

Corrigé du problème d'analyse

Partie A

1) La fonction f est continue sur \mathbb{R}^* en tant que quotient de telles fonctions.

De plus, on a $\ln(1+x^2) \sim_0 x^2$, donc $f(x) \sim_0 x$ et ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$. Ainsi :

On peut prolonger f en une fonction continue sur \mathbb{R} en posant $f(0) = 0$.

2) La fonction f est définie sur \mathbb{R} , qui est symétrique par rapport à 0.

De plus, $f(-x) = -f(x) = 0$ et sur \mathbb{R}^* , f est le quotient d'une fonction paire et d'une fonction impaire, donc :

f est impaire.

3) La fonction f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^* en tant que quotient de telles fonctions, avec $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = -\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} + \frac{2}{1+x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2}{x^3} \ln(1+x^2) - \frac{1}{x^2} \frac{2x}{1+x^2} - 2 \frac{2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{x(1+x^2)^2} \left(\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} (1+x^2)^2 - 1 - 3x^2 \right)$$

On a $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + o_0(x^4)$, donc $\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2)$ et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[-1 + \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2) + \frac{2}{1+x^2} \right] = 1.$$

Comme f est continue en 0 et f' admet une limite finie en 0, f est de classe C^1 en 0 (avec $f'(0) = 1$).

De plus :

$$f''(x) = \frac{2}{x(1+x^2)^2} \left[\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o_0(x^2) \right) (1+2x^2+x^4) - 1 - 3x^2 \right] = \frac{-3x + o_0(x)}{(1+x^2)^2}$$

Donc, $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 0$. Comme f' est continue en 0 et f'' admet une limite finie en 0, f est de classe C^2 en 0.

Finalement :

f est de classe C^2 sur \mathbb{R} .

4) On a $\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o_0(x^7)$, donc :

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^5 + o_0(x^6)$$

5) On a vu que f est de classe C^2 sur \mathbb{R} , donc en 1. Alors, la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 donne :

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + o_1((x-1)^2).$$

Avec les formules établies dans la question 3, on a $f(1) = \ln 2$, $f'(1) = 1 - \ln 2$ et $f''(1) = 2 \ln 2 - 2$. D'où :

$$f(x) = \ln 2 + (1 - \ln 2)(x-1) + (\ln 2 - 1)(x-1)^2 + o_1((x-1)^2)$$

6) On a $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x}$. Posons $h = \frac{1}{x}$. On a alors, $\forall h \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = h \ln\left(1 + \frac{1}{h^2}\right) = h \ln(1+h^2) - 2h \ln h = h\left(h^2 - \frac{1}{2}h^4 + o_0(h^4)\right) - 2h \ln h = -2h \ln h + h^3 - \frac{1}{2}h^5 + o_0(h^5).$$

Soit :

$$f(x) = -2 \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^5} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^5}\right).$$

Le développement asymptotique de f comportant trois termes au voisinage de $+\infty$ est donc :

$$f(x) = 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{2x^5} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

7) D'après la question précédente, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} 2 \frac{\ln x}{x}$, donc $f(-x) \underset{-\infty}{\sim} 2 \frac{\ln(-x)}{-x}$, soit $f(-x) \underset{-\infty}{\sim} -2 \frac{\ln |x|}{x}$.

Or, f est impaire, donc $f(-x) = -f(x)$, ce qui donne $-f(x) \underset{-\infty}{\sim} -2 \frac{\ln |x|}{x}$, soit :

$$f(x) \underset{-\infty}{\sim} 2 \frac{\ln |x|}{x}$$

8) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ par croissances comparées, les deux questions précédentes permettent de conclure immédiatement que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Par ailleurs, on a vu que $\forall x \in \mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = -\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1}{x^2} \left(\frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) \right) = \frac{1}{x^2} \left(2 - \frac{2}{1+x^2} - \ln(1+x^2) \right) = \frac{1}{x^2} g(x)$$

avec $g(x) = 2 - \frac{2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)$.

Comme $x^2 > 0$ sur \mathbb{R}^* , $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. La fonction est définie et dérivable sur \mathbb{R}^* en tant que différence de telles fonctions et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g'(x) = 2 \frac{2x}{(1+x^2)^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}.$$

On obtient alors le tableau sur \mathbb{R}_+^* :

x	0	1	$+\infty$		
$g'(x)$	0	+	0	-	$+\infty$
g	0	\nearrow $1 - \ln 2$ \searrow		$-\infty$	

Ceci prouve que $g'(x) > 0$ sur $]0;1]$ et sur $[1;+\infty[$, g est continue (car dérivable) et strictement décroissante de $1 - \ln 2 > 0$ à $-\infty$. D'après le théorème de la bijection, g s'annule exactement une fois sur $]1;+\infty[$ en un réel $\alpha > 1$. Alors, $g(x) > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0;\alpha[$ et $g(x) < 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]\alpha;+\infty[$.

Avec $f'(0) = 1 > 0$, on obtient le tableau de variations de f sur \mathbb{R} (complété par imparité) :

x	$-\infty$	$-\alpha$	α	$+\infty$			
f	0	\searrow	$-f(\alpha)$	\nearrow	$f(\alpha)$	\searrow	0

avec $2 - \frac{2}{1+\alpha^2} - \ln(1+\alpha^2) = 0$, donc $\ln(1+\alpha^2) = \frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}$ et $f(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha^2)}{\alpha} = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$.

9) D'après ce qui précède, f est strictement croissante sur $]-\alpha;\alpha[$, donc sur $[-1;1]$, car $\alpha > 1$. Comme f est continue (car dérivable sur ce segment), elle réalise une bijection de $[-1;1]$ vers $[f(-1);f(1)]$.

Avec $f(1) = \ln 2$, on peut conclure que :

f réalise une bijection de $[-1;1]$ vers $[-\ln 2; \ln 2]$.

10) On a $f^{-1} : [-\ln 2; \ln 2] \rightarrow [-1;1]$ et sur $[-1;1]$, $f'(x) > 0$, donc $\forall x \in [-\ln 2; \ln 2]$, $f'(f^{-1}(x)) \neq 0$.

Comme f est de classe C^2 sur \mathbb{R} , elle l'est sur $[-1;1]$ et ainsi :

f^{-1} est de classe C^2 sur $[-\ln 2; \ln 2]$.

11) Comme f^{-1} est de classe C^2 sur $[-\ln 2; \ln 2]$, elle l'est en 0, donc on peut utiliser la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f^{-1}(x) = f^{-1}(0) + (f^{-1})'(0)x + \frac{(f^{-1})''(0)}{2}x^2 + o_0(x^2).$$

On a $f(0) = 0$, donc $f^{-1}(0) = 0$, et :

- $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1$;
- $(f^{-1})''(0) = -\frac{(f^{-1})'(0) \times f''(f^{-1}(0))}{f'(f^{-1}(0))^2} = -\frac{f''(0)}{1^2} = -f''(0) = 0$.

Donc, le développement limité à l'ordre 2 de f^{-1} en 0 est :

$$f^{-1}(x) = x + o_0(x^2).$$

Partie B

1) On a vu que f est strictement croissante et continue sur $]0;1[$, donc $f(]0;1[) =]f(0);f(1)[=]0;\ln 2[$.

Comme $\ln 2 < 1$, on a $f(]0;1[) \subset]0;1[$ et avec $u_0 = \frac{1}{2} \in]0;1[$, on peut conclure immédiatement que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0;1[.$$

2) Comme f est strictement croissante sur $]0;1[$, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone (strictement si $u_1 \neq u_0$) et, pour connaître son sens de variation, il faut comparer u_0 et u_1 .

