A + tE_{i,j})A^{-1}) = -(A + tE_{i,j})^{-1} E_{i,j} A^{-1}.$$

Alors,  $\frac{\partial f}{\partial a_{i,j}}(A) = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{1}{t} [f(A + tE_{i,j}) - f(A)] \right) = -A^{-1} E_{i,j} A^{-1}$  et donc pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$df(A)(E_{i,j}) = -A^{-1} E_{i,j} A^{-1}.$$

Et ainsi :

$$df(A) : M \mapsto -A^{-1} M A^{-1}$$

3) Soit  $(x, h) \in E^2$ . On a :

$$f(x+h) = (x+h | u(x+h)) = (x+h | u(x) + u(h)) = (x | u(x)) + (h | u(x)) + (x | u(h)) + (h | u(h)).$$

Comme  $u$  est symétrique,  $(x | u(h)) = (h | u(x))$  donc :

$$f(x+h) = f(x) + 2(h | u(x)) + (h | u(h)).$$

Et comme  $u$  est un endomorphisme réel symétrique, il est diagonalisable, donc il existe une base orthonormée  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $E$  dans laquelle, si  $h = h_1 e_1 + h_2 e_2 + \dots + h_n e_n$ , on a  $u(h) = h_1 \lambda_1 e_1 + h_2 \lambda_2 e_2 + \dots + h_n \lambda_n e_n$  et, en posant  $m = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_n|)$ , on obtient :

$$\|u(h)\| = \sqrt{h_1^2 \lambda_1^2 + h_2^2 \lambda_2^2 + \dots + h_n^2 \lambda_n^2} \leq m \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2} = m \|h\|.$$

Alors, avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|(h | u(h))| \leq \|h\| \cdot \|u(h)\| \leq m \|h\|^2 \Rightarrow (h | u(h)) = o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$



Ainsi :

$$f(x+h) = f(x) + 2(h|u(x)) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Donc :

$$f \text{ est différentiable sur } E \text{ et pour tout } x \in E, df(x) : h \mapsto 2(h|u(x))$$

Soit  $(x, h) \in E^2$  tel que  $x \neq 0$  et  $x+h \neq 0$ . On a :

$$g(x+h) = \frac{(x+h|u(x+h))}{(x+h|x+h)} = \frac{(x|u(x)) + 2(h|u(x)) + (h|u(h))}{(x|x) + 2(h|x) + (h|h)} = \frac{(x|u(x)) + 2(h|u(x)) + (h|u(h))}{(x|x) \left[ 1 + 2 \frac{(h|x)}{(x|x)} + \frac{(h|h)}{(x|x)} \right]}$$

Or :

$$\left( 2 \frac{(h|x)}{(x|x)} + \frac{(h|h)}{(x|x)} \right)^2 \leq \frac{1}{\|x\|^4} (2|(h|x)| + |(h|h)|)^2 \leq \frac{1}{\|x\|^4} (2\|x\| \cdot \|h\| + \|h\|^2)^2 \leq \|h\|^2 \frac{(2\|x\| + \|h\|)^2}{\|x\|^4}.$$

Donc  $\left( 2 \frac{(h|x)}{(x|x)} + \frac{(h|h)}{(x|x)} \right)^2 = o_{h \rightarrow 0}(\|h\|)$  et :

$$g(x+h) = \frac{f(x) + 2(h|u(x)) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|)}{(x|x)} \left[ 1 - 2 \frac{(h|x)}{(x|x)} + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|) \right] = g(x) + 2 \frac{(h|u(x)) - (h|x)g(x)}{(x|x)} + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|).$$

Donc :

$$g \text{ est différentiable sur } E \setminus \{0\} \text{ et pour tout } x \in E \setminus \{0\}, dg(x) : h \mapsto 2 \frac{(h|u(x)) - (h|x)g(x)}{(x|x)}$$

Soit  $a \in E \setminus \{0\}$  tel que  $dg(a) = 0$ , soit pour tout  $h \in E$  :

$$(h|u(a)) - (h|a)g(a) \Leftrightarrow (h|u(a) - g(a)a) = 0.$$

En posant  $\lambda = g(a) \in \mathbb{R}$ , ceci revient à  $u(a) = \lambda a$  et donc,  $a$  (qui est non nul) est vecteur propre de  $u$ .

Réciproquement, si  $a \in E \setminus \{0\}$  est vecteur propre de  $u$  associé à la valeur propre  $\lambda$ , alors :

$$u(a) - g(a)a = u(a) - \frac{(a|u(a))}{(a|a)}a = \lambda a - \frac{(a|\lambda a)}{(a|a)}a = \lambda a - \lambda \frac{(a|a)}{(a|a)}a = 0.$$

Et donc,  $dg(a) = 0$ .

Ainsi :

$$dg(a) = 0 \text{ si et seulement si } a \text{ est un vecteur propre de } u.$$

### Exercice 7

Comme  $\varphi$  admet un maximum local en  $(u(a), v(b))$ , il existe une boule ouverte  $B$ , de centre  $(u(a), v(b))$  et de rayon  $r > 0$ , telle que :

$$\forall (X, Y) \in B, \varphi(X, Y) \leq \varphi(u(a), v(b)).$$

Par ailleurs,  $u$  et  $v$  sont continues respectivement en  $a$  et  $b$  donc  $(x, y) \mapsto (u(x), v(y))$  est continue en  $(a, b)$ .

Ceci implique qu'il existe un réel  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in B((a, b), \alpha)$  :

$$(u(x), v(y)) \in B.$$

Alors, pour tout  $(x, y) \in B((a, b), \alpha)$ , on a :

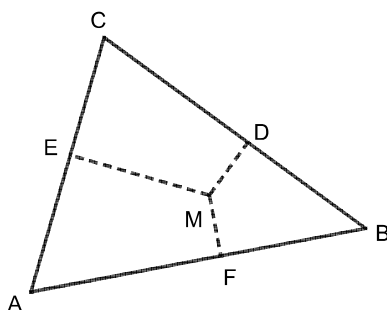
$$f(x, y) = \varphi(u(x), v(y)) \leq \varphi(u(a), v(b)).$$

Ceci montre que :

$$f \text{ admet un maximum local en } (a, b).$$

### Exercice 8

Faisons un schéma. On note  $D$ ,  $E$  et  $F$  les projetés orthogonaux de  $M$  sur  $(BC)$ ,  $(AC)$  et  $(AB)$  respectivement.



On cherche le maximum de  $MD \times ME \times MF$ .

Appelons  $S$  l'aire du triangle  $ABC$ . On a :

$$S = S_{MBC} + S_{MAC} + S_{MAB} = \frac{1}{2}(MD \times BC + ME \times AC + MF \times AB).$$

Posons  $x = MD$  et  $y = ME$ . On a alors  $x, y \in \mathbb{R}_+$  et  $MF = \frac{2S - MD \times BC - ME \times AC}{AB}$ , donc :

$$MD \times ME \times MF = \frac{MD \times ME \times (2S - MD \times BC - ME \times AC)}{AB}.$$

Et  $MD \times ME \times MF$  est maximal quand  $MD \times ME \times (2S - MD \times BC - ME \times AC)$  l'est.

Posons  $a = BC$ ,  $b = AC$ ,  $c = AB$  et :

$$f(x, y) = MD \times ME \times (2S - MD \times BC - ME \times AC) = xy(2S - ax - by) = 2Sxy - ax^2y - bxy^2.$$

La fonction  $f$  est polynômiale donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  et pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2Sy - 2axy - by^2 = y(2S - 2ax - by) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2Sx - ax^2 - 2bxy = x(2S - ax - 2by) \end{aligned}$$

On a alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y(2S - 2ax - by) = 0 \\ x(2S - ax - 2by) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } 2ax + by = 2S \\ x = 0 \text{ ou } ax + 2by = 2S \end{cases}$$

Si  $x=0$  ou  $y=0$ , alors  $f(x,y)=0$  donc  $f$  est minimale (car  $f(x,y)$  est toujours positif : c'est un produit de distances). On s'intéresse donc à l'unique point critique  $(x,y)$  tel que  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ , qui est donnée par :

$$\begin{cases} 2ax+by=2S \\ ax+2by=2S \end{cases} \Leftrightarrow (x,y) = \left( \frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b} \right).$$

Alors :

$$f\left(\frac{2S}{3a}, \frac{2S}{3b}\right) = \frac{8S^3}{27ab}.$$



Or, on peut écrire pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$  :

$$f(x,y) = 2Sxy - ax^2y - bxy^2 = \frac{y(by-2S)^2}{4a} - ay\left(x + \frac{by-2S}{2a}\right)^2 \leq \frac{y(by-2S)^2}{4a} = \frac{1}{4a}g(y).$$

Remarquons que comme  $M$  reste à l'intérieur du triangle  $ABC$ ,  $y=ME$  reste inférieur à la longueur  $h$  de la hauteur issue de  $B$ . Or,  $S = \frac{h \times AC}{2} = \frac{hb}{2}$ , donc  $h = \frac{2S}{b}$ . Ainsi,  $y \in \left[0, \frac{2S}{b}\right]$ .