On a $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln\left(\frac{5}{4}\right)$. Il nous faut donc comparer $\frac{1}{2}$ et $2 \ln\left(\frac{5}{4}\right) = \ln\left(\frac{25}{16}\right)$, soit $e^{1/2} = \sqrt{e}$ et $\frac{25}{16}$, ou encore e et $\left(\frac{25}{16}\right)^2 = \frac{625}{256}$. Or, $\frac{625}{256} = \frac{512+128-15}{256} = 2,5 - \frac{15}{256} < 2,5 < e$, donc $u_1 < u_0$ et ainsi :

$$\text{La suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}$$

3) D'après les questions 1 et 2, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par 0, donc elle converge vers une limite $\ell \geq 0$. De plus, comme f est continue sur \mathbb{R} , on a $f(\ell) = \ell$, soit $\ln(1+\ell^2) = \ell^2$.

Posons $h(t) = \ln(1+t) - t$. Cette fonction est définie et dérivable sur \mathbb{R}_+ , avec $h'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}$.

Sur \mathbb{R}_+ , $h'(t) \leq 0$ avec $h'(t) = 0$ en 0 uniquement, donc h est strictement décroissante.

Avec $h(0) = 0$, on obtient $h(t) < 0$ pour $t > 0$, donc sur \mathbb{R}_+ , h ne s'annule qu'en 0. Ceci prouve que $\ln(1+\ell^2) = \ell^2$ pour $\ell = 0$ uniquement, et ainsi :

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } 0.$$

Partie C

1) On a vu que f réalise une bijection strictement croissante de $[-1;1]$ vers $[-\ln 2;\ln 2]$, donc f réalise une bijection de $]0;1[$ vers $]f(0);f(1)[=]0;\ln 2[$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $\frac{1}{n} \in]0;\ln 2[$, donc $\frac{1}{n}$ admet un unique antécédent par f dans $]0;1[$, autrement dit :

$$\text{Il existe un unique réel } x_n \in]0;1[\text{ tel que } f(x_n) = \frac{1}{n}.$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on a $x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ et, comme f est strictement croissante sur $]0;1[$, f^{-1} est strictement croissante sur $]0;\ln 2[$ et ainsi, $(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante (car $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 2}$ l'est).

De plus, f^{-1} est de classe C^2 sur $[-\ln 2;\ln 2]$, donc continue et, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = f^{-1}(0)$.

Comme $f(0) = 0$, on a $f^{-1}(0) = 0$ et finalement :

$(x_n)_{n \geq 2}$ est strictement décroissante et converge vers 0.

3) On a vu plus haut que $f^{-1}(x) = x + o(x^2)$. Donc, $f^{-1}(x) \sim_0 x$ et ainsi, $x_n = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$.

Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge :

La série $\sum x_n$ diverge.

Partie D

1) On a $f(n) = \frac{\ln(1+n^2)}{n} \sim \frac{2 \ln n}{n}$. Or, $\frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge, donc :

La série $\sum f(n)$ diverge.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$w_n = f(n) - 2 \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln(1+n^2)}{n} - \frac{2 \ln n}{n} = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{\ln(n^2)}{n} - \frac{2 \ln n}{n} = \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Alors, $w_n \sim \frac{1}{n^3}$ et, comme la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^3}$ converge :

$\sum w_n$ converge.

3) L'étude de la fonction $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$, montre que sur $[e; +\infty[$, elle est continue, positive et strictement décroissante. On peut donc utiliser la comparaison série-intégrale à partir de 3.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, on a $\sum_{k=3}^n \frac{\ln(k+1)}{k+1} \leq \sum_{k=3}^n \int_k^{k+1} \frac{\ln t}{t} dt \leq \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k}$, soit pour $n \geq 4$:

$$\int_3^{n+1} 2 \frac{\ln t}{t} dt \leq 2 \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} \leq 2 \frac{\ln 3}{3} + \int_3^n 2 \frac{\ln t}{t} dt \Leftrightarrow (\ln(n+1))^2 - (\ln 3)^2 \leq 2 \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} \leq 2 \frac{\ln 3}{3} + (\ln n)^2 - (\ln 3)^2.$$

D'où :

$$\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^2 - \frac{(\ln 3)^2}{(\ln n)^2} \leq \frac{2 \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k}}{(\ln n)^2} \leq 1 + \frac{2 \ln 3 - (\ln 3)^2}{(\ln n)^2}.$$

Comme $\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^2 = \left(1 + \frac{1}{\ln n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^2 \rightarrow 1$, on obtient par le théorème des gendarmes : $\frac{2 \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k}}{(\ln n)^2} \rightarrow 1$.

Autrement dit :

$$2 \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k} \sim (\ln n)^2.$$

Et :

$$S_n = \sum_{k=0}^n f(k) = \sum_{k=0}^2 f(k) + \sum_{k=3}^n f(k) = f(1) + f(2) + \sum_{k=3}^n \left(w_k + 2 \frac{\ln k}{k} \right) = f(1) + f(2) + \sum_{k=3}^n w_k + 2 \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k}$$

Comme $\left(f(1) + f(2) + \sum_{k=3}^n w_k \right)_{n \geq 3}$ converge, on a $S_n \sim 2 \sum_{k=3}^n \frac{\ln k}{k}$, d'où :

$$S_n \sim (\ln n)^2$$

Partie E

1) Soit I un intervalle de \mathbb{R} et g une fonction deux fois dérivable sur I . Si on pose $h(x) = xg(x)$, la fonction h est deux fois dérivable sur I en tant que produit de telles fonctions et $\forall x \in I$:

$$h'(x) = g(x) + xg'(x) \quad \text{et} \quad h''(x) = xg''(x) + 2g'(x).$$

Donc, $\forall x \in I$, $xh''(x) + h'(x) = x^2g''(x) + 3xg'(x) + g(x)$. Alors, on a :

$$g \text{ est solution de (E) sur } I \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad x^2g''(x) + 3xg'(x) + g(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in I, \quad xh''(x) + h'(x) = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad h' \text{ est solution de (E')} \text{ sur } I.$$

Finalement, on a bien :

$$g \text{ est solution de (E) sur } I \quad \text{si et seulement si} \quad h' \text{ est solution de (E')} \text{ sur } I.$$

2) Soit I un intervalle ne contenant pas 0. Sur I , (E') se récrit :

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{4}{(1+x^2)^2}.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto ke^{-\ln x} = \frac{k}{x}$ avec k une constante réelle.

Cherchons une solution particulière de (E') de la forme $x \mapsto \frac{k(x)}{x}$ avec k dérivable sur I .

En réinjectant dans (E'), on obtient $\forall x \in I$:

$$x \left(\frac{k'(x)}{x} - \frac{k(x)}{x^2} \right) + \frac{k(x)}{x} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \quad \Leftrightarrow \quad k'(x) = 2 \frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

On peut alors prendre $k(x) = -\frac{2}{1+x^2}$ et une solution particulière de (E') est $x \mapsto -\frac{2}{x(1+x^2)}$.

Finalement :

$$\text{Les solutions de (E')} \text{ sur } I \text{ sont les fonctions } x \mapsto \frac{k}{x} - \frac{2}{x(1+x^2)} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

3) On a $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \frac{2x}{1+x^2}$, donc :

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(1+x^2)}$ est $x \mapsto \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ sur tout intervalle ne contenant pas 0.

D'après les deux questions précédentes, g est solution de (E) sur un intervalle I de \mathbb{R} ne contenant pas 0 si et seulement, en posant $h(x) = xg(x)$, $h'(x) = \frac{k}{x} - \frac{2}{x(1+x^2)}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Alors, $h(x) = k \ln|x| - 2 \left[\ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right] + \mu$ avec $(k, \mu) \in \mathbb{R}^2$, soit :

$$h(x) = xg(x) = \lambda \ln|x| + \mu + \ln(1+x^2)$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Finalement :

Les solutions de (E) sur I sont les fonctions $x \mapsto \lambda \frac{\ln|x|}{x} + \frac{\mu}{x} + \frac{\ln(1+x^2)}{x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

4) D'après ce que nous venons de voir, (E) admet des solutions sur \mathbb{R}_-^* et \mathbb{R}_+^* , et, si g est une solution de (E) sur \mathbb{R} , il existe $(\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^4$ tel que :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\lambda_1 \ln|x| + \mu_1}{x} + f(x) & \text{sur } \mathbb{R}_-^* \\ \frac{\lambda_2 \ln x + \mu_2}{x} + f(x) & \text{sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

où f est la fonction de la partie A.