La fonction  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $g'(y) = (by-2S)^2 + 2by(by-2S) = (3by-2S)(by-2S)$ .

On a alors le tableau :

$y$	0	$\frac{2S}{3b}$	$\frac{2S}{b}$
$g'(y)$	+	0	-
$g$			

Ainsi,  $g$  est maximale quand  $y = \frac{2S}{3b}$  et donc, pour tout  $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$  avec  $y \in \left[0, \frac{2S}{b}\right]$ , on a :

$$f(x,y) \leq \frac{1}{4a}g(y) \leq \frac{1}{4a}g\left(\frac{2S}{3b}\right) = \frac{8S^3}{27ab}.$$

Finalement,  $\frac{8S^3}{27ab}$  est le maximum de  $f$  atteint quand  $x = MD = \frac{2S}{3a}$  et  $y = ME = \frac{2S}{3b}$ , et dans ce cas, avec  $c = AB$ , on obtient :

$$MF = \frac{2S - MD \times BC - ME \times AC}{AB} = \frac{2S}{3c}.$$

Ainsi :

Le maximum du produit des distances d'un point  $M$  intérieur à un triangle  $ABC$  aux cotés de ce triangle est  $\frac{8S^3}{27AB \times BC \times CA}$ , atteint quand  $d(M, (BC)) = \frac{2S}{3BC}$ ,  $d(M, (AC)) = \frac{2S}{3AC}$  et  $d(M, (AB)) = \frac{2S}{3AB}$ .

Remarquons que le point  $M$  ci-dessus est le centre de gravité  $G$  de  $ABC$ .

En effet, si, comme plus haut,  $D$  est le projeté orthogonal de  $G$  sur  $(BC)$ , on a  $S_{GBC} = \frac{BC \times GD}{2}$ , donc :

$$GD = \frac{2S_{GBC}}{BC}.$$

Or, si  $\mathcal{B}$  une base orthonormée directe du plan, on a :

$$2S_{GBC} = \left| \left[ \overline{BC}, \overline{BG} \right] \right| = \left| \det_{\mathcal{B}}(\overline{BC}, \overline{BG}) \right| = \left| \det_{\mathcal{B}} \left( \overline{BC}, \frac{1}{3}(\overline{BA} + \overline{BC}) \right) \right| = \left| \det_{\mathcal{B}} \left( \overline{BC}, \frac{1}{3}\overline{BA} \right) \right| = \frac{1}{3} \left| \det_{\mathcal{B}}(\overline{BC}, \overline{BA}) \right| = \frac{1}{3} 2S.$$

Donc :

$$GD = d(G, (BC)) = \frac{2S}{3BC}.$$

Et on a de même,  $d(G, (AC)) = \frac{2S}{3AC}$  et  $d(G, (AB)) = \frac{2S}{3AB}$ .

### Exercice 9

1) On a  $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ .

Commençons par considérer la fonction  $h : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$ .

Soit  $x \in \mathbb{R}$  fixé. La fonction  $y \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , donc :

$$y \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Soit maintenant  $y \in \mathbb{R}$  fixé. Posons  $I = [0, y]$  ou  $[y, 0]$ .

- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est continue et intégrable sur le segment  $I$ .
- Pour tout  $t \in I$ ,  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$  est continue sur  $I$ .
- Pour tout segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t)$  est continue sur  $[a, b]$ , donc  $y$  admet un maximum et

$$t \mapsto \max_{x \in [a, b]} \left[ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) \right] \text{ est continue sur le segment } I, \text{ donc intégrable.}$$

Alors,  $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $[a, b]$ , de dérivée  $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt$ .

Ceci étant vrai pour tout segment  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , la fonction  $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , de dérivée

$x \mapsto \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt$ . Or, pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, t)$ , donc :

$$\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt = -\int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, t) dt = -\left[ \frac{\partial f}{\partial y}(x, t) \right]_0^y = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0).$$

Enfin,  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  et  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , donc  $x \mapsto \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, t) dt$  l'est aussi en tant que différence de telles fonctions.

Finalement :

$$x \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}, \text{ de dérivée } x \mapsto -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0).$$

Ainsi,  $h : (x, y) \mapsto \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , de dérivées partielles :

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y).$$

Enfin, la fonction  $\ell : x \mapsto \int_0^x \frac{\partial f}{\partial y}(t, 0) dt$  est la primitive qui s'annule en 0 de  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$  qui est de classe  $C^1$

sur  $\mathbb{R}$ , donc elle est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , de dérivée  $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0)$ .

En définitive,  $g = h - \ell$  est la différence de deux fonctions de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ , donc :

$g \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}^2.$

De plus, d'après ce qui précède, on a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial \ell}{\partial x}(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial \ell}{\partial y}(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

Donc, on a bien :

$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}$

2) Posons  $\varphi(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$  sur  $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ . Comme  $(r, \theta) \mapsto r \cos \theta$  et  $(r, \theta) \mapsto r \sin \theta$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi]$ , on a :

- pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $\theta \mapsto \varphi(r, \theta)$  est continue, et donc intégrable sur le segment  $[0, 2\pi]$  ;
- pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $r \mapsto \varphi(r, \theta)$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  avec :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) ;$$

- Pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $\theta \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta)$  est continue sur  $I$  en tant que somme de telles fonctions ;
- Pour tout segment  $[0, a] \subset \mathbb{R}_+$ ,  $(x, y) \mapsto \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right|$  et  $(x, y) \mapsto \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right|$  sont continues sur le compact  $[-a, a] \times [-a, a]$  donc y admettent toutes deux un maximum, respectivement  $M_1$  et  $M_2$  ; alors, pour tout  $(r, \theta) \in [0, a] \times [0, 2\pi]$ , on a  $\left| \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) \right| \leq M_1 |\cos \theta| + M_2 |\sin \theta|$  et  $\theta \mapsto M_1 |\cos \theta| + M_2 |\sin \theta|$  est continue et intégrable sur le segment  $[0, 2\pi]$ .

Ainsi :

$$\Phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) d\theta \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \Phi'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial r}(r, \theta) d\theta.$$

On a alors, pour tout  $r \in \mathbb{R}_+$  :

$$\begin{aligned} \Phi'(r) &= \int_0^{2\pi} \left[ \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \cos \theta \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) - \sin \theta \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right] d\theta \end{aligned}$$

Et, pour tout  $r \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$\Phi'(r) = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \left[ -r \sin \theta \frac{\partial g}{\partial x}(r \cos \theta, r \sin \theta) + r \cos \theta \frac{\partial g}{\partial y}(r \cos \theta, r \sin \theta) \right] d\theta = \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.$$

Soit :

$$\Phi'(r) = \frac{1}{r} \left[ g(r \cos \theta, r \sin \theta) \right]_0^{2\pi} = \frac{1}{r} \left[ g(r, 0) - g(r, 0) \right] = 0.$$

Ainsi,  $\Phi'$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+^*$  et, comme elle est continue sur  $\mathbb{R}_+$  :

$$\Phi' = 0$$

3) L'application  $\Phi : r \mapsto \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$  est de dérivée nulle sur  $\mathbb{R}_+$ , donc elle y est constante.

Supposons que  $f$  possède un extremum local en  $(0, 0)$ . Quitte à changer  $f$  en  $-f$  (qui vérifie les mêmes hypothèses), on peut supposer que c'est un minimum. Il existe alors un réel  $R > 0$  tel que pour tout  $(x, y) \in B((0, 0), R)$ , on a  $f(x, y) \geq f(0, 0)$ .

Soit  $r \in [0, R[$ . Pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ , on a  $(r \cos \theta, r \sin \theta) \in B((0, 0), R)$ , donc  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0) \geq 0$ .

De plus,  $\theta \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)$  est continue sur  $[0, 2\pi]$  et :

$$\int_0^{2\pi} [f(r \cos \theta, r \sin \theta) - f(0, 0)] d\theta = \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta - \int_0^{2\pi} f(0, 0) d\theta = \Phi(r) - \Phi(0) = 0.$$

Nous avons donc une fonction continue, positive et d'intégrale nulle sur  $[0, 2\pi]$  : elle est nulle sur ce segment, soit pour tout  $\theta \in [0, 2\pi]$ ,  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(0, 0)$ .