Cette solution doit être deux fois dérivable sur \mathbb{R} , donc en 0.

C'est le cas de f , mais $\forall (\lambda_2, \mu_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\lambda_2 \ln x + \mu_2}{x} = \pm \infty$, donc si $(\lambda_2, \mu_2) \neq (0,0)$, la solution g n'admet pas de limite finie en 0^+ , donc ne peut être continue en 0. De même, si $(\lambda_1, \mu_1) \neq (0,0)$, g n'admet pas de limite finie en 0^- . Ceci prouve que :

(E) admet une unique solution maximale sur \mathbb{R} qui est f .

Corrigé du problème d'algèbre

Partie A

1) f est une application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ et pour tous $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) &= 2(X+a)(\lambda P + \mu Q) - (X-a)^2(\lambda P + \mu Q)' \\ &= 2(X+a)(\lambda P + \mu Q) - (X-a)^2(\lambda P' + \mu Q') \\ &= \lambda(2(X+a)P - (X-a)^2 P') + \mu(2(X+a)Q - (X-a)^2 Q') \\ &= \lambda f(P) + \mu f(Q) \end{aligned}$$

Donc, f est linéaire et ainsi :

f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2) On a $f(1) = 2(X+a)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f(X^n) = 2(X+a)X^n - n(X-a)^2 X^{n-1}$, donc :

$$\begin{aligned} f(1) &= 2(X+a) \\ f(X^n) &= (2-n)X^{n+1} + 2(n+1)aX^n - na^2 X^{n-1} \quad \text{pour } n \geq 1 \end{aligned}$$

3) Si $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f , alors $f(X^n) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc $\deg f(X^n) \leq n$. Or, si $n \neq 2$, $\deg f(X^n) = n+1$, donc si $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f , alors $n = 2$

Réciproquement, on a :

$$\begin{aligned} f(1) &= 2X + 2a \\ f(X) &= X^2 + 4aX - a^2 \\ f(X^2) &= 6aX^2 - 2a^2 X \end{aligned}$$

Donc, $f(1), f(X), f(X^2) \in \mathbb{R}_2[X]$ et ainsi, $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par f .

Ainsi :

$\mathbb{R}_n[X]$ est stable par f si et seulement si $n = 2$.

4) D'après la question précédente, on a immédiatement :

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 2a & -a^2 & 0 \\ 2 & 4a & -2a^2 \\ 0 & 1 & 6a \end{pmatrix}$$

5) Remarquons que comme $\mathbb{R}_2[X]$ est de dimension finie, u est injective si et seulement si elle est surjective, si et seulement si elle est bijective, donc si et seulement $\det A \neq 0$.

On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2a & -a^2 & 0 \\ 2 & 4a & -2a^2 \\ 0 & 1 & 6a \end{vmatrix} = 4a \begin{vmatrix} a & -a^2 & 0 \\ 1 & 4a & -a \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4a^2 \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 1 & 4a & -a \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{=} 4a^2 \begin{vmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 5a & -a \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 64a^3.$$

Donc, $\det A = 0$ si et seulement si $a = 0$ et ainsi :

u est injective et surjective si et seulement si $a \neq 0$.

6) On a vu que si $n \neq 2$, alors $\deg f(X^n) = n+1$. Ceci se généralise en : pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$,

$$\deg P \neq 2 \Rightarrow \deg f(P) = \deg P + 1.$$

De plus, $f(X^2) = 6aX^2 - 2a^2X$. On peut alors distinguer deux cas.

- Si $a \neq 0$, $\deg f(X^2) = 2$ et ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, on a $\deg f(P) \geq 1$. Ainsi, 0 n'a que 0 pour antécédent par f et que tout autre polynôme constant n'a pas d'antécédent par f . Donc, f est injective et non surjective.
- Si $a = 0$, $f(X^2) = 0$, donc f n'est pas injective. De plus, pour tout $P \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$, on a :

$$\deg P \geq 3 \Rightarrow \deg f(P) \geq 4$$

$$\deg P \leq 3 \Rightarrow \deg f(P) \leq 2$$

Donc, X^3 n'a pas d'antécédent par f et f n'est toujours pas surjective.

Finalement :

f n'est pas surjective et injective si et seulement si $a \neq 0$.

Partie B

1) On a vu que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul, $\deg f(Q) = 1 + \deg Q$ quand $\deg Q \neq 2$. Ceci reste valable si Q est nul (car alors $f(Q) = 0$ et $\deg f(Q) = 1 + \deg Q = -\infty$). Ainsi, on a bien, pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ non nul :

$$\deg Q \neq 2 \Rightarrow \deg f(Q) = 1 + \deg Q.$$

2) D'après ce qui précède, alors :

$$f(P) = \lambda P \Rightarrow \deg f(P) = \begin{cases} \deg P & \text{si } \lambda \neq 0 \\ -\infty & \text{si } \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \deg f(P) \neq 1 + \deg P \Rightarrow \deg P = 2.$$

Ainsi :

P est de degré 2.

3) On a $f(P) = \lambda P$, soit :

$$2(X+a)P - (X-a)^2 P' = \lambda P \Leftrightarrow (X-a)^2 P' = (2X+2a-\lambda)P.$$

En appliquant la formule de Leibniz aux deux membres, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} [(X-a)^2]^{(k)} P^{(n-k)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (2X+2a-\lambda)^{(k)} P^{(n-k)}$$

Si $n \geq 2$, on obtient :

$$(X-a)^2 P^{(n+1)} + 2n(X-a)P^{(n)} + n(n-1)P^{(n-1)} = (2X+2a-\lambda)P^{(n)} + 2nP^{(n-1)}.$$

Soit :

$$(X-a)^2 P^{(n+1)} = [2(1-n)X + 2(n+1)a - \lambda] P^{(n)} - n(n-3)P^{(n-1)}.$$

Et pour $n=1$, on obtient en dérivant simplement $(X-a)^2 P' = (2X+2a-\lambda)P$:

$$(X-a)^2 P'' + 2(X-a)P' = 2P + (2X+2a-\lambda)P'.$$

Soit $(X-a)^2 P'' = (4a-\lambda)P' + 2P$ et la formule reste valable.

Finalement, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(X-a)^2 P^{(n+1)} = [2(1-n)X + 2(n+1)a - \lambda] P^{(n)} - n(n-3)P^{(n-1)}$$

4) Supposons que $r \neq a$.

Montrons alors par récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}(r) = 0$.