Ceci étant vrai pour tout  $r \in [0, R[$ , on a finalement,  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(0, 0)$  pour tout  $(r, \theta) \in [0, R[ \times [0, 2\pi]$ , soit  $f(x, y) = f(0, 0)$  pour tout  $(x, y) \in B((0, 0), R)$ , et donc :

$$f \text{ est constante au voisinage de } (0, 0).$$



**Exercice 10**

Soit  $\vec{f}$  une éventuelle solution du problème. On a :

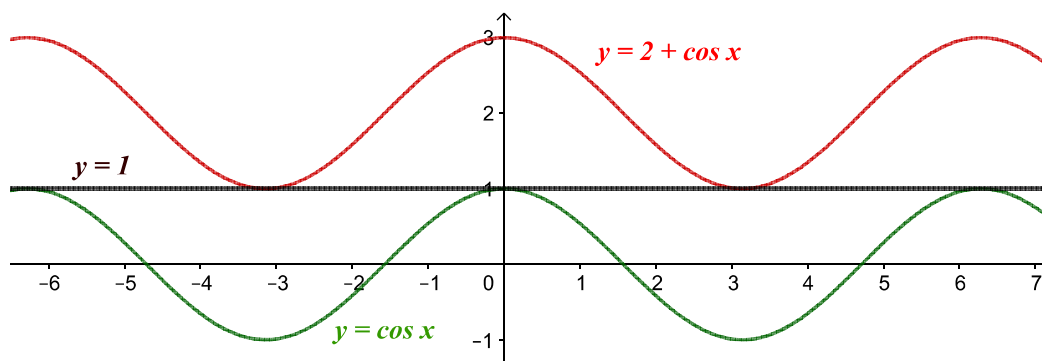
$$\begin{cases} \|\vec{f}\| \leq 2 \\ \vec{f} \cdot \vec{f}' \geq \sin \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq \frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 \leq 2 \\ \left( \frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 \right)' \geq \sin \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \leq \frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 + \cos \leq 2 + \cos \\ \left( \frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 + \cos \right)' \geq 0 \end{cases}$$

Posons alors  $g = \frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 + \cos = \frac{1}{2} \vec{f} \cdot \vec{f} + \cos$ .

La fonction  $g$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$  et, comme  $\vec{f}$  et  $\cos$  sont de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $g$  l'est aussi et vérifie :

$$\cos \leq g \leq 2 + \cos \quad \text{et} \quad g' \geq 0.$$

La deuxième condition implique que  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$  et la première condition traduit le fait que la courbe de  $g$  est comprise entre les courbes de  $x \mapsto \cos x$  et  $x \mapsto 2 + \cos x$ , représentées ci-dessous (ainsi que la droite horizontale d'équation  $y = 1$ ).



Supposons qu'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $g(x_0) > 1$ . Alors, comme  $g$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $(2k+1)\pi \geq x_0$ , on a  $g((2k+1)\pi) \geq g(x_0) > 1$ . Or,  $g((2k+1)\pi) \leq 2 + \cos((2k+1)\pi) = 1$ , ce qui est absurde.

Ainsi, on a  $g(x) \leq 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Supposons maintenant qu'il existe  $x_1 \in \mathbb{R}$  tel que  $g(x_1) < 1$ . Toujours grâce à la croissance de  $g$ , on a  $g(2k\pi) \leq g(x_1) < 1$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $2k\pi \leq x_1$ . Or,  $g(2k\pi) \geq \cos(2k\pi) = 1$ , ce qui est absurde.

Ainsi, on a  $g(x) \geq 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

Finalement, on obtient  $g(x) = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Ainsi, si  $\vec{f}$  est solution du problème, on a :

$$\frac{1}{2} \|\vec{f}\|^2 + \cos = 1 \Leftrightarrow \|\vec{f}\|^2 = 2(1 - \cos).$$

Réciproquement, on vérifie facilement que toute fonction  $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  telle que  $\|\vec{f}\|^2 = 2(1 - \cos)$  vérifie bien  $\|\vec{f}\| \leq 2$  et  $\vec{f} \cdot \vec{f}' \geq \sin$ , et finalement :

Toute fonction  $\vec{f} \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  telle que  $\|\vec{f}\|^2 = 2(1 - \cos)$  est solution du problème.

**Exercice 11**

1) Posons pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $g_n : t \mapsto \frac{e^{-nt}}{n^2}$  et  $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , la fonction  $g_n$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+$  (car proportionnelle à une fonction exponentielle) et, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ , on a :

$$0 < g_n(t) \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comme la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, la série de fonctions  $\sum g_n$  converge normalement (donc uniformément et simplement) sur  $\mathbb{R}_+$ , et ainsi,  $g = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n$  est bien définie et même continue sur  $\mathbb{R}_+$ .