- On a $P(r) = 0$ et $f(P)(r) = 2(r+a)P(r) - (r-a)^2 P'(r) = \lambda P(r)$, donc $P'(r) = 0$ car $(r-a)^2 \neq 0$.
La propriété est donc vraie aux rangs 0 et 1.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie aux rangs $n-1$ et n , soit $P^{(n-1)}(r) = P^{(n)}(r) = 0$. On a alors :

$$(r-a)^2 P^{(n+1)}(r) = [2(1-n)r + 2(n+1)a - \lambda] P^{(n)}(r) - n(n-3)P^{(n-1)}(r) = 0.$$

Et toujours avec $(r-a)^2 \neq 0$, on obtient $P^{(n+1)}(r) = 0$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Or, d'après la formule de Taylor, on a $P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(r)}{n!} (X-r)^n$. Comme $P^{(n)}(r) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient $P = 0$, ce qui est absurde car P est supposé non nul. Ainsi, $r \neq a$ mène à une absurdité, donc :

$$r = a$$

5) On a vu que si P existe, il est de degré 2, donc $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et ainsi :

$$f(P) = u(P)$$

On a alors $u(P) = \lambda P$, soit $(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]})(P) = 0$, donc $P \in \ker(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]})$. Comme P n'est pas nul, ceci prouve que $u - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]}$ n'est pas bijective et donc que $\det(M_{\mathcal{B}_c}(u - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}_2[X]})) = 0$, soit :

$$\det(A - \lambda I_3) = 0$$

6) En développant par rapport à la première colonne, on a :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} 2a - \lambda & -a^2 & 0 \\ 2 & 4a - \lambda & -2a^2 \\ 0 & 1 & 6a - \lambda \end{vmatrix} = (2a - \lambda) \begin{vmatrix} 4a - \lambda & -2a^2 \\ 1 & 6a - \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -a^2 & 0 \\ 1 & 6a - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2a - \lambda) [(4a - \lambda)(6a - \lambda) + 2a^2] + 2a^2(6a - \lambda) \\ &= (2a - \lambda)(4a - \lambda)(6a - \lambda) + 2a^2(8a - 2\lambda) \\ &= (4a - \lambda) [(\lambda - 4a + 2a)(\lambda - 4a - 2a) + 4a^2] \\ &= (4a - \lambda) [(4a - \lambda)^2 - 4a^2 + 4a^2] \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\det(A - \lambda I_3) = (4a - \lambda)^3$$

La seule valeur de λ qui annule $\det(A - \lambda I_3)$ est $4a$, donc :

$$\text{La seule valeur possible de } \lambda \text{ est } 4a.$$

7) Nous venons de voir que si $(\lambda, P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ vérifie $f(P) = \lambda P$, alors :

- $\lambda = 4a$;
- $\deg P = 2$ et a est la seule racine réelle ou complexe de P , donc $P = k(X - a)^2$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{R}$:

$$f(k(X - a)^2) = k f((X - a)^2) = k(2(X + a)(X - a)^2 - (X - a)^2 [2(X - a)]) = 4a [k(X - a)^2].$$

Ainsi :

$$\text{Les éléments propres de } f \text{ sont les couples } (4a, k(X - a)^2) \text{ avec } k \in \mathbb{R}^*.$$

Partie C

Avec $a = 1$, on a $f(P) = 2(X + 1)P - (X - 1)^2 P'$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

1) On a résout :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Qui se réécrit sous forme de système :

$$\begin{cases} 2x - y = a \\ 2x + 4y - 2z = b \\ y + 6z = c \end{cases}$$

Qui donne :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{32}(13a + 3b + c) \\ y = \frac{1}{16}(-3a + 3b + c) \\ z = \frac{1}{32}(a - b + 5c) \end{cases}$$

Donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 13 & 3 & 1 \\ -6 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

2) On a :

$$N = A - 4I_3 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, N^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = 0_3.$$

Donc :

La matrice N est nilpotente d'indice $p = 3$ ($N^2 \neq 0_3$ et $N^3 = 0_3$).

3) On a donc $N^3 = (A - 4I_3)^3 = 0_3$ et comme A et I_3 commutent, on peut écrire :

$$(A - 4I_3)^3 = A^3 - 3A^2(4I_3) + 3A(4I_3)^2 - (4I_3)^3 = A^3 - 12A^2 + 48A - 64I_3.$$

Alors :

$$(A - 4I_3)^3 = 0_3 \Leftrightarrow \frac{1}{64}(A^2 - 12A + 48I_3)A = I_3$$

Donc :

$$A^{-1} = \frac{1}{64}(A^2 - 12A + 48I_3)$$

4) Avec $a = 1$, on a vu plus haut que $f(P) = u(P) = 4P$ si et seulement si $P \in \text{Vect}((X - 1)^2)$.

Donc $\ker(u - 4id_{\mathbb{R}_2[X]}) = \text{Vect}((X - 1)^2)$ et donc, $\dim \ker N = \dim \ker(u - 4id_{\mathbb{R}_2[X]}) = 1$.

Avec le théorème du rang, on a $rg(N) = 3 - \dim \ker N$, soit :

$$rg(N) = 2$$

Autre version : on échelonne par lignes :

$$N = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow -L_2 + L_1} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow -L_3 + L_2} \begin{pmatrix} \boxed{-2} & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On obtient deux pivots non nuls, donc on retrouve bien $rg(N) = 2$.

Les trois colonnes sont les mêmes (et non nulles), ce qui donne immédiatement :

$$rg(N^2) = 1$$

5) Toujours avec $a = 1$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} f(X) = u(X) = X^2 + 4X - 1 \\ f(X^2) = u(X^2) = 6X^2 - 2X \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} v(X) = u(X) - 4X = X^2 - 1 \\ v(X^2) = u(X^2) - 4X^2 = 2X^2 - 2X \end{cases}$$

Alors :

$$P_1 = v^2(X^2) = 2v(X^2) - 2v(X) = 2X^2 - 4X + 2$$

$$P_2 = v(X^2) = 2X^2 - 2X$$

$$P_3 = X^2$$

Et :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(P_1, P_2, P_3) &= \text{Vect}(2X^2 - 4X + 2, 2X^2 - 2X, X^2) = \text{Vect}(-4X + 2, -2X, X^2) \\ &= \text{Vect}(2, -2X, X^2) = \text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{R}_2[X] \end{aligned}$$

Donc, (P_1, P_2, P_3) est une famille génératrice de 3 vecteurs de $\mathbb{R}_2[X]$, qui est de dimension 3 et ainsi :

$$\mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3) \text{ est bien une base de } \mathbb{R}_2[X].$$

6) on vient de voir que :

$$P_1 = 2X^2 - 4X + 2$$

$$P_2 = 2X^2 - 2X$$

$$P_3 = X^2$$

Donc :

$$P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On a $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = P^{-1}$. Calculons l'inverse de P en passant de P à I_3 par opération sur les lignes :

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ L_2 \leftarrow -\frac{1}{2}L_2}} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \\ \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Ainsi :

$$P_B^B = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & -1/2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On pouvait aussi, en partant de $\begin{cases} P_1 = 2X^2 - 4X + 2 \\ P_2 = 2X^2 - 2X \\ P_3 = X^2 \end{cases}$, exprimer 1, X et X^2 en fonction de P_1 , P_2 et P_3 :

$$\begin{cases} 1 = 1/2 P_1 - P_2 + P_3 \\ X = -1/2 P_2 + P_3 \\ X^2 = P_3 \end{cases}$$

7) Remarquons que $N = A - 4I_3 = M_B(u - 4id_{\mathbb{R}_2[X]}) = M_B(v)$ et $N^3 = 0_3$, donc $v^3 = 0$.

Alors :

$$\begin{cases} v(P_1) = v^3(X^2) = 0 \\ v(P_2) = v^2(X^2) = P_1 \\ v(P_3) = v(X^2) = P_2 \end{cases}$$

Donc :

$$M_B(v) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et comme $M_B(u) = M_B(v + 4id_{\mathbb{R}_2[X]}) = M_B(v) + 4I_3$, on obtient :

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

8) On a $M_B(u) = P^{-1}AP$, donc $A = PM_B(u)P^{-1}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P[M_B(u)]^n P^{-1}$.

Posons $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L^3 = 0_3$.

De plus, $M_B(u) = L + 4I_3$ et comme L et I_3 commutent, on peut utiliser la formule du binôme.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$[M_B(u)]^n = (L + 4I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} L^k (4I_3)^{n-k} = 4^n I_3 + n 4^{n-1} L + \frac{n(n-1)}{2} 4^{n-2} L^2 = \frac{4^{n-2}}{2} \begin{pmatrix} 32 & 8n & n(n-1) \\ 0 & 32 & 8n \\ 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}.$$

Et ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = 4^{n-2} \begin{pmatrix} n^2 - 9n + 16 & n^2 - 5n & n^2 - n \\ -2n^2 + 10n & -2n^2 + 2n + 16 & -2n^2 - 6n \\ n^2 - n & n^2 + 3n & n^2 + 7n + 16 \end{pmatrix}$$

9) Les matrices A et B sont semblables si et seulement s'il existe $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $B = Q^{-1}AQ$. Or :

$$B = Q^{-1}AQ \Leftrightarrow B - 4I_3 = Q^{-1}AQ - 4I_3 = Q^{-1}(A - 4I_3)Q = Q^{-1}NQ.$$

Ainsi, A et B sont semblables si et seulement si N et $B - 4I_3$ le sont.

On a vu que $N^2 \neq 0_3$ et $N^3 = 0_3$, donc si $B - 4I_3 = Q^{-1}NQ$ avec $Q \in GL_3(\mathbb{R})$, alors $(B - 4I_3)^2 = Q^{-1}N^2Q \neq 0_3$,

et $(B - 4I_3)^3 = Q^{-1}N^3Q = 0_3$. Or, $B - 4I_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $(B - 4I_3)^2 = 0_3$. Ceci prouve que N et $B - 4I_3$

ne sont pas semblables et donc que :

Les matrices A et B ne sont pas semblables.

Partie D

1) Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\begin{aligned} u(P) &= 2(X+1)P - (X-1)^2 P' = 2(X+1)(aX^2 + bX + c) - (X-1)^2(2aX + b) \\ &= (6a+b)X^2 - 2(a-2b-c)X + 2c-b \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \langle u(P) | P \rangle &= a(6a+b) - 2(a-2b-c)b + (2c-b)c \\ &= 6a^2 - ab + 4b^2 + bc + 2c^2 = 5a^2 + \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{7}{2}b^2 + \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 + c^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle u(P) | P \rangle = 0 \Leftrightarrow 5a^2 = \left(a - \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{7}{2}b^2 = \left(\frac{b}{2} + c\right)^2 = c^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c = 0 \Leftrightarrow P = 0.$$

Finalement :

Le seul polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ orthogonal à son image par u est 0.

2) On a vu que si $P = aX^2 + bX + c$, alors $u(P) = (6a+b)X^2 - 2(a-2b-c)X + 2c-b$, donc :

$$u(X^2 + X + 1) = 7X^2 + 4X + 1$$

Et :

$$\begin{aligned} \text{Vect}(X^2 + X + 1, u(X^2 + X + 1)) &= \text{Vect}(X^2 + X + 1, 7X^2 + 4X + 1) = \text{Vect}(X^2 + X + 1, 6X^2 + 3X) \\ &= \text{Vect}(X^2 + X + 1, 2X^2 + X) = \text{Vect}(X^2 + X + 1, X^2 - 1) \\ &= \text{Vect}(X + 2, X^2 - 1) \end{aligned}$$

Alors $P = aX^2 + bX + c \in (\text{Vect}(X^2 + X + 1, u(X^2 + X + 1)))^\perp$ si et seulement si :

$$\begin{cases} \langle P | X + 2 \rangle = 0 \\ \langle P | X^2 - 1 \rangle = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b + 2c = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2c \\ a = c \end{cases} \Leftrightarrow P = cX^2 - 2cX + c = c(X - 1)^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{(\text{Vect}(X^2 + X + 1, u(X^2 + X + 1)))^\perp = \text{Vect}((X - 1)^2)}$$

3) On a :

$$\begin{cases} P_1 = 2X^2 - 4X + 2 \\ P_2 = 2X^2 - 2X \\ P_3 = X^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \langle P_1 | P_1 \rangle = 24 & \langle P_1 | P_2 \rangle = 12 \\ \langle P_2 | P_2 \rangle = 8 & \langle P_1 | P_3 \rangle = 2 \\ \langle P_3 | P_3 \rangle = 1 & \langle P_2 | P_3 \rangle = 2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La base } \mathcal{B} = (P_1, P_2, P_3) \text{ n'est pas orthonormée.}}$$

On pose $Q_1 = \frac{1}{\|P_1\|} P_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(X^2 - 2X + 1) = \frac{1}{\sqrt{6}}(X - 1)^2$ et :

- $Q_2 = \alpha P_1 + \beta P_2 = 2(\alpha + \beta)X^2 - 2(2\alpha + \beta)X + 2\alpha$ avec :

$$\begin{cases} \langle P_1 | Q_2 \rangle = 4(\alpha + \beta) + 8(2\alpha + \beta) + 4\alpha = 0 \\ \langle Q_2 | Q_2 \rangle = 4(\alpha + \beta)^2 + 4(2\alpha + \beta)^2 + 4\alpha^2 = 1 \end{cases}$$

On prend $Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 1)$.

- $Q_3 = xP_1 + yP_2 + zP_3 = (2x + 2y + z)X^2 - 2(2x + y)X + 2x$ avec :

$$\begin{cases} \langle P_1 | Q_3 \rangle = 2(2x + 2y + z) + 4(2x + y) = 0 \\ \langle P_2 | Q_3 \rangle = 2(2x + 2y + z) + 8(2x + y) + 4x = 0 \\ \langle Q_3 | Q_3 \rangle = (2x + 2y + z)^2 + 4(2x + y)^2 + 4x^2 = 1 \end{cases}$$

On prend $Q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(X^2 + X + 1)$.

Ainsi :

$$\begin{cases} Q_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(X^2 - 2X + 1) \\ Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X^2 - 1) \\ Q_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(X^2 + X + 1) \end{cases}$$

4) On a $\text{Vect}(P_1, P_2) = \text{Vect}(Q_1, Q_2)$ et $(\text{Vect}(P_1, P_2))^\perp = \text{Vect}(Q_3)$, donc :

$$\begin{cases} p(Q_1) = Q_1 \\ p(Q_2) = Q_2 \\ p(Q_3) = 0 \end{cases}$$

Avec $Q_3 = \frac{\sqrt{3}}{6}(P_1 - 3P_2 + 6P_3)$, on obtient :

$$\begin{cases} p(P_1) = P_1 \\ p(P_2) = P_2 \\ p(P_1) - 3p(P_2) + 6p(P_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(P_1) = P_1 \\ p(P_2) = P_2 \\ p(P_3) = -\frac{1}{6}P_1 + \frac{1}{2}P_2 \end{cases}$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/6 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par ailleurs :

$$\begin{cases} p(Q_1) = Q_1 \\ p(Q_2) = Q_2 \\ p(Q_3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(X^2) - 2p(X) + p(1) = X^2 - 2X + 1 \\ p(X^2) - p(1) = X^2 - 1 \\ p(X^2) + p(X) + p(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p(1) = \frac{1}{3}(-X^2 - X + 2) \\ p(X) = \frac{1}{3}(-X^2 + 2X - 1) \\ p(X^2) = \frac{1}{3}(2X^2 - X - 1) \end{cases}$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B}_c}(p) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5) Appelons d la distance de P à $\text{Vect}(P_1, P_2)$. On a $d = \|P - p(P)\|$ et, si $P = aX^2 + bX + c$, on a, avec la question précédente :

$$p(P) = \frac{1}{3}(2a - b - c)X^2 + \frac{1}{3}(-a + 2b - c)X + \frac{1}{3}(-a - b + 2c).$$

Donc :

$$p - p(P) = \frac{1}{3}(a+b+c)(X^2 + X + 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(a+b+c)Q_3.$$

Et ainsi :

$$d = \|P - p(P)\| = \frac{|a+b+c|}{\sqrt{3}}$$

Corrigés des exercices divers

Exercice I

1) On a :

$$P_n = (X+1)^n - X^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k - X^n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} X^k = nX^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} X^{n-2} + \dots + nX + 1.$$

Donc :

Le degré de P_n est $n-1$.
 Le coefficient dominant de P_n est n .
 Le terme constant de P_n est 1.