De plus,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_n(t) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . La convergence normale de  $\sum g_n$  sur  $\mathbb{R}_+$  permet alors de conclure que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} g_n(t) = 0.$$

Enfin, pour tout réel  $a > 0$ , tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $t \in [a, +\infty[$ , on a :

$$|g_n'(t)| = \left| -n \frac{e^{-nt}}{n^2} \right| = \frac{e^{-nt}}{n} \leq e^{-na}$$

$$|g_n''(t)| = \left| n^2 \frac{e^{-nt}}{n^2} \right| = e^{-nt} \leq e^{-na}$$

Comme la série géométrique  $\sum e^{-na}$  converge car  $e^{-a} \in ]0, 1[$ , les séries de fonctions  $\sum g_n'$  et  $\sum g_n''$  convergent normalement (donc uniformément) sur  $[a, +\infty[$ , donc  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $[a, +\infty[$ .

Ceci étant vrai pour tout  $a \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , avec pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$g'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'(t) = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{n} < 0$$

$$g''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n''(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}$$

Ainsi,  $g$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , donc sur  $\mathbb{R}_+$  (car continue en 0).

Finalement, la fonction  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}_+^*$  et strictement décroissante de  $g(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$  à  $\lim_{+\infty} g = 0$ ,

donc d'après le théorème de la bijection continue,  $g$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  dans  $\left] 0, \frac{\pi^2}{6} \right]$  et ainsi :

$$g(\mathbb{R}_+) = \left] 0, \frac{\pi^2}{6} \right].$$

Or, quand  $(x, y)$  décrit  $\mathbb{R}^2$ ,  $x^2 + y^2$  décrit  $\mathbb{R}_+$ , donc  $f(\mathbb{R}^2) = g(\mathbb{R}_+)$ , soit :

$$\boxed{f(\mathbb{R}^2) = \left] 0, \frac{\pi^2}{6} \right]}$$



2) On a vu que  $g$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$g''(t) = \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

Donc, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$g'(t) = \ln(1 - e^{-t}) + k \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Or, sur  $[1, +\infty[$ ,  $g' = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n'$  et la convergence est uniforme. Comme pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} g_n'(t) = 0$ , on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} g'(t) = 0.$$

Comme  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1 - e^{-t}) = 0$ , on obtient  $k = 0$  et donc pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $g'(t) = \ln(1 - e^{-t})$ .

Alors, pour tous  $\varepsilon, t \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$g(t) = g(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^t g'(u) du = g(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^t \ln(1 - e^{-u}) du.$$

Enfin :

$$\ln(1 - e^{-u}) = \ln\left(1 - \left[1 - u + o_0(u)\right]\right) = \ln\left(u + o_0(u)\right) = \ln u + \ln\left(1 + o_0(1)\right) = \ln u + o_0(\ln u).$$

Comme  $u \mapsto \ln u$  est de signe constant au voisinage de 0 et intégrable en 0,  $\int_0^t \ln(1 - e^{-u}) du$  converge et comme  $g$  est continue en 0, on peut écrire :

$$g(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ g(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^t \ln(1 - e^{-u}) du \right] = g(0) + \int_0^t \ln(1 - e^{-u}) du.$$

Soit, pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$g(t) = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^t \ln(1 - e^{-u}) du$$

3) La fonction  $f$  est la composée de  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  par  $g$ , qui comme on vient de le voir est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Or, la fonction  $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$  est de classe  $C^1$  (car polynomiale) sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  et à images dans  $\mathbb{R}_+^*$ . Alors,  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  (composée de fonctions  $C^1$ ) avec pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xg'(x^2 + y^2) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 2yg'(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Comme  $g'$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}_+^*$  (on a vu que  $g' < 0$ ),  $f$  n'admet pas de point critique dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , donc pas d'extremum (local ou global) sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

Par contre, on a vu que pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $g(t) \leq g(0) = \frac{\pi^2}{6}$ , donc pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$f(x, y) \leq f(0, 0) = g(0) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ainsi :

La fonction  $f$  n'a pas de minimum, mais admet un maximum global,  $\frac{\pi^2}{6}$ , atteint uniquement en  $(0, 0)$ .

**Exercice 12**

On a  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} ; X \mapsto C^\top X + X^\top S X$ .

Comme  $S$  est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée, d'après le théorème spectral. Autrement dit, il existe  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $P \in O_n(\mathbb{R})$  telles que  $D = P^\top S P$ .