2) On a :

$$P_n(z) = 0 \Leftrightarrow (z+1)^n = z^n \Leftrightarrow \begin{cases} \left(1 + \frac{1}{z}\right)^n = 1 \\ z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \frac{1}{z} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}, k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \\ z \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow z = \frac{1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1}, k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket.$$

Et pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\frac{1}{e^{i\frac{2k\pi}{n}} - 1} = \frac{1}{e^{i\frac{k\pi}{n}} (e^{i\frac{k\pi}{n}} - e^{-i\frac{k\pi}{n}})} = \frac{1}{2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} e^{-i\frac{k\pi}{n}} = -\frac{i}{2} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) - i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -\frac{1}{2} - i \frac{1}{2} \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right).$$

Comme $\deg P_n = n-1$, P_n admet au plus $n-1$ racines complexes.

Or, l'ensemble $\left\{-\frac{1}{2} - i \frac{1}{2} \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right), k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\right\}$ contient $n-1$ nombres complexes distincts (car pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\frac{k\pi}{n} \in]0, \pi[$ et la fonction cotangente réalise une bijection de $]0, \pi[$ dans \mathbb{R}).

Finalement :

Les racines complexes de P_n sont les $-\frac{1}{2} - i \frac{1}{2} \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ avec $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

3) Les racines de P_n sont les $z_k = -\frac{1}{2} \left[1 + i \cotan \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right] = \frac{1}{2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right)} e^{-i \frac{k\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.

Comme le coefficient dominant de P_n est n et son terme constant est 1, on a :

$$P_n(0) = n \prod_{k=1}^{n-1} (-z_k) = 1.$$

Soit :

$$\prod_{k=1}^{n-1} z_k = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{z_k} = (-1)^{n-1} n \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n-1} \left(2i \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) e^{i \frac{k\pi}{n}} \right) = (2i)^{n-1} e^{i \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k} \left[\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right] = (-1)^{n-1} n.$$

Ainsi :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{(-1)^{n-1} n}{(2i)^{n-1} e^{i \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n-1} k}} = \frac{(-1)^{n-1} n}{(2i)^{n-1} e^{\frac{i\pi n(n-1)}{2}}} = \frac{(-1)^{n-1} n}{2^{n-1} i^{n-1} e^{i(n-1)\frac{\pi}{2}}} = \frac{(-1)^{n-1} n}{2^{n-1} i^{n-1} i^{n-1}} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Donc :

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{n} \right) = \frac{n}{2^{n-1}}}$$

4) D'après ce qui précède, en remplaçant n par $2n$, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \frac{2n}{2^{2n-1}} = \frac{n}{2^{2(n-1)}}.$$

Or :

$$\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \left[\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right] \left[\sin \left(\frac{n\pi}{2n} \right) \right] \left[\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right] = \left[\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right] \left[\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right].$$

En posant $k' = 2n - k$ (que l'on renomme immédiatement k) dans le second produit, on obtient :

$$\prod_{k=n+1}^{2n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{(2n-k)\pi}{2n} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\pi - \frac{k\pi}{2n} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right).$$

Donc $\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \left[\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) \right]^2$, et comme, quand $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on a $0 < \frac{k\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$, donc $\sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) > 0$, on peut écrire :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \sqrt{\prod_{k=1}^{2n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right)} = \sqrt{\frac{n}{2^{2(n-1)}}} = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}}.$$

Par ailleurs, en posant $k' = n - k$ (que l'on renomme immédiatement k) dans le second produit, on a :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \cos \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \cos \left(\frac{(n-k)\pi}{2n} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi}{2n} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right).$$

Alors :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \tan \left(\frac{k\pi}{2n} \right) = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right)}{\cos \left(\frac{k\pi}{2n} \right)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1} \sin \left(\frac{k\pi}{2n} \right)}{\prod_{k=1}^{n-1} \cos \left(\frac{k\pi}{2n} \right)} = 1 = \prod_{k=1}^{n-1} \cotan \left(\frac{k\pi}{2n} \right).$$

Finalement :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{n}}{2^{n-1}} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \tan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \cotan\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = 1$$

Exercice II

1) Le couple $(3, -2)$ est solution de $2x + 3y = 0$. Il en va de même pour tout couple $(3\alpha, -2\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Réciproquement, si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ est solution de $2x + 3y = 0$, alors $3b = -2a$, donc $3 \mid -2a$. Comme $2 \wedge 3 = 1$, $3 \mid a$ d'après le théorème de Gauss. Ainsi, $a = 3\alpha$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $3b = -2a = -6\alpha$, donc $b = -2\alpha$ et :

$$(a, b) = (3\alpha, -2\alpha).$$

Finalement :

Les solutions de $2x + 3y = 0$ dans \mathbb{Z}^2 sont les couples $(3\alpha, -2\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$.

2) Le couple $(-k, k)$ est solution de $2x + 3y = k$ dans \mathbb{Z}^2 .

Si $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de $2x + 3y = k$, alors $2a + 3b = 2(-k) + 3k$, donc $2(a + k) + 3(b - k) = 0$ et, ainsi, $(a + k, b - k)$ est solution de $2x + 3y = 0$. Alors, $(a + k, b - k) = (3\alpha, -2\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Ainsi, les solutions de $2x + 3y = k$ dans \mathbb{Z}^2 sont les couples $(-k + 3\alpha, k - 2\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Pour avoir les solutions dans \mathbb{N}^2 , il faut de plus :

$$\begin{cases} -k + 3\alpha \geq 0 \\ k - 2\alpha \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}k \leq \alpha \leq \frac{1}{2}k.$$

Ainsi :

Les solutions de $2x + 3y = k$ dans \mathbb{N}^2 sont les couples $(-k + 3\alpha, k - 2\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{N} \cap \left[\frac{1}{3}k, \frac{1}{2}k\right]$.

L'équation $2x + 3y = k$ admet au moins une solution dans \mathbb{N}^2 si et seulement si $E_k = \mathbb{N} \cap \left[\frac{1}{3}k, \frac{1}{2}k\right] \neq \emptyset$. Et :

- $E_1 = \mathbb{N} \cap \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right] = \emptyset$;
- $E_2 = \mathbb{N} \cap \left[\frac{2}{3}, 1\right] = \{1\} \neq \emptyset$;
- $E_3 = \mathbb{N} \cap \left[1, \frac{3}{2}\right] = \{1\} \neq \emptyset$;
- $E_4 = \mathbb{N} \cap \left[\frac{4}{3}, 2\right] = \{2\} \neq \emptyset$;
- $E_5 = \mathbb{N} \cap \left[\frac{5}{3}, \frac{5}{2}\right] = \{2\} \neq \emptyset$;
- pour $k \geq 6$, on a $\frac{1}{2}k - \frac{1}{3}k = \frac{1}{6}k \geq 1$ donc $E_k \neq \emptyset$.

Finalement :

La seule valeur de $k \in \mathbb{N}^*$ pour laquelle $2x + 3y = k$ n'a aucune solution dans \mathbb{N}^2 est $k = 1$.

3) a. Si face sort à chaque lancer, on a $S_n = 2n$; si pile sort à chaque lancer, on a $S_n = 3n$.

De plus, on a toujours $2n \leq S_n \leq 3n$, donc $S_n(\Omega) \subset [2n, 3n]$.

Réciproquement, soit $k \in [2n, 3n]$. Pour obtenir $S_n = k$ (avec a faces et b piles) à l'issue des n lancers, il faut :

$$\begin{cases} 2a + 3b = k \\ a + b = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(n - b) + 3b = k \\ a = n - b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = k - 2n \\ a = 3n - k \end{cases}$$

Comme $k \in [2n, 3n]$, on a $k - 2n \in [0, n]$ et $3n - k \in [0, n]$, et on peut obtenir $S_n = k$. Ainsi, $[2n, 3n] \subset S_n(\Omega)$.

Finalement :

$$S_n(\Omega) = [2n, 3n]$$

b. Soit $k \in [2n, 3n]$.

On vient de voir que $S_n = k$ si et seulement si on obtient $k - 2n$ piles (et $3n - k$ faces). Le nombre de piles obtenus à l'issue des n lancers suit une loi binomiale de paramètres n et p , donc pour tout $k \in [2n, 3n]$:

$$P(S_n = k) = \binom{n}{k - 2n} p^{k - 2n} (1 - p)^{3n - k}$$

c. Si on pose $T_n = S_n - 2n$, on a $T_n(\Omega) = [0, n]$ et T_n suit une loi binomiale de paramètres n et p .

On a donc $E(T_n) = np$ et $V(T_n) = np(1 - p)$. Et $S_n = T_n + 2n$, donc :

$$E(S_n) = E(T_n) + 2n \quad \text{et} \quad V(S_n) = V(T_n).$$

Ainsi :

$$E(S_n) = np + 2n \quad \text{et} \quad V(S_n) = np(1 - p)$$

d. Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, X_k suit une loi de Bernoulli de paramètre p et :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2 + X_k) = 2n + \sum_{k=1}^n X_k.$$

Par linéarité de l'espérance, on a :

$$E(S_n) = 2n + \sum_{k=1}^n E(X_k) = 2n + \sum_{k=1}^n p.$$

Et on retrouve :

$$E(S_n) = 2n + np$$

4) On a vu que les couples (x, y) de \mathbb{N}^2 tels que $2x + 3y = k$ sont les couples $(3\alpha - k, k - 2\alpha)$ avec $\alpha \in E_k$ où

$$E_k = \mathbb{N} \cap \left[\frac{1}{3}k, \frac{1}{2}k \right] = \llbracket \alpha_k, \beta_k \rrbracket \text{ avec } \alpha_k = \begin{cases} E\left(\frac{k}{3}\right) & \text{si } 3 \mid k \\ E\left(\frac{k}{3}\right) + 1 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \beta_k = E\left(\frac{k}{2}\right).$$

Notons $(S = k)$ l'évènement « la somme des points obtenus à l'issue des N tirages soit égale à k ».

Avec la loi des probabilités totales, on a :

$$P(S = k) = \sum_{n=\alpha_k}^{\beta_k} P(N = n)P_{(N=n)}(S = k).$$

Et on a $P(N = n) = \frac{1}{2^n}$ et $P_{(N=n)}(S = k) = P(S_n = k) = \binom{n}{k-2n} p^{k-2n} (1-p)^{3n-k}$, donc :

$$P(S = k) = \sum_{n=\alpha_k}^{\beta_k} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k-2n} p^{k-2n} (1-p)^{3n-k}$$

Exercice III

Dans toutes les questions, on est en situation d'équiprobabilité et le nombre total de mains de 5 cartes est :

$$\binom{32}{5} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 32 \times 31 \times 29 \times 7 = 32 \times 7 \times 899.$$

1) Pour construire une main contenant un full, il faut :

- choisir le niveau apparaissant 3 fois : 8 possibilités ;
- puis, pour chacune de ces possibilités, choisir les 3 cartes dans le niveau : $\binom{4}{3} = 4$;
- puis, choisir le niveau apparaissant 2 fois : $8 - 1 = 7$ possibilités ;
- enfin, pour chacune de ces possibilités, choisir les 2 cartes dans le niveau : $\binom{4}{2} = 6$.

Ainsi, le nombre de fulls possibles est : $8 \times 4 \times 7 \times 6$. Et :

$$\text{La probabilité que le joueur ait un full servi est } \frac{8 \times 4 \times 7 \times 6}{32 \times 7 \times 899} = \frac{6}{899}.$$

2) Dans cette question et les suivantes, on raisonne comme dans la précédente.

Pour construire une main contenant exactement deux paires, il faut :

- choisir le niveau des deux paires : $\binom{8}{2} = 28$ possibilités ;
- choisir les 2 cartes dans le niveau de chaque paire : $\binom{4}{2} = 6$ possibilités par paire ;
- choisir la cinquième carte (dans l'un des 6 niveaux restants) : $32 - 8 = 24$ possibilités ;

Ainsi, le nombre de mains possibles contenant exactement deux paires est : $28 \times 6 \times 6 \times 24$. Et :

$$\text{La probabilité que le joueur ait exactement deux paires servies est } \frac{28 \times 6 \times 6 \times 24}{32 \times 7 \times 899} = \frac{108}{899}.$$

3) Notons P_1 l'évènement « le joueur a exactement deux paires servies » et, dans toute la suite, F_k l'évènement « le joueur a un full après échange de k cartes ».

a. On cherche ici $P_{P_1}(F_1)$. Avant l'échange, il reste 27 cartes dans la pioche dont 2 cartes par niveau de chacune des deux paires, soit quatre cartes favorables pour obtenir un full après échange. Ainsi :

$$P_{P_1}(F_1) = \frac{4}{27}$$

b. On cherche ici $P(P_1 \cap F_1)$, soit :

$$P(P_1 \cap F_1) = P(P_1)P_{P_1}(F_1) = \frac{4}{27} \times \frac{4 \times 27}{899}.$$

Soit :

$$P(P_1 \cap F_1) = \frac{16}{899}$$

4) Pour construire une main contenant exactement un brelan, il faut :

- choisir le niveau du brelan : 8 possibilités ;
- choisir les trois cartes dans le niveau du brelan : $\binom{4}{3} = 4$ possibilités ;
- choisir les deux niveaux (distincts du précédent) : $\binom{7}{2} = 21$ possibilités ;
- choisir les une carte dans chacun des deux niveaux précédents : 4 possibilités par niveau.

Ainsi, le nombre de mains possibles contenant exactement un brelan est : $8 \times 4 \times 21 \times 4 \times 4$. Et, si B_1 est l'évènement « le joueur a exactement un brelan servi », on a :

$$\text{La probabilité que le joueur ait exactement un brelan servi est } P(B_1) = \frac{8 \times 4 \times 21 \times 4 \times 4}{32 \times 7 \times 899} = \frac{48}{899}.$$

5) a. On cherche ici $P_{B_1}(F_2)$.

Avant l'échange, il reste 27 cartes dans la pioche dont 1 carte dans le niveau du brelan, 3 cartes dans chacun des deux autres niveaux dans la main servie initialement et les 4 cartes de chacun des cinq autres niveaux.

Lors de l'échange, on choisit 2 cartes parmi ces 27 restantes ($\binom{27}{2} = 27 \times 13$ possibilités) et pour obtenir

un full, il faut tirer deux cartes de même niveau. Il y a $2 \binom{3}{2} + 5 \binom{4}{2} = 36$ possibilités, donc :

$$P_{B_1}(F_2) = \frac{36}{27 \times 13} = \frac{4}{39}$$

b. On cherche ici $P(B_1 \cap F_2)$, soit :

$$P(B_1 \cap F_2) = P(B_1)P_{B_1}(F_2) = \frac{48}{899} \times \frac{4}{39}.$$

Soit :

$$P(B_1 \cap F_2) = \frac{64}{11687} \approx 0,0055$$

6) a. On cherche ici $P_{B_1}(F_1)$.

Avant l'échange, il reste toujours 27 cartes restantes dans la pioche.

Lors de l'échange, on choisit 1 carte parmi ces 27 restantes (27 possibilités) et pour obtenir un full, il faut tirer une des trois cartes du niveau que l'on a conservé. Il y a donc 3 possibilités, donc :

$$P_{B_1}(F_2) = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

b. On cherche ici $P(B_1 \cap F_1)$, soit :

$$P(B_1 \cap F_2) = P(B_1)P_{B_1}(F_2) = \frac{48}{899} \times \frac{1}{9}$$

Soit :

$$P(B_1 \cap F_1) = \frac{16}{2697} \approx 0,0059$$

c. On a $\frac{P(B_1 \cap F_1)}{P(B_1 \cap F_2)} = \frac{13}{12} > 1$, donc $P(B_1 \cap F_1) > P(B_1 \cap F_2)$ et ainsi :

La meilleure stratégie est d'échanger une seule carte.