Alors, en posant  $C' = P^\top C$ , on a pour tout  $X \in \mathbb{R}^n$  :

$$f(PX) = C^\top(PX) + (PX)^\top S(PX) = (C^\top P)X + X^\top (P^\top S P)X = C'^\top X + X^\top D X = g(X).$$

Or, comme  $P$  est inversible,  $PX$  décrit  $\mathbb{R}^n$  quand  $X$  décrit  $\mathbb{R}^n$ , donc les (éventuels) extrema de  $f$  sont ceux de  $g$  (attention : pas atteint au même endroit a priori).

Cherchons alors les éventuels extrema de  $g$ . Soient  $X_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $H \in \mathbb{R}^n$ . On a :

$$\begin{aligned} g(X_0 + H) &= C'^\top(X_0 + H) + (X_0 + H)^\top D(X_0 + H) \\ &= C'^\top X_0 + C'^\top H + X_0^\top D X_0 + X_0^\top D H + H^\top D X_0 + H^\top D H \\ &= g(X_0) + C'^\top H + X_0^\top D H + H^\top D X_0 + H^\top D H \end{aligned}$$

Or,  $H^\top D X_0$  est un scalaire, donc  $H^\top D X_0 = (H^\top D X_0)^\top = (D X_0)^\top H$  et :

$$\begin{aligned} g(X_0 + H) &= g(X_0) + C'^\top H + X_0^\top D H + (D X_0)^\top H + H^\top D H \\ &= g(X_0) + (C'^\top + X_0^\top D + (D X_0)^\top) H + H^\top D H \\ &= g(X_0) + E^\top H + H^\top D H \end{aligned}$$

avec  $E = (C'^\top + X_0^\top D + (D X_0)^\top)^\top = C' + D^\top X_0 + D X_0 = C' + 2D X_0$  (car  $D$  est diagonale donc  $D^\top = D$ ).

Si on note  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} ; H \mapsto E^\top H + H^\top D H$ ,  $g$  admet un extremum (local ou global) en  $X_0$  si et seulement si l'application  $\varphi$  admet un extremum (local ou global) en  $(0, \dots, 0)$ .

Si on pose  $E = (a_1, \dots, a_n)$ , on a pour tout  $H = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  :

$$\varphi(H) = \varphi(h_1, \dots, h_n) = E^\top H + H^\top D H = a_1 h_1 + \dots + a_n h_n + \lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2.$$

Ainsi,  $\varphi$  est polynomiale, donc de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^n$  avec pour tout  $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  et tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial h_k}(h_1, \dots, h_n) = a_k + 2\lambda_k h_k.$$

Pour que  $\varphi$  admette un extremum en  $(0, \dots, 0)$ , il faut au moins que  $(0, \dots, 0)$  soit un point critique, c'est-à-dire que  $\frac{\partial \varphi}{\partial h_k}(0, \dots, 0) = a_k = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , donc que  $E = 0$ .

Dans ce cas, on a  $\varphi(h_1, \dots, h_n) = \lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2$  et s'il existe  $k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tels que  $k \neq \ell$ ,  $\lambda_k > 0$  et  $\lambda_\ell < 0$ , alors pour tous  $h_k, h_\ell \in \mathbb{R}^*$ , on a :

$$\begin{aligned} \varphi(0, \dots, 0, h_k, 0, \dots, 0) &= \lambda_k h_k^2 > 0 = \varphi(0, \dots, 0) \\ \varphi(0, \dots, 0, h_\ell, 0, \dots, 0) &= \lambda_\ell h_\ell^2 < 0 = \varphi(0, \dots, 0) \end{aligned}$$

Donc,  $\varphi$  n'admet pas d'extremum en  $(0, \dots, 0)$ .

Par contre, si tous les  $\lambda_k$  sont positifs (resp. négatifs), alors pour tout  $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$  :

$$\varphi(h_1, \dots, h_n) = \lambda_1 h_1^2 + \dots + \lambda_n h_n^2 \geq 0 = \varphi(0, \dots, 0) \quad (\text{resp. } \leq 0 = \varphi(0, \dots, 0))$$

et  $\varphi$  admet  $\varphi(0, \dots, 0) = 0$  pour minimum (resp. maximum) global.