Exercice IV

1) Avec la loi des probabilités totales, on a :

$$\begin{cases} a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = a_n P_{A_n}(A_{n+1}) + b_n P_{B_n}(A_{n+1}) + c_n P_{C_n}(A_{n+1}) \\ b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = a_n P_{A_n}(B_{n+1}) + b_n P_{B_n}(B_{n+1}) + c_n P_{C_n}(B_{n+1}) \\ c_{n+1} = P(C_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) = a_n P_{A_n}(C_{n+1}) + b_n P_{B_n}(C_{n+1}) + c_n P_{C_n}(C_{n+1}) \end{cases}$$

Et, d'après l'énoncé $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$ et :

$$P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(B_{n+1}) = P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4} \text{ et } P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{B_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2}$$

D'où :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{cases}$$

Soit :

$$X_{n+1} = MX_n \text{ avec } M = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) On a $P^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on vérifie alors que l'on a bien :

$$M = PDP^{-1}$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1} = \frac{1}{10} \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 5 & -5 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, soit :

$$M^n = \frac{1}{10} \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 2 \times 4^n + 8(-1)^n & 2 \times 4^n - 2(-1)^n & 2 \times 4^n - 2(-1)^n \\ 4 \times 4^n - 4 \times (-1)^n & 5 + 4 \times 4^n + (-1)^n & -5 + 4 \times 4^n + (-1)^n \\ 4 \times 4^n - 4 \times (-1)^n & -5 + 4 \times 4^n + (-1)^n & 5 + 4 \times 4^n + (-1)^n \end{pmatrix}$$

Une récurrence simple permet de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = M^n X_0$ avec $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 2 \times 4^n + 8(-1)^n \\ 4 \times 4^n - 4 \times (-1)^n \\ 4 \times 4^n - 4 \times (-1)^n \end{pmatrix}$$

Exercice V

Dans tout l'exercice, pour n lancers, on notera un résultat sous la forme d'un « mot » de n lettres (P ou F), la $k^{\text{ième}}$ lettre étant P ou F , suivant que l'on a obtenu pile ou face au $k^{\text{ième}}$ lancer. Par exemple : $PFPPF$ pour 5 lancers.

Les lancers sont indépendants, donc à chaque lancer, on a 1 chance sur 2 d'obtenir pile (et 1 chance sur 2 d'obtenir face), donc pour n lancers, tous les « mots » possibles sont équiprobables, de probabilité $\frac{1}{2^n}$.

1) X_2 est le nombre de points obtenus à l'issu de 2 lancers. On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$ et :

$$P(X_2 = 1) = P(PF) + P(FP) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X_2 = 0) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi :

$$X_2 \text{ suit une loi binomiale de paramètre } \frac{1}{2}, E(X_2) = \frac{1}{2} \text{ et } V(X_2) = \frac{1}{4}.$$

X_3 est le nombre de points obtenus à l'issu de 3 lancers. On a $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et :

$$\begin{cases} P(X_2 = 0) = P(FFF) + P(PPP) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ P(X_2 = 1) = P(PPF) + P(PFF) + P(FFP) + P(FPP) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \\ P(X_2 = 2) = P(PFP) + P(FPF) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

On a :

$$E(X_3) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 = 1$$

$$E(X_3^2) = \frac{1}{4} \times 0^2 + \frac{1}{2} \times 1^2 + \frac{1}{4} \times 2^2 = \frac{3}{2}$$

$$V(X_3) = E(X_3^2) - E(X_3)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$E(X_3) = 1 \quad V(X_3) = \frac{1}{2}$$

2) Pour $n \geq 2$, X_n peut valoir toutes les valeurs entières entre 0 (on obtient toujours le même résultat) et $n-1$ (le résultat change à chaque lancer). Donc :

$$X_n(\Omega) = \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

On a :

$$P(X_n = 0) = P(FF...F) + P(PP...P) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$P(X_n = n-1) = P(FPPFPF...) + P(PFPFPF...) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Donc :

$$P(X_n = 0) = P(X_n = n-1) = \frac{1}{2^{n-1}}$$

3) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour obtenir $X_{n+1} = k$, il faut avoir obtenu :

- soit $X_n = k$ et avoir le même résultat aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ lancer : $P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}$;
- soit $X_n = k-1$ et ne pas avoir le même résultat aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ lancer : $P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}$.

D'après la loi des probabilités totales, on a alors :

$$P(X_{n+1} = k) = P_{(X_n=k)}(X_{n+1} = k)P(X_n = k) + P_{(X_n=k-1)}(X_{n+1} = k)P(X_n = k-1).$$

Soit :

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1)$$

4) On a $Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) s^k$. La fonction Q_n est polynomiale donc de classe C^∞ sur \mathbb{R} .

(i) $Q_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)$, soit :

$$Q_n(1) = 1$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $Q_n'(s) = \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k)s^{k-1}$, donc $Q_n'(1) = \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n = k)$, soit :

$$Q_n'(1) = E(X_n)$$

Si $n \geq 3$, on a $Q_n''(s) = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)P(X_n = k)s^{k-2}$ (et $Q_n''(s) = 0$ pour $n = 2$), donc :

$$Q_n''(1) = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k^2P(X_n = k) - \sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n = k) = E(X_n^2) - E(X_n).$$

Or, $V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2$, donc :

$$V(X_n) = Q_n''(1) + E(X_n) - E(X_n)^2.$$

Soit :

$$V(X_n) = Q_n''(1) + Q_n'(1) - Q_n'(1)^2$$

(ii) On a, pour tout $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(s) &= \sum_{k=0}^n P(X_{n+1} = k)s^k = P(X_{n+1} = 0) + \sum_{k=1}^n P(X_{n+1} = k)s^k \\ &= \frac{1}{2^n} + \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{2}P(X_n = k) + \frac{1}{2}P(X_n = k-1) \right] s^k = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2^{n-1}} + \sum_{k=1}^n P(X_n = k)s^k + \sum_{k=1}^n P(X_n = k-1)s^k \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[P(X_n = 0) + \left(\sum_{k=1}^{n-1} P(X_n = k)s^k + P(X_n = n)s^n \right) + \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^{k+1} \right] \end{aligned}$$

Or, $P(X_n = n) = 0$, donc :

$$Q_{n+1}(s) = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^k + s \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)s^k \right] = \frac{1}{2} [Q_n(s) + sQ_n(s)].$$

Soit :

$$Q_{n+1}(s) = \frac{1+s}{2} Q_n(s)$$

(iii) A $s \in \mathbb{R}$ fixé, la suite $(Q_n(s))_{n \geq 2}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+s}{2}$, donc pour tout $n \geq 2$:

$$Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-2} Q_2(s).$$

Et $Q_2(s) = \sum_{k=0}^1 P(X_2 = k)s^k = P(X_2 = 0) + P(X_2 = 1)s = \frac{1+s}{2}$, donc pour tout $s \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \geq 2$:

$$Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-1}$$

(iv) On a :

$$\left. \begin{aligned} Q_n'(s) &= \frac{n-1}{2} \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-2} \\ Q_n''(s) &= \begin{cases} \frac{(n-1)(n-2)}{4} \left(\frac{1+s}{2} \right)^{n-3} & \text{pour } n \geq 3 \\ 0 & \text{pour } n = 2 \end{cases} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} Q_n'(1) = \frac{n-1}{2} \\ Q_n''(1) = \frac{(n-1)(n-2)}{4} \end{cases}.$$

Et avec $E(X_n) = Q_n'(1)$ et $V(X_n) = Q_n''(1) + Q_n'(1) - Q_n'(1)^2$, on obtient :

$$\boxed{E(X_n) = \frac{n-1}{2} \quad V(X_n) = \frac{n-1}{4}}$$