Ainsi,  $\varphi$  présente un extremum (global) sur  $\mathbb{R}^n$  en  $(0, \dots, 0)$  si et seulement si  $E = C' + 2DX_0 = 0$  et  $Sp(S) \subset \mathbb{R}_-$  ou  $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$ . Alors,  $g$  présente un extremum (global) sur  $\mathbb{R}^n$  en  $X_0$  si et seulement si  $E = C' + 2DX_0 = 0$  et  $Sp(S) \subset \mathbb{R}_-$  ou  $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$ . Et donc, comme  $f(PX_0) = g(X_0)$ ,  $f$  présente un extremum (global) sur  $\mathbb{R}^n$  en  $X_1 = PX_0$  si et seulement si  $E = C' + 2DX_0 = 0$  et  $Sp(S) \subset \mathbb{R}_-$  ou  $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$ .

Enfin, on a :

$$E = C' + 2DX_0 = 0 \Leftrightarrow P^T C + 2DX_0 = 0 \Leftrightarrow C = S(-2PX_0) = S(-2X_1).$$

Cette dernière relation n'est possible que si  $C \in \text{Im } S$ , et, dans ce cas, il existe toujours  $X_1 \in \mathbb{R}^n$  tel que  $C = S(-2X_1)$ . Finalement :

$f$  présente un extremum sur  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si  $C \in \text{Im } S$  et  $Sp(S) \subset \mathbb{R}_-$  ou  $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$ .

Et dans ce cas, l'extremum est global.

### Exercice 13

La fonction  $g : (x, y) \mapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)$  est de classe  $C^2$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  comme composée de la fonction

$(x, y) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{y}$ , de classe  $C^2$  sur  $(\mathbb{R}_+^*)^2$  et à images dans  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f$  qui est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

Pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , on a :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{2x}{y} f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{y} f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \left(\frac{2x}{y}\right)^2 f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \left(-\frac{x^2}{y^2} + 1\right) f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2x^2}{y^3} f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \left(-\frac{x^2}{y^2} + 1\right)^2 f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= \left(\frac{2}{y} + \frac{2x^2}{y^3}\right) f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \left[\left(\frac{2x}{y}\right)^2 + \left(-\frac{x^2}{y^2} + 1\right)^2\right] f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) \\ &= 2\frac{x^2 + y^2}{y^3} f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \left[\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2 + 2\frac{x^2}{y^2} + 1\right] f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) \\ &= 2\frac{x^2 + y^2}{y^3} f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \left(\frac{x^2 + y^2}{y^2}\right)^2 f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) \\ &= \frac{x^2 + y^2}{y^3} \left[2f'\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right) + \frac{x^2 + y^2}{y} f''\left(\frac{x^2 + y^2}{y}\right)\right] \end{aligned}$$

Donc,  $g$  est solution de  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$  si et seulement si pour tout  $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  :

$$\frac{x^2 + y^2}{y^3} \left[ 2f' \left( \frac{x^2 + y^2}{y} \right) + \frac{x^2 + y^2}{y} f'' \left( \frac{x^2 + y^2}{y} \right) \right] = 0 \Leftrightarrow 2f' \left( \frac{x^2 + y^2}{y} \right) + \frac{x^2 + y^2}{y} f'' \left( \frac{x^2 + y^2}{y} \right) = 0.$$

Or, à  $y \in \mathbb{R}_+^*$  fixé,  $\frac{x^2 + y^2}{y} = \frac{x^2}{y} + y$  décrit  $[y, +\infty[$  quand  $x$  décrit  $\mathbb{R}_+^*$ , donc quand  $(x, y)$  décrit  $(\mathbb{R}_+^*)^2$ ,

$t = \frac{x^2 + y^2}{y}$  décrit  $\bigcup_{y \in \mathbb{R}_+^*} [y, +\infty[ = \mathbb{R}_+^*$ .

Alors,  $g$  est solution de  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$  si et seulement si pour tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$  :

$$2f'(t) + tf''(t) = 0.$$

Autrement dit, si et seulement si  $f'$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de (E) :  $y' + \frac{2}{t}y = 0$ .

Or, les solutions de cette équation différentielle linéaire, homogène et d'ordre 1 sont les fonctions de la forme

$t \mapsto ke^{-2 \ln t} = \frac{k}{t^2}$  avec  $k \in \mathbb{R}$ , et si  $f'$  est de cette forme, alors  $f : t \mapsto \frac{a}{t} + b$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Finalement,  $g$  est solution de  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$  si et seulement si  $f$  a la forme ci-dessus, donc :

Les fonctions  $f$  recherchées sont les fonctions de la forme  $t \mapsto \frac{a}{t} + b$  avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .