Chapitre 1 - Bases - Entrainement

Exercice 1 *Logique*

1) Donner la négation de :
   a. $\forall x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq 2$, $\exists y \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{y}{x} \leq 1$.
   b. $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\exists p \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq p \leq m$.
   c. $\forall a \in \mathbb{Z}$, $\exists b \in \mathbb{Z}$, $\forall c \in \mathbb{Z}$, $ac \leq b$.
2) Donner la contraposée de :
   a. $x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow xy < 1$.
   b. $\forall x \in \mathbb{R}$, $xy \leq 1 \Rightarrow y = 0$.
3) Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7 :
   a. par récurrence ;
   b. en factorisant ;
   c. à l'aide la formule du binôme.
4) Démontrer par l'absurde que $\sqrt{3}$ est irrationnel.

Exercice 2 *Ensembles*

Soit $E = \{a, b, c, d, e\}$ un ensemble.

1) On pose $A = \{a, b\}$, $B = \{d, e\}$, $C = \{b, c, d\}$ et $D = \{a, c, e\}$. Déterminer :

$$(A \cup B) \cap C,\ A \cup (B \cap C),\ (B \cup C) \setminus D,\ B \cup (C \setminus D),\ \bar{A} \cap \left[(D \cup \bar{B}) \setminus C\right],\ \left[(\bar{A} \cap D) \cup \bar{B}\right] \setminus C.$$

2) Déterminer deux parties X et Y de E telles que $X \cap Y = \{a, b\}$, $X \cup Y = E$ et $X \setminus Y = \{c\}$.

Exercice 3 *Applications*

1) Soit $f : E \to E$ telle que $f \circ f \circ f = id_E$. Montrer que f est bijective et donner f^{-1}.
2) Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} ; n \mapsto n^2 - 2n + 3$.
   a. f est-elle injective ? surjective ?
   b. On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Déterminer $f^{-1}(2\mathbb{N})$.
3) Soit E et F deux ensembles et f une application de E dans F.
   Montrer que f est surjective si et seulement si $\forall B \subset F$, $f^{-1}(B) = \varnothing \Leftrightarrow B = \varnothing$.
4) Soient E un ensemble et f_1, f_2, g trois applications de E dans E. Montrer que :
   a. $g \circ f_1 = g \circ f_2$ et g injective $\Rightarrow$ $f_1 = f_2$.
   b. $f_1 \circ g = f_2 \circ g$ et g surjective $\Rightarrow$ $f_1 = f_2$.

Exercice 4 *Calculs algébriques*

Calculer :

$$A=\sum_{k=50}^{100}(k^2-20k+99),\ B=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-2^k}{5^k},\ C=\prod_{k=3}^{n+2}\frac{k-1}{k+1},\ D=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}i,\ E=\sum_{1\le i,j\le n}2^{i+j},F=\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j).$$

Exercice 5 *Relations*

Dans chaque cas suivant, démontrer que la relation $\mathscr{R}$ donnée est une relation d'équivalence sur E et déterminer la classe d'un élément de E.

1) $E=\mathbb{R}$, $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x=\pm y$.
2) $E=\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f\mathscr{R}g \Leftrightarrow f(0)=g(0)$.
3) $E=P$ (le plan) et O un point fixé, $A\mathscr{R}B \Leftrightarrow OA=OB$.

Indications

Exercice 1 *Logique*

1) Les $\forall$ deviennent des $\exists$ et vice-versa. Attention à la négation de $\forall$ … tel que…
2) Ecrire les négations de chaque membre de l'implication et en changer le sens. Attention aux inégalités strictes/larges.
3) Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n}-2^n$ est un multiple de 7 :
   a. $3^{2(n+1)}-2^{n+1}=9\times 3^{2n}-2\times 2^n=7\times 3^{2n}+2\times(3^{2n}-2^n)$.
   b. $3^{2n}=9^n$
   c. $3^{2n}=(7+2)^n$
4) Voir la preuve pour $\sqrt{2}$.

Exercice 2 *Ensembles*

Soit $E=\{a,b,c,d,e\}$ un ensemble.

1) Faire un dessin pour voir. Evaluer chaque « bout » de ce que l'on cherche (en respectant les parenthèses). Par exemple pour $(A\cup B)\cap C$, commencer par évaluer $A\cup B$.
2) On pourra déterminer X d'abord en remarquant que $X\setminus Y=X\cap\bar{Y}$ et $\left(X\cap Y\right)\cup\left(X\cap\bar{Y}\right)=...$

Exercice 3 *Applications*

1) Poser $g=f\circ f$.
2) a. Calculer les premières valeurs de f(n).
   b. $n\in f^{-1}(2\mathbb{N})$ ssi f(n) est pair. Comme 3 est impair, f(n) est pair ssi …
3) On doit prouver l'équivalence :
$$\left(f \text{ est surjective}\right) \iff \left(\forall B\subset F, f^{-1}(B)=\varnothing \iff B=\varnothing\right).$$
   Attention, le second membre de cette équivalence est lui-même une équivalence (dont l'un des sens est évident…). Procéder par double implication et ne pas hésiter à utiliser la contraposée de la second propriété.
4) Dans les deux cas, il suffit de prouver que $\forall\, x\in E$, $f_1(x)=f_2(x)$.
   a. Utiliser $g\circ f_1=g\circ f_2$ d'abord.
   b. Utiliser la surjectivité de g d'abord.

Exercice 4 *Calculs algébriques*

- Pour A, remarquer que $k^2-20k+99=(k-10)^2-1$, faire un changement d'indice et utiliser la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

- Pour B, écrire $\frac{3^k-2^k}{5^k}=\left(\frac{3}{5}\right)^k-\left(\frac{2}{5}\right)^k$, puis somme des termes de deux suites géométriques.
- Pour C, écrire le produit de quotients sous la forme d'un quotient de produit, puis réindexer et utiliser éventuellement les factoriels. Ne pas hésiter à écrire les produits avec des pointillés.
- Pour D, rajouter des parenthèses : $D=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)$.
- Pour E, récrire en une somme double : $E=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} 2^{i+j}\right)$ et remarquer que $2^{i+j}=2^i2^j$.
- Pour F, récrire en une somme double en faisant attention aux bornes : $F=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(i+j)\right)$.

Exercice 5 *Relations*

Dans chaque cas revenir à la définition (dans chaque, toutes les propriétés résultent simplement du fait que l'égalité est une relation d'équivalence.)

Pour les classes, on peut fixer un élément de E et déterminer tous les éléments en relation avec lui.

Réponses

Exercice 1 *Logique*

1) On a :

   a. $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x \geq 2$ et $\forall y \in \mathbb{R}$, $\dfrac{y}{x} > 1$.

   b. $\exists n \in \mathbb{Z}$, $\exists m \in \mathbb{Z}$, tel que $\forall p \in \mathbb{Z}$, $p < n$ ou $p > m$.

   c. $\exists a \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall b \in \mathbb{Z}$, $\exists c \in \mathbb{Z}$ tel que $ac > b$.

2) a. $xy \geq 1 \Rightarrow x^2 + y^2 > 1$.

   b. $y \neq 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}$ tel que $xy > 1$.

3) Démontrer que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{2n} - 2^n$ est un multiple de 7.

   a. Pour $n = 0$, $3^{2n} - 2^n = 1 - 1 = 0$ qui est bien divisible par 7.

   Si pour $n \in \mathbb{N}$ donné, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7, alors on a $3^{2n} - 2^n = 7k$ avec $k \in \mathbb{N}$ et :

$$3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = 9 \times 3^{2n} - 2 \times 2^n = 7 \times 3^{2n} + 2 \times (3^{2n} - 2^n) = 7 \times 3^{2n} + 2 \times 7k = 7 \times (3^{2n} + 2k).$$

   Donc, 7 divise $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ et la propriété est héréditaire.

   b. On a $3^{2n} - 2^n = 9^n - 2^n = (9-2)\sum_{k=0}^{n-1} 9^k 2^{n-1-k} = 7k$ avec $k = \sum_{k=0}^{n-1} 9^k 2^{n-1-k} \in \mathbb{N}$.

   Donc, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

   c. $3^{2n} - 2^n = (7+2)^n - 2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 7^k 2^{n-k} - 2^n = 7 \times \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 7^{k-1} 2^{n-k} = 7K$ avec $K = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 7^{k-1} 2^{n-k} \in \mathbb{N}$.

   Donc, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

4) Supposons que $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Alors, $\sqrt{3} = \dfrac{p}{q}$ avec p et q deux entiers naturels non nuls premiers entre eux et :

$$p^2 = 3q^2 \Rightarrow 3 \mid p^2 \Rightarrow 3 \mid p \Rightarrow p = 3k \text{ avec } k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow q^2 = 3k^2 \Rightarrow 3 \mid q^2 \Rightarrow 3 \mid q.$$

   Ainsi, 3 divise p et q, ce qui est absurde car ils sont premiers entre eux. Donc, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 2 *Ensembles*

1) On a :

   - $A \cup B = \{a,b,d,e\}$ donc $(A \cup B) \cap C = \{b,d\}$.
   - $B \cap C = \{d\}$ donc $A \cup (B \cap C) = \{a,b,d\}$.
   - $B \cup C = \{b,c,d,e\}$ donc $(B \cup C) \setminus D = \{b,d\}$
   - $C \setminus D = \{b,d\}$ donc $B \cup (C \setminus D) = \{b,d,e\}$
   - $\overline{B} = \{a,b,c\}$ donc $D \cup \overline{B} = \{a,b,c,e\}$ et $(D \cup \overline{B}) \setminus C = \{a,e\}$.

     Puis $\overline{A} = \{c,d,e\}$ donc $\overline{A} \cap \left[(D \cup \overline{B}) \setminus C\right] = \{e\}$.
   - $\overline{A} \cap D = \{c,e\}$ donc $(\overline{A} \cap D) \cup \overline{B} = \{a,b,c,e\}$, puis $\left[(\overline{A} \cap D) \cup \overline{B}\right] \setminus C = \{a,e\}$.

2) On a $X\cap Y=\{a,b\}$ et $X\setminus Y=X\cap\overline{Y}=\{c\}$ donc :

$$X=(X\cap Y)\cup(X\cap\overline{Y})=\{a,b,c\}.$$

Alors $\overline{X}\cap Y=(\overline{X}\cap Y)\cup(\overline{X}\cap X)=\overline{X}\cap(Y\cup X)=\overline{X}\cap E=\overline{X}=\{d,e\}$ donc

$$Y=(X\cap Y)\cup(\overline{X}\cap Y)=\{a,b,d,e\}$$

Exercice 3 *Applications*

1) Posons $g=f\circ f$. On a alors $f\circ f\circ f=g\circ f=f\circ g=\mathrm{id}_E$ donc f est bijective et $f^{-1}=g=f\circ f$.

2) a. On a $f(n)=n(n-2)+3$ donc $f(0)=f(2)=3$, ce qui prouve que f n'est pas injective.
De plus, $f(1)=2$ et si $n\geq 2$, $n(n-2)\geq 0$ donc $f(n)\geq 3$.
Ainsi, 1 n'admet pas d'antécédent par f, ce qui prouve que f n'est pas surjective.

b. On a $n\in f^{-1}(2\mathbb{N}) \iff f(n)=n(n-2)+3$ est pair $\iff n(n-2)$ est impair.
Or, n et $n-2$ ont la même parité, donc $n(n-2)$ aussi (le produit deux (im)pairs est (im)pairs), et ainsi, $n\in f^{-1}(2\mathbb{N})$ ssi n est impair, autrement dit, $f^{-1}(2\mathbb{N})$ est l'ensemble des entiers naturels impairs.

3) $(\Rightarrow)$ On suppose que f est surjective.
Soit $B\subset F$. Il est clair que $B=\varnothing \Rightarrow f^{-1}(B)=\varnothing$.
Réciproquement, si $f^{-1}(B)=\varnothing$, supposons que $B\neq\varnothing$. Alors, $\exists\, y\in B$ et comme f est surjective, y admet un antécédent x par f. Alors, $x\in f^{-1}(B)$, donc $f^{-1}(B)\neq\varnothing$, ce qui est absurde. Ainsi, $B=\varnothing$.

$(\Leftarrow)$ On suppose que $\forall B\subset F$, $f^{-1}(B)=\varnothing \iff B=\varnothing$, soit par contraposée : $B\neq\varnothing \iff f^{-1}(B)\neq\varnothing$.
Alors, $\forall\, y\in F$, $f^{-1}(\{y\})\neq\varnothing$, c'est-à-dire : $\exists\, x\in E$, $x\in f^{-1}(\{y\})$. On a alors $f(x)\in\{y\}$, soit $f(x)=y$.
Donc, y admet un antécédent par f. Ceci prouve que f est surjective.

4) a. On suppose que $g\circ f_1=g\circ f_2$ et g est injective.
Alors, $\forall\, x\in E$, $g\circ f_1(x)=g\circ f_2(x)$, soit $g(f_1(x))=g(f_2(x))$. g étant injective, on a $f_1(x)=f_2(x)$.
Ainsi, $\forall\, x\in E$, $f_1(x)=f_2(x)$ donc $f_1=f_2$.

b. On suppose que $f_1\circ g=f_2\circ g$ et g est surjective.
Alors, $\forall\, x\in E$, $\exists\, z\in E$ tel que $x=g(z)$ et $f_1(x)=f_1(g(z))=f_1\circ g(z)=f_2\circ g(z)=f_2(g(z))=f_2(x)$.
Ainsi, $\forall\, x\in E$, $f_1(x)=f_2(x)$ donc $f_1=f_2$.

Exercice 4 *Calculs algébriques*

$$A=\sum_{k=50}^{100}(k^2-20k+99)=\sum_{k=50}^{100}\left[(k-10)^2-1\right]=\sum_{k=50}^{100}(k-10)^2-\sum_{k=50}^{100}1$$
$$=\sum_{k=40}^{90}k^2-(100-50+1)=\sum_{k=1}^{90}k^2-\sum_{k=1}^{39}k^2-51=\frac{90\times 91\times 181}{6}-\frac{39\times 40\times 79}{6}-51=226\,474$$

$$B=\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-2^k}{5^k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{5}\right)^k=\frac{3}{5}\,\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}}-\frac{2}{5}\,\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}=\frac{1}{6}\left(5+\frac{2^{n+2}-3^{n+2}}{5^n}\right)$$

$$C=\prod_{k=3}^{n+2}\frac{k-1}{k+1}=\frac{\prod_{k=3}^{n+2}(k-1)}{\prod_{k=3}^{n+2}(k+1)}=\frac{\prod_{k=2}^{n+1}k}{\prod_{k=4}^{n+3}k}=\frac{6(n+1)!}{(n+3)!}=\frac{6}{(n+2)(n+3)}$$

$$D=\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}i\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$E=\sum_{1\le i,j\le n}2^{i+j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}2^i2^j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(2^i\sum_{j=1}^{n}2^j\right)=\left(\sum_{j=1}^{n}2^j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}2^i\right)=\left(2\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2=4(2^n-1)^2$$

$$F=\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}(i+j)\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j}i+\sum_{i=1}^{j}j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j(j+1)}{2}+j^2\right)=\frac{1}{2}\left(3\sum_{j=1}^{n}j^2+\sum_{j=1}^{n}j\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)^2}{2}.$$

Exercice 5 *Relations*

1) Remarquons que $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x=\pm y \Leftrightarrow x^2=y^2$. On a alors :
   - $\forall\,x\in\mathbb{R}$, on a $x^2=x^2$ donc $x\mathscr{R}x$ et $\mathscr{R}$ est réflexive.
   - $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2$, on a $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x^2=y^2 \Leftrightarrow y^2=x^2 \Leftrightarrow y\mathscr{R}x$ et $\mathscr{R}$ est symétrique.
   - $\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ tel que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$, on a $x^2=y^2$ et $y^2=z^2$, donc $x^2=z^2$, soit $x\mathscr{R}z$ et $\mathscr{R}$ est transitive.

   Pour $x\in\mathbb{R}$ donné, on a $y\in C_x$ ssi $y\mathscr{R}x$, soit $y=\pm x$, donc $C_x=\{x,-x\}$.

2) On a :
   - $\forall\,f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on a $f(0)=f(0)$ donc $f\mathscr{R}f$ et $\mathscr{R}$ est réflexive.
   - $\forall\,(f,g)\in(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2$, on a $f\mathscr{R}g \Leftrightarrow f(0)=g(0) \Leftrightarrow g(0)=f(0) \Leftrightarrow g\mathscr{R}f$ et $\mathscr{R}$ est symétrique.
   - $\forall\,(f,g,h)\in(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^3$ tel que $f\mathscr{R}g$ et $g\mathscr{R}h$, on a $f(0)=g(0)$ et $g(0)=h(0)$, donc $f(0)=h(0)$, soit $f\mathscr{R}h$ et $\mathscr{R}$ est transitive.

   Les classes de $\mathscr{R}$ sont $\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}, f(0)=a\}$ où a est un réel fixé.

3) On a :
   - $\forall\,A\in P$, on a $OA=OA$ donc $A\mathscr{R}A$ et $\mathscr{R}$ est réflexive.
   - $\forall\,(A,B)\in P^2$, on a $A\mathscr{R}B \Leftrightarrow OA=OB \Leftrightarrow OB=OA \Leftrightarrow B\mathscr{R}A$ et $\mathscr{R}$ est symétrique.
   - $\forall\,(A,B,C)\in P^3$ tel que $A\mathscr{R}B$ et $B\mathscr{R}C$, on a $OA=OB$ et $OB=OC$, donc $OA=OC$, soit $A\mathscr{R}C$ et $\mathscr{R}$ est transitive.

   Les classes de $\mathscr{R}$ sont $\{M\in P, OM=R\}$ où R est un réel fixé, autrement dit les cercles de centre O.

Chapitre 2 - Entiers naturels - Entrainement

Exercice 1 *Récurrence*

1) Montrer par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{4^n}{n+1} \leq \dbinom{2n}{n} \leq 4^n$.

2) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

   Prouver par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 *Ensembles finis*

1) Soient un ensemble E de cardinal 320 et A, B et C trois parties A, B et C de E telles que :

   (i) A et B sont disjoints

   (ii) $\mathrm{Card}(A \cap C) = \mathrm{Card}(B \cap C)$

   (iii) $\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = 221$

   (iv) $\mathrm{Card}\big((A \cup B) \cap \overline{C}\big) = 109$

   (v) $\mathrm{Card}(A \cap \overline{C}) = 48$

   (vi) $\mathrm{Card}\big(\overline{(A \cup B)} \cap C\big) = 80$

   a. Déterminer les cardinaux de A, B et C.

   b. Déterminer les cardinaux de $(A \cup B) \cap C$, $\overline{A} \cap \overline{C}$ et $\overline{A} \cup \overline{C}$.

2) Soient deux ensembles E et F, f une application de E dans F, A une partie de E et B une partie de F.

   Est-il vrai que :

   a. si A est finie alors $f(A)$ est finie ;

   b. si $f(A)$ est finie alors A est finie ;

   c. si B est finie alors $f^{-1}(B)$ est finie ;

   d. si $f^{-1}(B)$ est finie alors B est finie ?

Exercice 3 *Dénombrement*

1) Combien y a-t-il d'anagrammes du mot : ANAGRAMME ?

2) A l'occasion d'une compétition sportive groupant 18 athlètes, on attribue une médaille d'or, une d'argent, une de bronze.

   a. Combien y-a-t-il de palmarès possibles ?

   b. Parmi les 18 athlètes, 3 sont américains, 2 sont chinois, 2 sont russes. Tous les autres sont les seuls représentants de leurs pays (donc 14 pays différents sont représentés).

      Combien y-a-t-il de palmarès possibles par pays ?

3) On distribue une main de 5 cartes à partir un jeu usuel de 32 cartes (4 couleurs : trèfle, carreau, cœur, pique et 8 niveaux du 7 à l'as). Combien y a-t-il de tirages possibles vérifiant les conditions suivantes.

   - Aucune condition.
   - Il y a exactement deux rois.
   - Il y a au moins un pique.
   - Il y a un exactement as et deux carreaux.
   - Il n'y a pas de cartes en-dessous du 9.

- Les cinq cartes tirées forment deux paires (mais pas un carré).
- Les cinq cartes tirées sont de la même couleur.
- Les cinq cartes tirées forment une quinte flush (cinq cartes qui se suivent dans la même couleur).

Exercice 4 *Arithmétique*

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouver que si $2^n - 1$ est premier, alors n aussi. La réciproque est-elle vraie ?
2) Soient n et p deux entiers naturels. Montrer que np est pair ou $n^2 - p^2$ est divisible par 8. Le « ou » est-il exclusif ?
3) Prouver par l'absurde que l'équation $12n^3 - 7n = 1$ n'a aucune solution entière.

Indications

Exercice 1 *Récurrence*

1) Evaluer $\binom{2(n+1)}{n+1}$ en fonction de $\binom{2n}{n}$.

   Pour établir une inégalité, ne pas hésiter à former la différence des deux membres.

2) Procéder par récurrence double.

Exercice 2 *Ensembles finis*

1) a. Attention, question délicate.

   On peut commencer par trouver le cardinal de C.

   Ne pas hésiter à écrire toutes les formules qui vous passent par la tête.

   Utiliser toutes les hypothèses.

   Une formule de base ici est : $\text{Card}\, X = \text{Card}(X \cap Y) + \text{Card}(X \cap \overline{Y})$.

   b. Encore la formule ci-dessus avec X et Y bien choisis.

   Pour $\text{Card}(\overline{A} \cup \overline{C})$, on peut utiliser $\text{Card}(\overline{A} \cap \overline{C})$.

2) Simple avec un peu de bon sens, mais attention toute application n'est pas injective et/ou surjective…

Exercice 3 *Dénombrement*

1) Même principe que dans le TD : attention aux lettres en double ou triple.

2) a. Déterminer le modèle : choix des trois vainqueurs distincts, dans un certain ordre…

   b. Raisonner en plusieurs cas, par exemple, suivant le nombre d'américains dans le trio de tête (de 0 à 3). Attention, ici on demande le palmarès par pays, donc si deux américains arrivent en tête, peu importe leur ordre…

3) Déterminer le modèle : choix de cartes distinctes, mais ordre indifférent… puis, dans cas construire presque carte par carte le jeu demandé : par exemple, pour avoir exactement deux rois, il faut choisir les deux rois, et pour chaque paire de rois possible, choisir les trois autres cartes parmi toutes sauf les quatre rois.

Exercice 4 *Arithmétique*

1) Prouver la contraposée en utilisant la formule $a^d - 1 = (a-1)(a^{d-1} + a^{d-2} + ... + a + 1)$.

2) Donner une condition sur n et p pour que np soit impair, et partir de cette hypothèse.

3) Quels sont les couples d'entiers relatifs dont le produit vaut 1 ?

Réponses

Exercice 1 *Récurrence*

3) Pour $n=0$, on a $\frac{4^n}{n+1}=\binom{2n}{n}=4^n=1$ donc la propriété est vraie (on a même des égalités).

Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}$. Alors :

$$\binom{2(n+1)}{n+1}=\binom{2n+2}{n+1}=\frac{(2n+2)!}{\left((n+1)!\right)^2}=\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2}=2\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Par HR, on a alors :

$$2\frac{2n+1}{n+1}\frac{4^n}{n+1}\leq\binom{2(n+1)}{n+1}\leq 2\frac{2n+1}{n+1}4^n$$

Or :

- $2\frac{2n+1}{n+1}4^n\leq 2\frac{2n+2}{n+1}4^n=4^{n+1}$;
- $\frac{4^{n+1}}{n+2}-2\frac{2n+1}{n+1}\frac{4^n}{n+1}=-\frac{2n4^n}{(n+2)(n+1)^2}\leq 0 \Rightarrow \frac{4^{n+1}}{n+2}\leq 2\frac{2n+1}{n+1}\frac{4^n}{n+1}$.

Ainsi, $\frac{4^{n+1}}{n+2}\leq\binom{2(n+1)}{n+1}\leq 4^{n+1}$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

4) On procède par récurrence double.

Avec $u_0=0$ et $u_1=1$, la propriété est immédiatement vraie aux rangs 0 et 1.

Pour $n\in\mathbb{N}$, supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$.

Alors $u_n\in\mathbb{N}$ et $u_{n+1}\in\mathbb{N}$ donc $u_{n+2}=u_n+u_{n+1}\in\mathbb{N}$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Exercice 2 *Ensembles finis*

1) a. Avec A et B sont disjoints, on a $\text{Card}(A\cap B)=\text{Card}(A\cap B\cap C)=\text{Card}(A\cap B\cap\overline{C})=0$ donc :

$$\begin{aligned}\text{Card}(A\cup B\cup C)&=\text{Card}\,A+\text{Card}\,B+\text{Card}\,C-\text{Card}(A\cap B)-\text{Card}(A\cap C)-\text{Card}(B\cap C)\\&\quad+\text{Card}(A\cap B\cap C)\\&=\text{Card}\,A-\text{Card}(A\cap C)+\text{Card}\,B-\text{Card}(B\cap C)+\text{Card}\,C\\&=\text{Card}(A\cap\overline{C})+\text{Card}(B\cap\overline{C})+\text{Card}\,C\\&=\text{Card}\left((A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})\right)+\text{Card}\,C\\&=\text{Card}\left((A\cup B)\cap\overline{C}\right)+\text{Card}\,C\end{aligned}$$

Avec $\text{Card}(A\cup B\cup C)=221$ et $\text{Card}\left((A\cup B)\cap\overline{C}\right)=109$, on obtient immédiatement :

$$\underline{\text{Card}\,C=112}.$$

On a :

$$\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}\big((A\cup B)\cap\overline{C}\big)+\mathrm{Card}\big((A\cup B)\cap C\big)$$
$$\mathrm{Card}\,C=\mathrm{Card}\big((A\cup B)\cap C\big)+\mathrm{Card}\big(\overline{(A\cup B)}\cap C\big)$$

Donc, en soustrayant, on obtient :

$$\mathrm{Card}(A\cup B)-\mathrm{Card}\,C=\mathrm{Card}\big((A\cup B)\cap\overline{C}\big)-\mathrm{Card}\big(\overline{(A\cup B)}\cap C\big).$$

Avec $\mathrm{Card}(A\cup B)=\mathrm{Card}\,A+\mathrm{Card}\,B$ (A et B disjoints) et les hypothèses (iv) et (vi), on obtient :

$$\mathrm{Card}\,A+\mathrm{Card}\,B=112+109-80=141 \qquad \textbf{(1)}.$$

D'autre part :

$$\mathrm{Card}\big((A\cup B)\cap\overline{C}\big)=\mathrm{Card}\big((A\cap\overline{C})\cup(B\cap\overline{C})\big)=\mathrm{Card}(A\cap\overline{C})+\mathrm{Card}(B\cap\overline{C})$$

Donc :

$$\mathrm{Card}(B\cap\overline{C})=\mathrm{Card}\big((A\cup B)\cap\overline{C}\big)-\mathrm{Card}(A\cap\overline{C})=109-48=61.$$

Enfin :

$$\mathrm{Card}\ A=\mathrm{Card}(A\cap C)+\mathrm{Card}(A\cap\overline{C})=\mathrm{Card}(A\cap C)+48$$
$$\mathrm{Card}\ B=\mathrm{Card}(B\cap C)+\mathrm{Card}(B\cap\overline{C})=\mathrm{Card}(B\cap C)+61$$

Avec $\mathrm{Card}(A\cap C)=\mathrm{Card}(B\cap C)$, on obtient :

$$\mathrm{Card}\ B-\mathrm{Card}\ A=13 \qquad \textbf{(2)}.$$

En ajoutant (1) et (2), on obtient, $\mathrm{Card}\,B=77$ et en les soustrayant, on obtient $\mathrm{Card}\,A=64$.

Finalement :

$$\boxed{\mathrm{Card}\,A=64,\ \mathrm{Card}\,B=77\ \text{ et }\ \mathrm{Card}\,C=112.}$$

b. On a $\mathrm{Card}\big((A\cup B)\cap C\big)=\mathrm{Card}\,C-\mathrm{Card}\big(\overline{(A\cup B)}\cap C\big)=112-80$, soit :

$$\underline{\mathrm{Card}\big((A\cup B)\cap C\big)=32.}$$

Par ailleurs, $\mathrm{Card}\ \overline{C}=\mathrm{Card}(A\cap\overline{C})+\mathrm{Card}(\overline{A}\cap\overline{C})=\mathrm{Card}\ E-\mathrm{Card}\ C=320-112=208$, donc :

$$\mathrm{Card}(\overline{A}\cap\overline{C})=\mathrm{Card}\ \overline{C}-\mathrm{Card}(A\cap\overline{C})=\mathrm{Card}\ E-\mathrm{Card}\ C-\mathrm{Card}(A\cap\overline{C})=320-112-48.$$

Soit :

$$\underline{\mathrm{Card}(\overline{A}\cap\overline{C})=160.}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}\mathrm{Card}(\overline{A}\cup\overline{C})&=\mathrm{Card}\,\overline{A}+\mathrm{Card}\,\overline{C}-\mathrm{Card}(\overline{A}\cap\overline{C})\\&=\mathrm{Card}\,E-\mathrm{Card}\,A+\mathrm{Card}\,E-\mathrm{Card}\,C-\mathrm{Card}(\overline{A}\cap\overline{C})\\&=320-64+320-112-160\end{aligned}$$

Soit :

$$\underline{\mathrm{Card}(\overline{A}\cup\overline{C})=304.}$$

2) a. VRAI.

On a même $\text{Card}\, f(A) \le \text{Card}\, A$ (l'inégalité est stricte si deux éléments de A ont la même image, donc f non injective).

b. FAUX.

Pour le voir, il suffit de considérer A infinie et f constante.

A serait forcément finie si f était injective.

c. FAUX.

Même contre-exemple que ci-dessus.

d. FAUX.

B peut être infinie et ne contenir qu'un nombre fini d'éléments ayant un antécédent par f.

Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,;\, x \mapsto x^2$ et $B = \mathbb{R}_-$ (infinie). On a $f^{-1}(B) = \{0\}$ (finie).

B serait forcément finie si f était surjective.

Exercice 3 *Dénombrement*

1) Le mot ANAGRAMME contient 9 lettres, donc 3 A et 2 M, donc :

$$\boxed{\text{Le nombre d'anagrammes du mot ANAGRAMME est } \frac{9!}{3!\times 2!} = 30\,240.}$$

2) a. Le nombre de palmarès possibles est le nombre de façons de choisir 3 athlètes distincts (sans remise) parmi les 18, en tenant compte de l'ordre : c'est un arrangement de 3 parmi 18, donc :

$$\boxed{\text{Le nombre de palmarès possibles est } A_3^{18} = \frac{18!}{15!} = 4896.}$$

b. Considérons plusieurs cas suivant le nombre N d'américains médaillés.

Notons E l'ensemble des pays en lice sauf les Etats-Unis (donc E contient 13 pays).

Un palmarès par pays sera noté X – Y – Z où X, Y et Z sont des pays (distincts ou pas), avec **Us** = Etats-Unis, Ch = Chine et Ru = Russie.

Résumons les diverses possibilités dans un tableau :

N	Palmarès	Condition	Nombre de palmarès possibles
3	**Us** – **Us** – **Us**		1
2	**Us** – **Us** – X	$X \in E$	13
	Us – X – **Us**	$X \in E$	13
	X – **Us** – **Us**	$X \in E$	13
1	**Us** – Ch – Ch		1
	Us – Ru – Ru		1
	Us – X – Y	$(X,Y) \in E^2$ et $X \neq Y$	$A_2^{13} = 13\times 12 = 156$
	Ch – **Us** – Ch		1
	Ru – **Us** – Ru		1
	X – **Us** – Y	$(X,Y) \in E^2$ et $X \neq Y$	156
	Ch – Ch – **Us**		1

	Ru – Ru – **Us**		1
	X – Y – **Us**	$(X,Y)\in E^2$ et $X\neq Y$	156
0	Ch – Ch – X	$X\in E\setminus\{Ch\}$	12
	Ch – X – Ch	$X\in E\setminus\{Ch\}$	12
	X – Ch – Ch	$X\in E\setminus\{Ch\}$	12
	Ru – Ru – X	$X\in E\setminus\{Ru\}$	12
	Ru – X – Ru	$X\in E\setminus\{Ru\}$	12
	X – Ru – Ru	$X\in E\setminus\{Ru\}$	12
	X – Y – Z	$(X,Y,Z)\in E^3$ $X\neq Y\neq Z\neq X$	$A_3^{13}=13\times12\times11=1716$
		Total	2 302

Ainsi :

$$\boxed{\text{Il y a 2 302 palmarès par pays possibles.}}$$

3) Ici, toutes les cartes distribuées sont différentes les unes des autres, mais leur ordre n'importe pas : le modèle est celui des combinaisons.

- *Aucune condition* : Il y a $\binom{32}{5}=201\,376$ possibilités.
- *Exactement deux rois* : Il y a $\binom{4}{2}=6$ possibilités pour les rois et $\binom{28}{3}=3\,276$ possibilités pour les trois autres cartes (qui ne doivent pas être des rois, donc choisies parmi les 32 – 4 = 28 autres).
  Il y a en tout $6\times3\,276=19\,656$ possibilités.
- *Au moins un pique* : On calcule sans pique d'abord : il faut choisir les cinq cartes parmi 24 (les 32 moins les 8 piques), il y a $\binom{24}{5}=42\,504$ possibilités.
  Par différence, il y a $201\,376-42\,504=158\,872$ possibilités.
- *Exactement un as et deux carreaux* : Considérons deux cas.
  - Les cartes choisies contiennent l'as de carreau : Il y a 7 possibilités pour le second carreau et $\binom{21}{3}=1\,330$ pours les trois autres cartes (choisies parmi les $32-8-3=21$ cartes qui ne sont ni des carreaux, ni des as). Il y a en tout $7\times1330=9\,310$ possibilités.
  - Les cartes choisies ne contiennent pas l'as de carreau : Il y a 3 possibilités pour l'as (trèfle, cœur ou pique), $\binom{7}{2}=21$ pour les deux carreaux (7, car on ne peut pas prendre l'as) et $\binom{21}{2}=210$ pour les deux autres cartes. Il y a en tout $3\times21\times210=13\,230$ possibilités.

  En tout, il y a donc $9\,310+13\,230=22\,540$ possibilités.
- *Pas de cartes en-dessous du 9* : Il faut choisir les cinq cartes parmi 24 (les 32 moins les quatre 7 et les quatre 8), donc il y a $\binom{24}{5}=42\,504$ possibilités.

- *Deux paires (mais pas un carré)* : Commençons par choisir les 2 niveaux des paires parmi les 8 niveaux possibles, il y a $\binom{8}{2}=28$ possibilités. Dans chacun des deux niveaux choisis, il faut choisir 2 cartes, soit $\binom{4}{2}=6$ par niveau. Enfin, on $32-2\times4=24$ possibilités pour la carte restantes.

  En tout, il y a $28\times6\times6\times24=24\,192$ possibilités.
- *Couleur* : Il y a 4 couleurs possibles. La couleur étant choisie, il faut tirer 5 cartes parmi les 8 de la couleur, soit $\binom{8}{5}=56$ possibilités.

  En tout, il y a $4\times56=224$ possibilités.
- *Quinte flush* : Une quinte flush peut démarrer au 7 (7-8-9-10-V), au 8 (8-9-10-V-D), au 9 (9-10-V-D-R) ou au 10 (10-V-D-R-As), soit 4 possibilités. Comme il y a 4 couleurs, on obtient $4\times4=16$ quintes flush possibles.

Exercice 4 *Arithmétique*

1) On veut : 2^n-1 premier $\Rightarrow$ n premier.

   Prouvons la contraposée : n non premier $\Rightarrow$ 2^n-1 non premier.

   Si n n'est pas premier, alors on peut écrire $n=pq$ avec p et q entiers supérieurs ou égaux à 2.

   Alors :
$$2^n-1=2^{pq}-1=(2^p)^q-1=(2^p-1)\left((2^p)^{q-1}+(2^p)^{q-2}+...+2^p+1\right).$$
   Or, 2^p-1 et $(2^p)^{q-1}+(2^p)^{q-2}+...+2^p+1$ sont des entiers, et :
   - $p\geq2 \Rightarrow 2^p-1\geq3$;
   - $q\geq2 \Rightarrow (2^p)^{q-1}+(2^p)^{q-2}+...+2^p+1\geq2^p+1\geq2$.

   Ainsi, 2^n-1 est le produit de deux entiers supérieurs ou égaux à 2 donc 2^n-1 n'est pas premier.

   La réciproque serait : n premier $\Rightarrow$ 2^n-1 premier. Or, on a $2^{11}-1=2047=23\times89$ donc $2^{11}-1$ n'est pas premier alors que 11 l'est. La réciproque est fausse.

2) On veut prouver que np est pair ou n^2-p^2 est divisible par 8. Ceci revient à prouver que si np est impair, alors n^2-p^2 est divisible par 8.

   Supposons que np est impair. Alors, n et p sont impairs (car si n ou p est pair, alors np est pair).

   On peut donc écrire $n=2k+1$ et $p=2k'+1$ avec k et k' entiers. Alors :
$$n^2-p^2=(n-p)(n+p)=(2k-2k')(2k+1+2k'+1)=4(k-k')(k+k'+1).$$
   Ou encore :
$$n^2-p^2=4(k+k'-2k')(k+k'+1)=4(k+k')(k+k'+1)-8k'(k+k'+1).$$
   Or, $k+k'$ et $k+k'+1$ sont consécutifs, donc l'un des deux est pair et $(k+k')(k+k'+1)$ est pair. Ceci implique que $4(k+k')(k+k'+1)$ est divisible par 8, donc n^2-p^2.

   La question : « le ou est-il exclusif ? » peut se reformuler en : peut-on avoir np pair <u>et</u> n^2-p^2 divisible par 8 ? La réponse est oui : il suffit de prendre $n=p=2$! Donc, le « ou » n'est pas exclusif.

3) Supposons qu'il existe une entier relatif n tel que $12n^3 - 7n = 1$ (autrement dit, que l'équation $12n^3 - 7n = 1$ admet une solution entière).

Alors, on a $n(12n^2 - 7) = 1$ avec n et $12n^2 - 7$ entiers. Or, la seule façon pour que le produit de deux entiers soit égal à 1 est que ces entiers soient tous les deux égaux à 1 ou tous les deux égaux à – 1.

Donc, $n = \pm 1$. Mais alors $12n^2 - 7 = 5$ et $12n^3 - 7n = \pm 5 \neq 1$. On aboutit à une contradiction, donc l'équation $12n^3 - 7n = 1$ n'a aucune solution entière.

Chapitre 3 - Nombres réels - Entrainement

Exercice 1 *Bornes supérieures et inférieures*

Déterminer, quand elles existent, la borne inférieure et la borne supérieure des ensembles suivants :

1) $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n^2+1} + \dfrac{1}{n^2} \setminus n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

2) $B = \left\{ \dfrac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \setminus (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}$.

Exercice 2 *Valeur absolue*

Résoudre :

a. $\left| |x-1| - x \right| = |x+1|$.

b. $\left| \dfrac{x-1}{x+1} \right| \leq 2x$.

Exercice 3 *Partie entière*

1) Montrer que $f : x \to x - \lfloor x \rfloor$ et périodique (préciser une période) et construire sa courbe.

2) Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor + \left\lfloor x + \dfrac{1}{2} \right\rfloor$ pour $k \in \mathbb{N}$.

4) Prouver que $\forall\, p \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2p+1} \left\lfloor \frac{2k}{2p+1} \right\rfloor = p+2$.

Indications

Exercice 1 *Bornes supérieures et inférieures*

2) Considérer n pair, puis n impair.
3) Poser $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\theta$ et $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\theta$.

Exercice 2 *Valeur absolue*

a. Elever au carré puis considérer deux cas suivant la position de x par rapport 1.
b. Remarquer que toute solution éventuelle doit être positive, puis considérer deux cas suivant la position de x par rapport à 1.

Exercice 3 *Partie entière*

5) $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.
6) Encadrer les trois parties entières en jeu.
7) Considérer deux cas suivant la position de x par rapport à $\lfloor x \rfloor + \dfrac{1}{2}$.
8) Traiter le cas $p = 0$ à part puis, pour $p \geq 1$, séparer la somme en trois astucieusement…

Réponses

Exercice 1 *Bornes supérieures et inférieures*

1) $\inf A = 0$ et $\sup A = \max A = \dfrac{1}{2}$.

2) $\inf B = \min B = -\sqrt{2}$ et $\sup B = \max B = \sqrt{2}$.

Exercice 2 *Valeur absolue*

a. $\big||x-1|-x\big| = |x+1| \Leftrightarrow \big(|x-1|-x\big)^2 = (x+1)^2$.

Si $x \geq 1$, l'équation devient $x^2 + 2x = 0$ qui n'a pas de solution plus grande que 1.

Si $x < 1$, l'équation devient $(2x-1)^2 = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0$, de solutions $0 < 1$ et $2 > 1$.

La seule solution est 0.

b. En remarquant que toute solution éventuelle doit être positive, on peut récrire l'équation :

$$|x-1| \leq 2x(x+1).$$

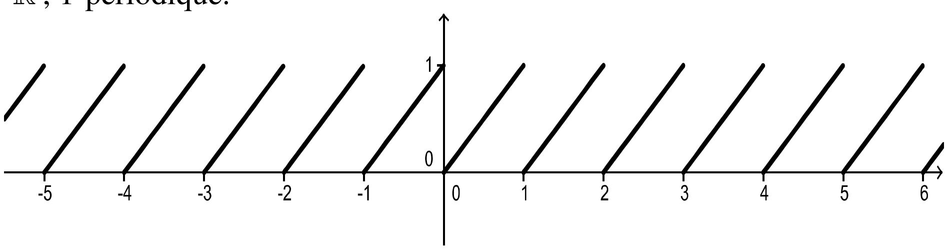
Si $x \geq 1$, l'inéquation devient $2x^2 + x + 1 \geq 0$ qui est vrai pour tout réel positif.

Si $0 \leq x < 1$, l'équation devient $2x^2 + 3x - 1 \geq 0$. Le trinôme $2x^2 + 3x - 1$ est positif à l'extérieur de ses racines, qui sont $\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} \in [0,1[$ et $\dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} < 0$.

L'ensemble des solutions est $\left[\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} ; +\infty\right[$.

Exercice 3 *Partie entière*

1) f est définie sur $\mathbb{R}$, 1-périodique.



2) On a :

$$\left.\begin{array}{l} -x \leq -\lfloor x \rfloor < -x+1 \\ -y \leq -\lfloor y \rfloor < -y+1 \\ x+y-1 < \lfloor x+y \rfloor \leq x+y \end{array}\right\} \Rightarrow \; -1 < \lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor < 2$$

Or $\lfloor x+y \rfloor - \lfloor x \rfloor - \lfloor y \rfloor$ est entier donc :

$$\lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1.$$

3) Si $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$, alors $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor$, d'où le résultat.

Si $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2} \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$, alors $\left\lfloor x + \frac{1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$ et $\lfloor 2x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 1$, d'où le résultat.

4) Pour $p = 0$, on a $\sum_{k=1}^{2p+1} \left\lfloor \frac{2k}{2p+1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{1} \right\rfloor = 2 = 0 + 2$.

Pour $p \geq 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{2p+1} \left\lfloor \frac{2k}{2p+1} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{p} \left\lfloor \frac{2k}{2p+1} \right\rfloor + \sum_{k=p+1}^{2p} \left\lfloor \frac{2k}{2p+1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2(2p+1)}{2p+1} \right\rfloor = 0 + \sum_{k=p+1}^{2p} 1 + \lfloor 2 \rfloor = p + 2 .$$

Chapitre 4 - Nombres complexes - Entrainement

Exercice 1 *Equations*

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a. $z^4+10z^2+169=0$.

b. $z^3=\dfrac{4+4i}{i+\sqrt{3}}$.

c. $(z^2+1)^2+(z^2-2z-1)^2=0$.

d. $z+2\overline{z}=1$.

e. $z+2|z|=1$

f. $(z+1)^n+(z-1)^n=0$ avec $n\in\mathbb{N}^*$.

Exercice 2 *Système*

Pour a réel fixé, résoudre $\begin{cases}\cos a+\cos(a+x)+\cos(a+y)=0\\ \sin a+\sin(a+x)+\sin(a+y)=0\end{cases}$ d'inconnues x et y.

Exercice 3 *Calculs algébriques*

Soit $\theta\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$. Calculer :

$$S_1=\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta)\qquad S_2=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\sin(k\theta)\qquad S_3=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\big(\cos(k\theta)+\sin(k\theta)\big)\qquad S_4=\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta)$$

Exercice 4 *Applications géométriques*

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z du plan complexe tels que :

a. $z+\overline{z}=2$.

b. $z-\overline{z}=2$.

c. $z\overline{z}=2$.

d. $z/\overline{z}=2$.

e. $z^2-\overline{z}^2=2i$.

2) Déterminer les écritures complexes des transformations suivantes :

- r = rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$;
- t = translation de vecteur $\vec{u}(1+i)$;
- h = homothétie de centre A(2i) et de rapport – 2 ;
- s = quart de tour indirect de centre $B(1-i)$;
- $r\circ t$;
- $\sigma\circ s\circ\sigma$ où σ est la réflexion d'axe (Ox).

On identifiera les deux dernières transformations et on donnera leurs éléments caractéristiques.

Indications

Exercice 1 *Equations*

a. Equation bicarrée et $-5+12i=(2+3i)^2$.

b. Mettre le second membre sous forme exponentielle. *Attention* : racines troisièmes.

c. $a^2+b^2=(a+ib)(a-ib)$.

d. Montrer que z est réel.

e. Comme au-dessus.

f. Après avoir justifié que 1 n'est pas solution, transformer en $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=-1$ donc $\frac{z+1}{z-1}$ est une racine $n^{\text{ième}}$ de – 1.

Exercice 2 *Système*

Remarquer que le système équivaut à $e^{ix}+e^{iy}=-1$, puis montrer que e^{ix} et e^{iy} sont conjugués.

Exercice 3 *Calculs algébriques*

Passer aux exponentielles complexes.

- S_1 est la partie réelle de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique.
- S_2 est la partie imaginaire de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique.
- Séparer la somme en deux (une partie réelle, une partie imaginaire) puis formule du binôme.
- Formule de duplication puis comme S_1.

Exercice 4 *Applications géométriques*

1) On peut revenir aux coordonnées cartésiennes ($z=x+iy$) faute d'idée…
2) Utiliser le cours !

Réponses

Exercice 1 *Equations*

a. Solutions : $2+3i$, $2-3i$, $-2+3i$ et $-2-3i$.

b. Solutions : $\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{36}}, \sqrt{2}e^{i\frac{25\pi}{36}}$ et $\sqrt{2}e^{i\frac{49\pi}{36}}$.

c. Solutions : $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1-i)$, $\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1-i)$, $\frac{1+\sqrt{3}}{2}(1+i)$ et $\frac{1-\sqrt{3}}{2}(1+i)$.

d. Solution : $\frac{1}{3}$.

e. Solutions : -1 et $\frac{1}{3}$.

f. Solutions : $-i\,\text{cotan}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ avec $k\in[\![0,n-1]\!]$.

Exercice 2 *Système*

Avec les exponentielles complexes, le système se récrit $e^{ia}+e^{i(a+x)}+e^{i(a+y)}=0$, soit $e^{ix}+e^{iy}=-1$.

Ceci implique que $\sin y=-\sin x$ et donc que $\cos y=\pm\cos x$, soit $e^{iy}=e^{-ix}$ ou $e^{iy}=-e^{ix}$. Le second cas est exclu (car on aurait $e^{ix}+e^{iy}=0\neq-1$), donc $e^{iy}=e^{-ix}$ (e^{ix} et e^{iy} sont conjugués).

On a alors $e^{ix}+e^{-ix}=-1$, soit $\cos x=-\frac{1}{2}$ donc $x=\pm\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ et $y=-x\ [2\pi]$.

Finalement, les couples solutions sont $\left(\frac{2\pi}{3}\ [2\pi], -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\right)$ et $\left(-\frac{2\pi}{3}\ [2\pi], \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\right)$.

Exercice 3 *Calculs algébriques*

On obtient :

$$S_1=\begin{cases}\dfrac{\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} & \text{pour } \theta\neq 0\ [2\pi]\\ n+1 \quad \text{pour } \theta=0\ [2\pi] & \end{cases}$$

$$S_2=\begin{cases}\sin\left(\frac{n(\theta+\pi)}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)(\theta+\pi)}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} & \text{pour } \theta\neq \pi\ [2\pi]\\ n+1 \quad \text{pour } \theta=\pi\ [2\pi] & \end{cases}$$

$$S_3=2^n\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)+\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\right]$$

$$S_4 = \begin{cases} \dfrac{\cos(n\theta)\sin\left((n+1)\theta\right)}{2\sin\theta} + \dfrac{n+1}{2} & \text{pour } \theta \neq 0\ [\pi] \\ n+1 \quad \text{pour } \theta = 0\ [\pi] \end{cases}$$

Exercice 4 *Applications géométriques*

1) a. $z+\overline{z}=2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z)=1$: droite verticale d'équation $x=1$.

   b. $z-\overline{z}=2 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=-i$: impossible, aucun point.

   c. $z\overline{z}=2 \Leftrightarrow OM=\sqrt{2}$: cercle de centre O est de rayon $\sqrt{2}$.

   d. $z/\overline{z}=2$: impossible car $\left|\dfrac{z}{\overline{z}}\right|=1\neq 2$, aucun point.

   e. $z^2-\overline{z}^2=2i \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z^2)=1 \Leftrightarrow xy=\dfrac{1}{2}$: hyperbole d'équation $y=\dfrac{1}{2x}$.

2) On obtient :

- r : $z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$.
- t : $z'=z+1+i$.
- h : $z'=-2z+6i$.
- s : $z'=-iz+2$.
- $r\circ t$: $z'=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z+\sqrt{2}i$. $r\circ t$ est la rotation de centre $C\left(-\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.
- $\sigma\circ s\circ\sigma$: $z'=iz+2$. $\sigma\circ s\circ\sigma$ est le quart de tour direct de centre $D(1+i)$.

Chapitre 5 - Fonctions numériques - Généralités - Entrainement

Exercice 1 *Bornes supérieure et inférieure*

Déterminer les bornes inférieure et supérieure (si elles existent) de $f : x \mapsto \dfrac{|x^2-1|}{x^3+1}$ et dire si c'est un minimum ou un maximum.

Exercice 2 *Puissances réelles*

Résoudre :

a. $3^{2x} - 3^{2x+1} + 2^{3x} = 0$ b. $5^{x^2} - 3^{3x^3} \geq 0$ c. $(1-x)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x = 1$.

Exercice 3 *Fonctions circulaires réciproques*

1) Etudier les fonctions :
   a. $f : x \mapsto \arcsin\big(\sin(4x)\big)$ b. $g : x \mapsto \cos\big(4\arctan x\big)$
2) Simplifier $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$.
3) Prouver que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\arctan(e^x) - \arctan(e^{-x}) = \arctan(\operatorname{sh} x)$.

Exercice 4 *Etude de fonctions*

Etudier les fonctions suivantes (branches infinies incluses) :

a) $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$.

b) $g : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$.

c) $h : x \mapsto x + \sqrt{\sin x}$ sur $[0;\pi]$.

d) $\varphi : x \mapsto \dfrac{\arctan x - 1}{x^2+1}$.

Indications

Exercice 1 *Bornes supérieure et inférieure*

Commencer par déterminer l'ensemble de définition de f, simplifier f puis l'étudier.

Exercice 2 *Puissances réelles*

a. Simplifier l'équation, faire passer un terme dans le second membre et passer au log.
b. Idem.
c. Déterminer l'ensemble de définition de $x \mapsto (1-x)\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$, puis son signe de manière à restreindre l'ensemble d'étude. Transformer l'équation puis étudier une fonction bien choisie.

Exercice 3 *Fonctions circulaires réciproques*

1) a. Etudier la périodicité, l'imparité et simplifier f sur $\left[0\,;\frac{\pi}{8}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{8};\frac{\pi}{4}\right]$.

   b. Etudier la parité et simplifier g en développant cos(3a) et en utilisant $1+\tan^2=\frac{1}{\cos^2}$.

2) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)=\arctan\left[\tan\left(\arctan\left(\frac{1}{2}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right)\right]$ (le justifier).

3) Poser $f(x)=\arctan(e^x)-\arctan(e^{-x})-\arctan(\operatorname{sh}x)$ et dériver.

Exercice 4 *Etude de fonctions*

a) Attention aux ensembles de définition et dérivabilité.
   Attention aux branches infinies (asymptotes).
   Pour les limites, ne pas hésiter à poser $X=\frac{1}{x}$. Attention pour $x<0$, $\sqrt{x(x+2)}=-x\sqrt{1+\frac{2}{x}}$.
b) Simple ! Attention aux branches infinies (asymptotes).
c) Attention à la dérivabilité et sur $\left]\frac{\pi}{2};\pi\right[$, écrire $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}$, puis penser à l'expression conjuguée.
d) Choisir astucieusement une fonction auxiliaire pour étudier le signe de la dérivée. Cette fonction auxiliaire peut être définie sur $\mathbb{R}^*$…

Réponses

Exercice 1 *Bornes supérieure et inférieure*

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $f(x)=\dfrac{|(x+1)(x-1)|}{(x+1)(x^2-x+1)}$.

- Sur $]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$. f est rationnelle donc dérivable et $f'(x)=\dfrac{x(2-x)}{(x^2-x+1)^2}$.
- Sur $]-1;1]$, $f(x)=\dfrac{1-x}{x^2-x+1}$ et $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x^2-x+1)^2}$.

On obtient le tableau :

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$+$		$-$		$+$		$-$	
f	0	$\searrow$	$-2/3$ || $2/3$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	0

D'après ce tableau :

$$\inf f=-\frac{2}{3}\ \text{(non atteint) et } \sup f=\max f=1.$$

Exercice 2 *Puissances réelles*

a. $3^{2x}-3^{2x+1}+2^{3x}=0 \Leftrightarrow 9^x-3\times 9^x+8^x=0 \Leftrightarrow 2\times 9^x=8^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{8}{9}\right)^x=2 \Leftrightarrow x=\dfrac{\ln 2}{\ln(8/9)}$.

b. $5^{x^2}-3^{3x^3}\geq 0 \Leftrightarrow 5^{x^2}\geq 9^{x^3} \Leftrightarrow x^2\ln 5\geq x^3\ln 9 \Leftrightarrow x^2(x\ln 9-\ln 5)\leq 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x\leq\dfrac{\ln 5}{\ln 9} \Leftrightarrow x\leq\dfrac{\ln 5}{\ln 9}$.

c. Posons $f(x)=(1-x)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=(1-x)e^{x\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}$. f est définie sur $]-\infty;0[\,\cup\,]1;+\infty[$.

Sur $]1;+\infty[$, $f(x)<0$ donc $f(x)\neq 1$.

Sur $]-\infty;0[$, $(1-x)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=1 \Leftrightarrow (1+x)\ln(1-x)-x\ln(-x)=0$.

Posons $g(t)=(1-t)\ln(1+t)+t\ln t$ sur $]0;+\infty[$ (l'équation se récrit alors $g(-x)=0$).

g est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$g'(t)=\frac{2}{1+t}-\ln(1+t)+\ln t \text{ et } g''(t)=\frac{1-t}{t(1+t)^2}.$$

- Sur $]0;1[$, g' est continue et strictement croissante de $\lim\limits_{0} g'=-\infty$ à $g'(1)=1-\ln 2>0$, donc d'après le théorème de la bijection continue, elle s'annule une fois en un réel $\alpha\in\,]0;1[$ et est strictement négative sur $]0;\alpha[$ et strictement positive sur $]\alpha;1[$.

- Sur $]1;+\infty[$, g' est strictement décroissante de $g'(1)=1-\ln 2>0$ à $\lim\limits_{+\infty} g'=0$, donc strictement positive.

Alors :

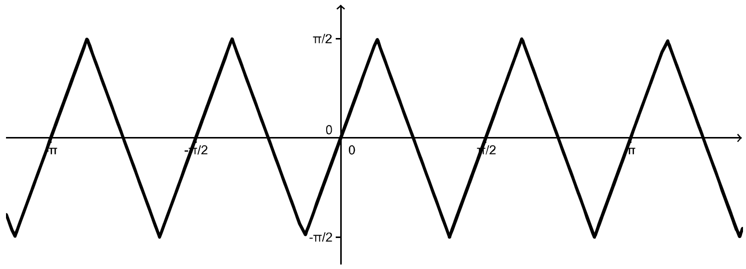
- Sur $]0;\alpha[$, g est strictement décroissante de $\lim\limits_{0} g=0$ à $g(\alpha)<0$, donc ne s'annule pas.
- Sur $]\alpha;+\infty[$, g est continue et strictement croissante de $g(\alpha)<0$ à $\lim\limits_{+\infty} g'=+\infty$, donc d'après le théorème de la bijection continue, elle s'annule exactement une fois sur cet intervalle.

Enfin, remarquons que $g(1)=0$, donc $g(t)=0$ en 1 uniquement.

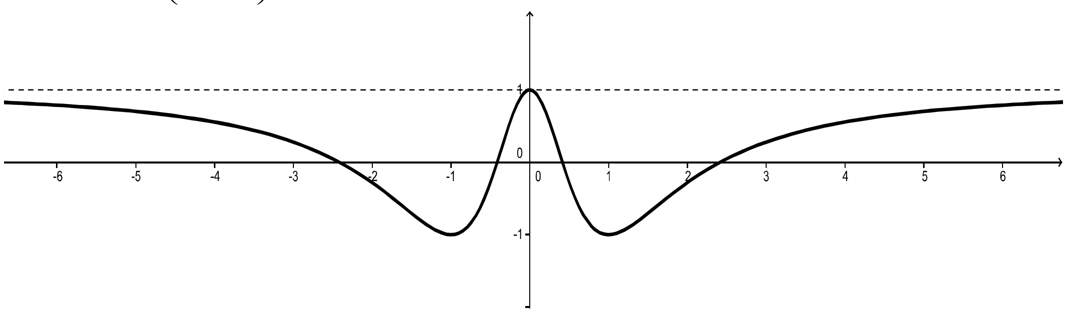
Finalement, sur $]-\infty;0[$, $(1-x)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=1$ ssi $x=-1$ et sur $]1;+\infty[$, $(1-x)\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x\neq 1$, donc l'unique solution de l'équation est – 1.

Exercice 3 *Fonctions circulaires réciproques*

1) a. f est $\dfrac{\pi}{2}$-périodique et impaire. $f(x)=4x$ sur $\left[0;\dfrac{\pi}{8}\right]$ et $f(x)=\pi-4x$ sur $\left[\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{4}\right]$.



b. g est paire. $g(x)=2\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2-1$.



2) $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)+\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

3) Si $f(x)=\arctan(e^x)-\arctan(e^{-x})-\arctan(\operatorname{sh} x)$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}+\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}-\frac{\operatorname{ch} x}{1+\operatorname{sh}^2 x}=\frac{2e^x}{1+e^{2x}}-\frac{1}{\operatorname{ch} x}=0 \text{ donc f est constante.}$$

Comme $f(0)=0$, f est nulle.

Exercice 4 *Etude de fonctions*

a) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x(x+2)}$.

f est définie sur $]-\infty;-2]\cup]0;+\infty[$, dérivable sur $]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ et $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\dfrac{x^2-2}{x\sqrt{x(x+2)}}$.

<u>En $-\infty$</u> :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}\right)=-1\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=-\lim\limits_{X\to0^-}\dfrac{e^X\sqrt{2X+1}-1}{X}=-h'(0)=-2\\ \qquad\text{avec } h(X)=e^X\sqrt{2X+1}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{asymptote d'équation } y=-x-2.$$

<u>En $+\infty$</u> :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

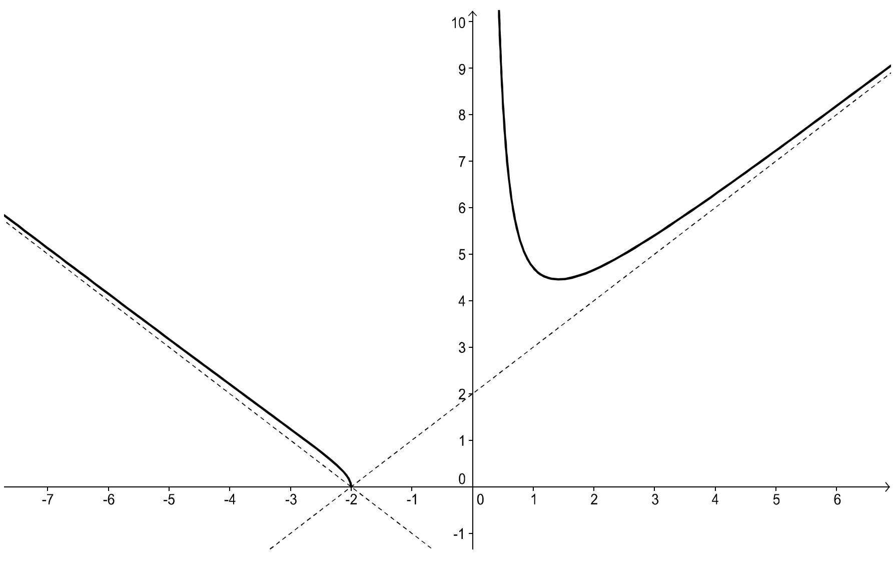
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=h'(0)=2\end{array}\right\}\Rightarrow \text{asymptote d'équation } y=x+2.$$

<u>En 0</u> :

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^X}{X}\sqrt{2X+1}=+\infty \Rightarrow$ asymptote d'équation $x=0$.

<u>En -2</u> :

$f(-2)=0$ et $\lim\limits_{x\to-2} f'(x)=-\infty \Rightarrow$ demi tangente verticale.



b) $g(x)=\ln(\operatorname{ch} x)$.

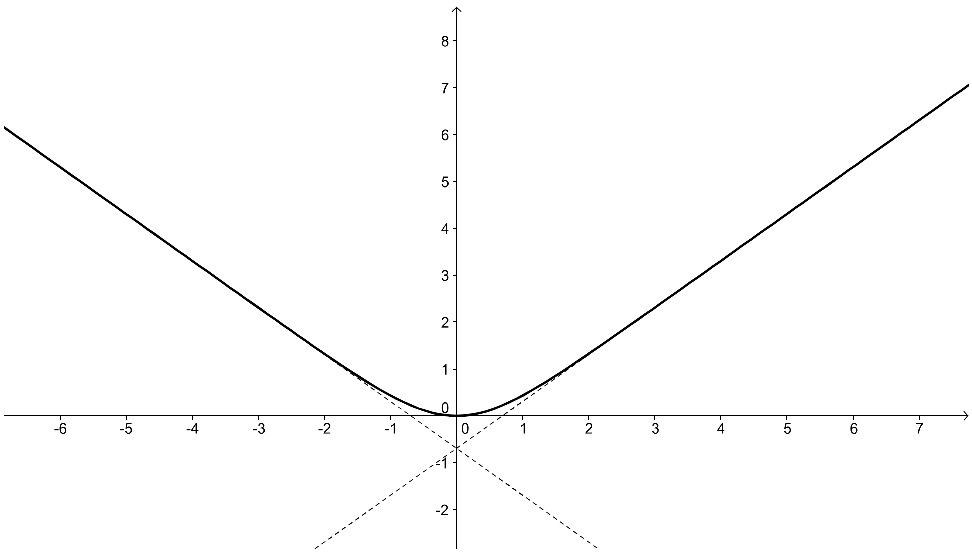
g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, paire. $g'(x)=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

$g(0)=0$ et $g'(0)=0$, tangente horizontale à l'origine.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

$g(x)=x-\ln 2+\ln(1+e^{-2x})$ donc asymptote d'équation $y=x-\ln 2$ en $+\infty$.

Par symétrie, asymptote d'équation $y=-x-\ln 2$ en $-\infty$.



c) $h(x)=x+\sqrt{\sin x}$ sur $[0;\pi]$.

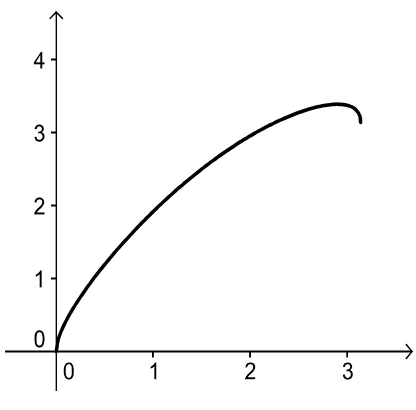
h est dérivable sur $]0;\pi[$ et $h'(x)=1+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}=\dfrac{2\sqrt{\sin x}+\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Sur $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $h'(x)>0$ et sur $\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$, $\cos x=-\sqrt{1-\sin^2 x}$:

$$h'(x)=\frac{2\sqrt{\sin x}-\sqrt{1-\sin^2 x}}{2\sqrt{\sin x}}=\frac{\sin^2 x+4\sin x-1}{2(2\sqrt{\sin x}+\sqrt{1-\sin^2 x})\sqrt{\sin x}}=\frac{\left(\sin x+2-\sqrt{5}\right)\left(\sin x+2+\sqrt{5}\right)}{2(2\sqrt{\sin x}+\sqrt{1-\sin^2 x})\sqrt{\sin x}}$$

du signe de $\sin x+2-\sqrt{5}=\sin x-\sin\alpha$ avec $\alpha=\pi-\arcsin(\sqrt{5}-2)\in\left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right[$.

$\lim\limits_{x\to 0} h'(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to\pi} h'(x)=-\infty$: demi-tangentes verticales en 0 et π.



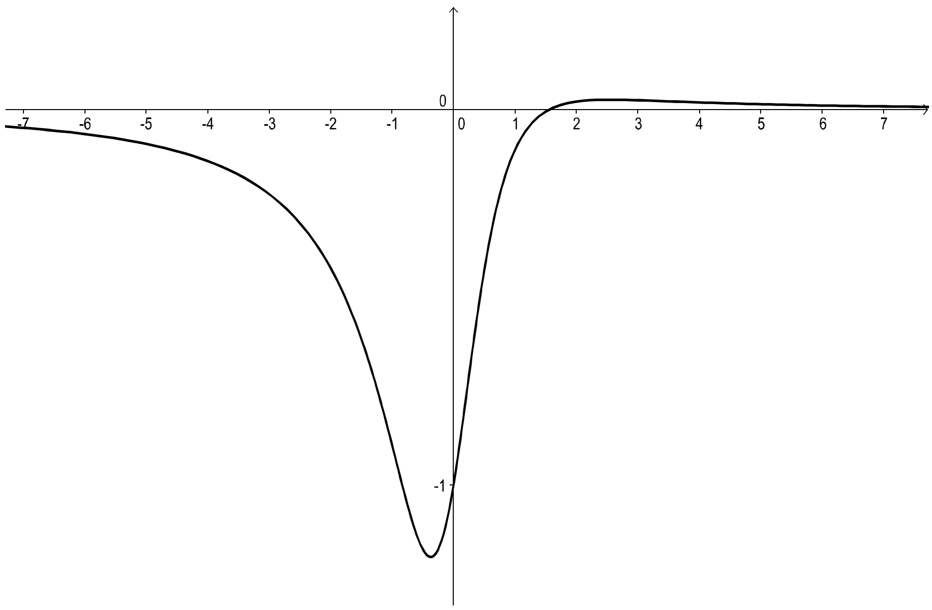
d) $\varphi(x)=\dfrac{\arctan x-1}{x^2+1}$. φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x)=\dfrac{1-2x\arctan x+2x}{(x^2+1)^2}$.

Sur $\mathbb{R}^*$, $\varphi'(x)=\dfrac{x\,u(x)}{(x^2+1)^2}$ avec $u(x)=\dfrac{1}{x}-2\arctan x+2$.

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $u'(x)=-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{1+x^2}<0$.

- Sur $\mathbb{R}_+^*$, u est continue et strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to 0^+} u(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=2-\pi<0$, donc u s'annule une fois (en changeant de signe).
- Sur $\mathbb{R}_-^*$, u est continue et strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x)=2+\pi>0$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} u(x)=-\infty$, donc u s'annule une fois (en changeant de signe).

Enfin, $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.



Chapitre 6 - Fonctions numériques - Limites et continuité - Entrainement

Exercice 1 *Limites*

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0} x^{x^x}$ b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(1+x^2)-2\ln x\right)$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$ d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\operatorname{ch} x)-\ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{\cos(2x)}}{\tan^2(x/2)}$ h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{x\ln x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0}\sin x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ j) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{2x-1}}-2}{\sqrt{2+\sqrt{3x+1}}-\sqrt{x+3}}$ k) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt{2}\sin x-1}{\sqrt{2}\cos x-1}$ l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\arctan x-\arcsin x}{\arcsin x-\dfrac{\pi}{2}}$

m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$ n) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}(2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$ o) $\lim\limits_{x\to 0}(\tan x)^{\sin x}$ p) $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(\arcsin x)$

Exercice 2 *Continuité*

Etudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto x\,E(x)+E(1-x)$.

Exercice 3 *Grands théorèmes*

1) Soit $f:[0,1]\to[0,1]$, continue. Montrer qu'il existe $c\in[0,1]$ tel que $f(c)=c^2$.
2) Soit f une fonction continue sur $[0,2]$ telle que $f(0)=0$ et $f(2)=2$. Montrer qu'il existe $a\in[0,1]$ tel que $f(a+1)=f(a)+1$.

Indications

Exercice 1 *Limites*

a) Passer en exponentielles.

b) $2\ln x = \ln(x^2)$ puis $\ln a - \ln b = ...$

c) $\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}}$ (le justifier…)

d) $\dfrac{\ln(\operatorname{ch} x) - \ln(\operatorname{sh} x)}{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x} = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x} \dfrac{\ln\left(\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)}{\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} - 1}$ et $\lim\limits_{X \to 1} \dfrac{\ln X}{X-1}$.

e) $\dfrac{\ln(\cos x)}{x} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\sin x}{x} \sin x \dfrac{\ln(1-\sin^2 x)}{\sin^2 x}$.

f) Taux de variation en 0.

g) Même formule que pour le c), puis un peu de trigo.

h) Changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$.

i) $\left|\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right| \leq 1$.

j) Expressions conjuguées à répétitions.

k) $\dfrac{\sqrt{2}\sin x - 1}{\sqrt{2}\cos x - 1} = \dfrac{x - \frac{\pi}{4}}{\cos x - \cos\frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \sin\frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}$.

l) $2\arctan x - \arcsin x = 2\left(\arctan x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \left(\arcsin x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ puis faire apparaitre des taux de variation.

m) Formule de duplication de ch.

n) Factoriser $2x^2 - 3x + 1$ puis poser $h = x - \dfrac{1}{2}$.

o) Passer en exponentielles.

p) $\ln(\arcsin x) = \ln\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right) - \ln x$.

Exercice 2 *Continuité*

Donner l'expression de f(x) sur $[n, n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$, puis les limites à gauche et droite en n.

Exercice 3 *Grands théorèmes*

3) Poser $g(x) = f(x) - x^2$ puis TVI.

4) Poser $g(x) = f(x+1) - f(x)$ sur $[0,1]$ puis TVI.

Réponses

Exercice 1 *Limites*

a) 0 b) 0 c) $\frac{2}{3}$ d) 0 e) 1 f) 1 g) $\frac{8}{3}$ h) $+\infty$

i) 0 j) -4 k) -1 l) -1 m) $\frac{1}{2}$ n) $\frac{1}{\pi}$ o) 1 p) 0

Exercice 2 *Continuité*

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$, on a $f(x) = nx - n + 1$ sur $[n, n+1[$. Sur $]n, n+1[$, f est affine donc continue.

On a $\lim\limits_{x \to n^+} f(x) = n^2 - n + 1 = f(n)$ et $\lim\limits_{x \to n^-} f(x) = \lim\limits_{x \to n^-} \left[(n-1)x - (n-1) + 1\right] = n^2 - 2n + 2$.

Enfin, $n^2 - 2n + 2 = n^2 - n + 1 \iff n = 1$.

Finalement, f est continue en tout point non entier, continue en 1 et non continue en tout entier différent de 1.

Exercice 3 *Grands théorèmes*

1) Posons $g(x) = f(x) - x^2$. g est continue sur $[0,1]$, $g(0) = f(0) \geq 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leq 0$ donc d'après le TVI, g s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.
2) Poser $g(x) = f(x+1) - f(x)$. f est définie et continue sur $[0,1]$ en tant que différence de telles fonctions. De plus, $g(0) = f(1)$ et $g(1) = 2 - f(1)$ donc $\frac{g(0) + g(1)}{2} = 1$. Or, la moyenne de g(0) et g(1) est comprise entre ces deux nombres, donc d'après le TVI, il existe $a \in [0,1]$ tel que $g(a) = 1$, soit $f(a+1) = f(a) + 1$.

Chapitre 7 - Fonctions numériques - Dérivation - Entrainement

Exercice 1 *Dérivées successives*

1) Après avoir justifié que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, déterminer les dérivées successives de $f : x \mapsto x^2 e^x$.
2) Même question avec $g : x \mapsto (\cos x)(\ln x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) On pose $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Montrer que h est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ sachant que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{x \to 0}\left[\dfrac{1}{x^{n+1}}\left(e^x - \sum_{k=0}^{n+1}\dfrac{x^k}{k!}\right)\right] = 0$.

Exercice 2 *Fonctions implicites*

$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f_\lambda(x) = \arctan(x + \lambda)$.

1) Montrer que l'équation $f_\lambda(x) = x$ admet une unique solution réelle que l'on notera $g(\lambda)$.
2) Prouver que g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$.
3) Etudier la fonction g.

Exercice 3 *Grands théorèmes*

1) Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$ telle que $f(0) > f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f(1) > f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Montrer qu'il existe $c \in \,]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.
2) Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan. Montrer que si f admet deux points fixes alors $\mathscr{C}$ admet une tangente parallèle à la première bissectrice d'équation $y = x$. La réciproque est-elle vraie ?

Indications

Exercice 1 *Dérivées successives*

1) f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions.

   $f(x)=x^2e^x$, $f'(x)=(x^2+2x)e^x=\left[(x+1)^2-1\right]e^x$, $f''(x)=\left[(x+2)^2-2\right]e^x$, $f'''(x)=\left[(x+3)^2-3\right]e^x$.

   Conjecturer…

2) g est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de telles fonctions ($u : x \mapsto \cos x$ et $v : x \mapsto \ln x$).

   Puis Leibniz après avoir évaluer les dérivées successives de u et v (attention, isoler le terme en $u^{(n)}v$).

3) On prolonge en 0 avec $h(0)=1$.

   h est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de telles fonctions ($u : x \mapsto e^x-1$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$).

   Evaluer les dérivées successives de h sur $\mathbb{R}^*$ (avec Leibniz) et passer à la limite en 0.

Exercice 2 *Fonctions implicites*

Voir l'exercice 13 du TD n° 6 et l'exercice 5 du DS n° 4, avec ici $h(x)=\tan x - x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 3 *Grands théorèmes*

1) f dérivable donc continue sur le segment $[0,1]$ donc admet un minimum… atteint sur $]0,1[$ car…
2) Poser $g(x)=f(x)-x$ puis Rolle. La réciproque est fausse (trouver un contre-exemple).

Réponses

Exercice 1 *Dérivées successives*

1) f est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions.

   En calculant les premières dérivées de f (cf. indications), on conjecture que $\forall\, n \in \mathbb{N}$:
$$f^{(n)}(x) = \left[(x+n)^2 - n\right]e^x .$$
   On le prouve par récurrence (vrai pour $n = 0$ et, pour l'hérédité, écrire :
$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}\,'(x) &= \left[(x+n)^2 - n + 2(x+n)\right]e^x = \left[(x+n)^2 + 2(x+n) + 1 - (n+1)\right]e^x \\ &= \left[(x+n+1)^2 - (n+1)\right]e^x \end{aligned}$$

2) g est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}_+^*$ en tant que produit de telles fonctions ($u : x \mapsto \cos x$ et $v : x \mapsto \ln x$).

   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $v^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} g^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x) = u^{(n)}(x)v(x) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x) \\ &= \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\ln x + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cos\left(x + (n-k)\frac{\pi}{2}\right)\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k} \end{aligned}$$

3) On a $\lim\limits_{0} h = 1$ donc on prolonge h par continuité en 0 en posant $h(0) = 1$.

   h est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de telles fonctions ($u : x \mapsto e^x - 1$ et $v : x \mapsto \dfrac{1}{x}$).

   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u^{(n)}(x) = e^x$ et $v^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$ donc $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:
$$\begin{aligned} h^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x) = u(x)v^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x) \\ &= (e^x - 1)\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}e^x\,\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} = e^x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \\ &= e^x\,\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}x^{n-k}}{(n-k)!} - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = e^x\,\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{k!} - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \\ &= e^x\,\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-x)^k}{k!} - \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right) - \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} = e^x\,\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-x)^k}{k!} + \frac{e^x}{n+1} + \frac{(-1)^{n+1}n!}{x^{n+1}} \\ &= \frac{e^x}{n+1} + \frac{n!}{(-x)^{n+1}} - e^x\,\frac{n!}{(-x)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-x)^k}{k!} = \frac{e^x}{n+1} + n!e^x\,\frac{1}{(-x)^{n+1}}\left(e^{-x} - \sum_{k=0}^{n+1}\frac{(-x)^k}{k!}\right) \end{aligned}$$

   Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x^{n+1}}\left(e^x - \sum\limits_{k=0}^{n+1}\dfrac{x^k}{k!}\right)\right] = 0$ donc $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{(-x)^{n+1}}\left(e^{-x} - \sum\limits_{k=0}^{n+1}\dfrac{(-x)^k}{k!}\right)\right] = 0$, d'où :
$$\lim_{x\to 0} h^{(n)}(x) = \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x \to 0} h^{(n)}(x)$ est finie donc h est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $h^{(n)}(0) = \dfrac{1}{n+1}$.

Exercice 2 *Fonctions implicites*

1) $f_\lambda(x) = x \Leftrightarrow u(x) = \arctan(x+\lambda) - x = 0$.

   La fonction u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -\dfrac{(x+\lambda)^2}{1+(x+\lambda)^2} \leq 0$. u' ne s'annulant qu'une seule fois sur $\mathbb{R}$, u est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. De plus, elle est continue (car dérivable), $\lim\limits_{-\infty} u = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} u = -\infty$ donc, d'après le théorème de la bijection u s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}$.

2) On a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\arctan\big(g(\lambda)+\lambda\big) = g(\lambda)$, soit $\tan g(\lambda) - g(\lambda) = \lambda$ avec $g(\lambda) \in I = \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Si on pose $h(x) = \tan x - x$, on prouve facilement que h est continue et strictement croissante sur I de $-\infty$ à $+\infty$, donc que h est bijective de I sur $\mathbb{R}$.

   Comme $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $h\big(g(\lambda)\big) = \lambda$, g est la réciproque de h.

   $\forall x \in I$, on a $h'(x) = \tan^2 x$ donc h' s'annule uniquement en 0. Or, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $f_\lambda(0) = \arctan \lambda$ donc $f_\lambda(0) = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$, ce qui veut dire que $g(\lambda) = 0$ en 0 uniquement.

   Ainsi, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $h'\big(g(\lambda)\big) \neq 0$. De plus, h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I en tant que différence de telles fonctions donc g (la réciproque de h) est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

3) h est strictement croissante sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $\lim\limits_{-\pi/2} h = -\infty$ et $\lim\limits_{\pi/2} h = +\infty$ donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{-\infty} g = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{+\infty} g = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 3 *Grands théorèmes*

1) f est dérivable donc continue sur le segment $[0,1]$ donc elle est bornée et atteint ses bornes.

   Ainsi, f admet un minimum atteint en $c \in [0,1]$. Alors, $f(c) \leq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$. Or, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(0)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(1)$, donc $f(c) < f(0)$ et $f(c) < f(1)$, et ainsi $c \in\,]0,1[$ et donc $f'(c) = 0$.

2) Posons $g(x) = f(x) - x$. Comme f admet deux points fixes dans I (notons-les a et b avec $a < b$), g s'annule en a et b. g est dérivable (donc continue) sur $[a,b]$ en tant que différence de telles fonctions et $g(a) = g(b) = 0$, donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in\,]a,b[\subset I$ tel que $g'(c) = 0$, soit $f'(c) = 1$. Ainsi, $\mathscr{C}$ admet une tangente de pente 1, c'est-à-dire parallèle à la première bissectrice.

   Pour montrer que la réciproque est fausse, prenons $f(x) = x^2 + 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

   Donc, $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$ et la courbe de f admet une tangente parallèle à la première bissectrice.

   Mais, $f(x) = x$ revient à $x^2 - x + 1 = 0$ qui n'a pas de solution réelle, donc f n'admet pas de point fixe.

Chapitre 8 - Fonctions numériques - Primitives - Entrainement

Exercice 1 *Calculs d'intégrales*

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x+1}{x^2+4x+4}dx$ b. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{4t-5}{t^2+t+2}dt$ c. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$ d. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{ch} t}{1+\operatorname{ch} t}dt$

e. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin(7u)\cos(5u)\,du$ f. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^7 u \cos^5 u\,du$ g. $\displaystyle\int_0^1 e^{e^t+t}dt$ h. $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$

i. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$ j. $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 3} \operatorname{ch} t \ln(1+\operatorname{ch} t)dt$

Exercice 2 *Fonction définie par une intégrale*

Etudier la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\operatorname{sh} t}{t}dt$.

Indications

Exercice 1 *Calculs d'intégrales*

a. $x^2+4x+4=(x+2)^2$; décomposition en éléments simples.

b. t^2+t+2 n'a pas de racines réelles ; décomposition en éléments simples.

c. Changement de variable : $u=\cos t$.

d. Revenir à la définition de ch ; Changement de variable : $u=e^t$.

e. Formule $\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+b)+\sin(a-b)\big)$.

f. Linéariser $\sin^7 u\cos^5 u$.

g. Primitive de $u'u$.

h. Intégration par parties.

i. $x^2=1-(1-x^2)$ puis intégration par parties pour retomber sur l'intégrale initiale.

j. Intégration par parties, puis utiliser $\mathrm{ch}^2 t-\mathrm{sh}^2 t=1$.

Exercice 2 *Fonction définie par une intégrale*

Poser $g(x)=\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{x}$, prolonger g par continuité. Noter G une primitive de g. Suivre les étapes d'étude.

- Attention au domaine d'étude ($u=-t$ dans l'intégrale…).
- Pour la limite en $+\infty$, remarquer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{x}=+\infty$.
- Ne pas oublier de tracer l'allure de la courbe.

Réponses

Exercice 1 *Calculs d'intégrales*

a. $\frac{3}{2}-3\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

b. $2\ln 2-2\sqrt{7}\left(\arctan\left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)+\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)\right)$.

c. $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$.

d. $\ln 2-\frac{1}{3}$.

e. $\frac{1}{3}$.

f. $\frac{11}{3840}$.

g. e^e-e.

h. $\ln 2-2+\frac{\pi}{2}$.

i. $\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}$.

j. $\frac{9}{2}\ln 2-\frac{11}{6}\ln 3-\frac{7}{12}$.

Exercice 2 *Fonction définie par une intégrale*

Poser $g(x)=\frac{\operatorname{sh} x}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$ et $g(0)=1$. g est alors continue sur $\mathbb{R}$. Soit G une primitive de g.

- On a $f(x)=G(2x)-G(x)$ et comme G est définie sur $\mathbb{R}$, f aussi.
- $f(0)=0=-f(0)$, $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$, $-x\in\mathbb{R}^*$ et :

$$f(-x)=\int_{-x}^{-2x}\frac{\operatorname{sh} t}{t}\,dt \underset{u=-t}{=} \int_{x}^{2x}\frac{\operatorname{sh}(-u)}{-u}(-du)=-\int_{x}^{2x}\frac{\operatorname{sh} u}{u}\,du=-f(x).$$

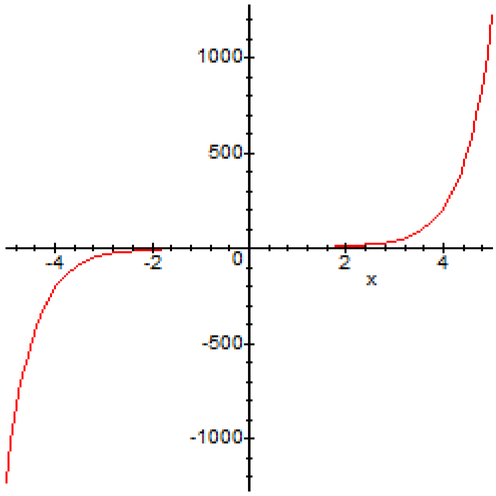
  Donc, f est impaire.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que différence de telles fonctions et $\forall\, x\in\mathbb{R}^*$:

$$f'(x)=2g(2x)-g(x)=\frac{\operatorname{sh}(2x)-\operatorname{sh} x}{x}.$$

- $\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*$, $2x>x>0$ donc $\operatorname{sh}(2x)>\operatorname{sh} x$ et $f'(x)>0$. f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc sur $\mathbb{R}$ par imparité.

- On a $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}=+\infty$, donc $\exists A\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall x\geq A$, $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}\geq 1$.
- Alors $\forall x\geq A$, on a $A\leq x\leq 2x$ donc $f(x)\geq\int_x^{2x}dt=x$ et ainsi, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- Par imparité, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.
- On obtient la courbe :



Chapitre 9 - Equations Différentielles - Entrainement

Exercice 1 *1^er^ ordre*

Résoudre sur l'intervalle I donné :

a) $y'+t^2y=t^2$ avec $y(0)=0$ (sur $I=\mathbb{R}$).

b) $y'+y=\dfrac{1}{1+e^t}$ (sur $I=\mathbb{R}$).

c) $(1+t)y'-ty+1=0$ (sur $I=]-1;+\infty[$).

d) $y'+(\tan t)\,y=\sin(2t)+\cos t$ (sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$).

e) $(1+t^2)y'-ty=(1+t^2)^{3/2}$ avec $y'(1)=0$ (sur $I=\mathbb{R}$).

Exercice 2 *1^er^ ordre avec raccordement*

a) $ty'-y=\ln(1+t^2)$.

b) $ty'+y=te^t$. On donne $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t-1-t}{t^2}=\dfrac{1}{2}$.

Exercice 3 *2^ème^ ordre*

Résoudre :

a) $y''+2y'+y=e^{3t}+2e^{-t}$.

b) $y''-3y'+2y=e^t+\sin t$ avec $y(0)=y'(0)=0$

c) $y''-3y'+2y=e^t\sin t$.

d) $y''+y=\cos t+\sin t$ avec $y(0)=y(1)=0$.

e) $y''+y=t\sin t$.

f) $y''+2(1+i)y'+(3-2i)y=(1-i)e^{-3it}$.

Indications

Exercice 1 *1^er^ ordre*

Equations standards. Ne pas oublier la condition initiale s'il y en a une.

Exercice 2 *1^er^ ordre avec raccordement*

Dans les deux cas, chercher les solutions $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$, puis tenter de raccorder en 0 en une fonction continue et dérivable en 0.

Exercice 3 *2^ème^ ordre*

Idem. Sauf pour la e, où il faut chercher une solution particulière de $y''+y=te^{it}$ de la forme $t \mapsto P(t)e^{it}$ avec P fonction polynôme de degré 2 et à coefficients complexes.

Réponses

Exercice 1 *1^er^ ordre*

a) $t \mapsto 1 - e^{-\frac{1}{3}t^3}$.

b) $t \mapsto e^{-t}\ln(1+e^t) + ke^{-t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

c) $t \mapsto \dfrac{1+ke^t}{1+t}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

d) $t \mapsto t\cos t - 2\cos^2 t + k\cos t$ avec $k \in \mathbb{R}$.

e) $t \mapsto (t-3)\sqrt{1+t^2}$.

Exercice 2 *1^er^ ordre avec raccordement*

a) $t \mapsto 2t\arctan t - \ln(1+t^2) + kt$ sur $\mathbb{R}$ tout entier avec $k \in \mathbb{R}$.

b) $t \mapsto \dfrac{te^t - e^t + k}{t}$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$. $t \mapsto \dfrac{te^t - e^t + 1}{t}$ prolongée sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 *2^ème^ ordre*

a) $t \mapsto (t^2 + \lambda t + \mu)e^{-t} + \dfrac{1}{16}e^{3t}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

b) $t \mapsto \dfrac{3}{10}\cos t + \dfrac{1}{10}\sin t - \left(t + \dfrac{3}{2}\right)e^t + \dfrac{6}{5}e^{2t}$.

c) $t \mapsto \dfrac{1}{2}e^t(\cos t - \sin t) + \lambda e^t + \mu e^{2t}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

d) $t \mapsto \dfrac{1}{2}\left(t + \dfrac{\cos 1 - \sin 1}{\sin 1}\right)\sin t - \dfrac{1}{2}t\cos t$.

e) $t \mapsto \dfrac{1}{4}(t\sin t - t^2\cos t) + \lambda\cos t + \mu\sin t$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

f) $t \mapsto \lambda e^{it} + \mu e^{-(2+3i)t} + \dfrac{1+i}{8}e^{-3it}$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$.

Chapitre 10 - Suites numériques - Entrainement

Exercice 1 *Etude de suite*

Dans chaque cas, étudier la suite u définie par :

a. $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_n=\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$.

b. $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

c. $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\left(\dfrac{n}{2}\right)^n\dfrac{1}{n!}$.

d. $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n+k}$.

Exercice 2 *Une propriété des suites convergentes*

On dit qu'une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy si pour tout réel $\varepsilon>0$, il existe un entier N tel que $\forall\,(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n\geq N$ et $p\geq N$, on a $|u_n-u_p|\leq\varepsilon$. Montrer qu'une suite réelle convergente est une suite de Cauchy.

Exercice 3 *Suites adjacentes*

On définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n}$.

Montrer que u et v sont adjacentes. En déduire que u converge.

Exercice 4 *Suites implicites*

Dans chacun des deux cas suivants, montrer que, $n\in\mathbb{N}^*$, l'équation admet une unique solution réelle positive que l'on notera x_n, puis étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

a. $x^n+x=1$.

b. $x^n+nx=1$.

Exercice 5 *Suites récurrentes d'ordre 1*

a. $u_0=\ln 2$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\ln(\mathrm{ch}\, u_n)$.

b. $u_0=1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=2\arctan u_n$.

c. $u_0=0$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\ln(1+e^{-u_n})$.

Exercice 6 *Suites usuelles*

Dans chaque cas, exprimer u_n en fonction de n et étudier la suite u définie par :

a. $u_0=1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{u_n+1}$.

b. $u_0=0$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n-2$.

c. $u_0=u_1=1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}+u_n$.

d. $u_0=0,\ u_1=1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2u_{n+1}-2u_n$.

e. $u_0=0,\ u_1=1$ et $\forall\, n\in\mathbb{N},\ 4u_{n+2}=4u_{n+1}-u_n$.

Indications

Exercice 1 *Etude de suite*

a. Pour les variations, l'écriture de $u_{n+1}-u_n$ se simplifie beaucoup, pour la limite, factoriser le numérateur et le dénominateur par le terme prépondérant.

b. Le taux d'accroissement est simple. Pour la limite, comparer chaque terme de la somme au dernier terme de cette somme.

c. Remarquer que u est à termes strictement positifs.

Pour les variations, calculer $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, poser $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ et étudier cette fonction sur $[1,+\infty[$ (attention il faut dériver deux fois).

Pour la limite, montrer que $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\geq\ln\left(\frac{9}{4}\right)-\ln 2$ (à l'aide de la fonction précédente), puis minorer u_n avec un télescopage.

d. Attention, le taux d'accroissement est un peu délicat. Commencer par bien écrire u_{n+1} , réindexer la somme $(k'=k+1)$, puis simplifier des termes dans $u_{n+1}-u_n$.

Pour la limite, même technique qu'au b.

Exercice 2 *Une propriété des suites convergentes*

Ecrire la définition de la convergence de u vers une limite ℓ et remarquer que $|u_n-u_p|=|u_n-\ell+\ell-u_p|$.

Exercice 3 *Suites adjacentes*

Simple. Revenir à la définition et au théorème des suites adjacentes.

Exercice 4 *Suites implicites*

S'inspirer des exemples de cours et des TD.

a. Ici, on peut écrire $x_n=g^{-1}(n)$ (avec g à préciser). L'étude de la suite est alors immédiate.

b. Ce n'est pas la même chose ici. Poser $f_n(x)=x^n+nx$ et comparer $f_{n+1}(x_n)$ à $1=f_{n+1}(x_{n+1})$ (sachant que $x_n{}^n+nx_n=1$) pour étudier les variations de la suite. Pour la limite, on pourra raisonner par l'absurde en supposant que la suite converge vers une limite non nulle.

Exercice 5 *Suites récurrentes d'ordre 1*

Exercices classiques. A chaque fois, préciser f dans $u_{n+1}=f(u_n)$. Attention, c'est un peu plus délicat quand f est décroissante.

Exercice 6 *Suites usuelles*

a. Montrer que u_n n'est jamais nul, puis considérer 1/u.

b. Suite arithmético-géométrique classique.

c. d. et e. Suites récurrentes linéaires doubles classiques.

Réponses

Exercice 1 *Etude de suite*

a. On a :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3^n 2^{n+1}}{(3^{n+1}+2^{n+1})(3^n+2^n)} > 0$. La suite est strictement croissante.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-(2/3)^n}{1+(2/3)^n} = 1$.

b. On a :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} > 0$. La suite est strictement croissante.
- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{1}{\sqrt{k}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc $u_n \geq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$ et par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c. On a :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = f(n) - \ln 2$ avec $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.

  La fonction f est définie et deux fois dérivable sur $[1,+\infty[$ avec :

  $$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \text{ et } f''(x) = \frac{-1}{x(1+x)^2} < 0.$$

  f' est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$ et $\lim\limits_{+\infty} f' = 0$ donc $f'(x) > 0$.

  f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et $f(1) = \ln 2$ donc $f(x) \geq \ln 2$.

  La suite u est croissante.

- On a vu que f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Donc, $f(x) \geq f(2)$ sur $[2,+\infty[$.

  Alors $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) \geq \ln\left(\dfrac{9}{4}\right) - \ln 2$, soit $\forall\, n \geq 2$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq \dfrac{9}{8}$ et par télescopage, $u_n \geq u_2 \left(\dfrac{9}{8}\right)^{n-2}$.

  Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

d. On a :

- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \dfrac{n+1}{n+1+k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n+k} = \dfrac{5n+3}{2(n+1)(2n+1)} + \sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{n+k} > 0$.

  La suite est strictement croissante.

- $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, $\dfrac{n}{n+k} \geq \dfrac{1}{2}$ donc $u_n \geq \dfrac{n}{2}$. Par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 2 *Une propriété des suites convergentes*

Soit ℓ la limite de u. On a $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, n \geq N$, $|u_n - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ et $\forall\, p \geq N$, $|u_p - \ell| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Alors, $\forall\, (n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq N$ et $p \geq N$:

$$|u_n - u_p| = |u_n - \ell + \ell - u_p| \leq |u_n - \ell| + |u_p - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Donc u est une suite de Cauchy.

Exercice 3 *Suites adjacentes*

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^2} > 0$ et $v_{n+1} - v_n = \dfrac{-1}{n(n+1)^2} < 0$.

Donc u est strictement croissante et v est strictement décroissante.

On a de plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

Donc u et v sont adjacentes. Deux suites adjacentes convergent vers la même limite, donc u converge.

Exercice 4 *Suites implicites*

a. Remarquons que si x est une solution réelle positive de $x^n + x = 1$, alors $x \in]0,1[$ (car $0^n + 0 = 0 \neq 1$ et $\forall\, x \geq 1$, $x^n + x \geq 2$ donc $x^n + x \neq 1$). Or, $\forall\, x \in]0,1[$, $x^n + x = 1$ peut se récrire $g(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln x} = n$.

Remarquons que $x \mapsto -\ln(1-x)$ et $x \mapsto -\dfrac{1}{\ln x}$ sont toutes deux continues, strictement croissantes et strictement positives sur $]0,1[$, donc g l'est aussi (en tant que produit de telles fonctions).

De plus, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = +\infty$, donc g réalise une bijection de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, par g, tout $n \in \mathbb{N}^*$ admet un unique antécédent $x_n = g^{-1}(n)$ dans $]0,1[$, ce qui prouve que l'équation $x^n + x = 1$ admet une unique solution réelle positive $x_n = g^{-1}(n)$.

Comme g est strictement croissante sur $]0,1[$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ entier, g^{-1} est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g^{-1}(x) = 1$.

On en déduit immédiatement que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement croissante et converge vers 1.

b. Posons $f_n(x) = x^n + nx$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $f_n'(x) = n(x^{n-1} + 1) > 0$.

Ainsi, sur $\mathbb{R}_+$, f_n est continue (car dérivable) et strictement croissante de 0 à + ∞, donc f_n réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ et par f_n, 1 admet un unique antécédent x_n dans $\mathbb{R}_+$. Autrement dit, l'équation $x^n + nx = 1$ admet une unique solution réelle positive x_n.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n(0) = 0$ et $f_n(1) = n + 1 > 1$ donc $x_n \in]0,1[$.

Avec $x_n^n + nx_n = 1$, soit $nx_n = 1 - x_n^n$, on peut écrire :

$$f_{n+1}(x_n) - f_{n+1}(x_{n+1}) = f_{n+1}(x_n) - 1 = x_n^{n+1} + (n+1)x_n - 1 = x_n^{n+1} - x_n^n + x_n .$$

Comme $x_n \in]0,1[$, on a $x_n^{n+1} > 0$ et $x_n^n \leq x_n$, donc $f_{n+1}(x_{n+1}) < f_{n+1}(x_n)$. Comme f_{n+1} est strictement croissante, on obtient $x_{n+1} < x_n$.

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.

On a vu que la suite est minorée par 0 et majorée par 1, donc elle converge vers une limite $\ell \in [0,1[$.

Si $\ell > 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n^n + nx_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(e^{n\ln x_n} + nx_n) = +\infty$, ce qui est absurde puisque $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ x_n^n + nx_n = 1$.

Ainsi, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 5	*Suites récurrentes d'ordre 1*

a. Posons $f(x) = \ln(\operatorname{ch} x)$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que composée de fonctions continues et strictement croissantes) et à images dans $\mathbb{R}_+$. Comme $u_0 = \ln 2 \in \mathbb{R}_+$, la suite u est bien définie et positive.

De plus, $u_1 = f(u_0) = \ln\big(\operatorname{ch}(\ln 2)\big) = \ln\left(\dfrac{5}{4}\right) < \ln 2 = u_0$, donc (u_n) est strictement décroissante.

Comme la suite est positive, elle est minorée par 0 donc converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$.

Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+$, on a $f(\ell) = \ln(\operatorname{ch}\ell) = \ell$, soit $\dfrac{e^{\ell} + e^{-\ell}}{2} = e^{\ell}$, ce qui donne $\ell = 0$.

Donc, (u_n) converge vers 0.

b. Posons $f(x) = 2\arctan x$.

La fonction f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et à images dans $[0,\pi[$. Comme $u_0 = 1 \in [0,\pi[$, la suite u est bien définie et tous ses termes sont dans $[0,\pi[$.

On a $u_1 = 2\arctan u_0 = 2\arctan 1 = \dfrac{\pi}{2} > 1 = u_0$, donc (u_n) est strictement croissante.

Comme la suite est majorée par π (et minorée par $u_0 = 1$) et f est continue, (u_n) converge vers une limite $\ell \in [1,\pi]$ (avec telle que $f(\ell) = \ell$.

Posons $g(x) = f(x) - x$. g est dérivable sur $[1,\pi]$ et $g'(x) = \dfrac{(1+x)(1-x)}{1+x^2} \leq 0$ (ne s'annulant qu'en 1).

Donc, g est strictement décroissante sur $[1,\pi]$, de $g(1) = \dfrac{\pi}{2} - 1 > 0$ à $g(\pi) = 2\arctan\pi - \pi < 0$.

Comme g est continue (car dérivable) sur $[1,\pi]$, le théorème de la bijection assure l'existence d'un unique réel $\ell \in [1,\pi]$ tel que $g(\ell) = 0$, soit $f(\ell) = \ell$.

c. Posons $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$.

Sur $\mathbb{R}$, la fonction f est continue et strictement décroissante de $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ à $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

De plus, $u_0 = 0$, $u_1 = \ln 2$ et $u_2 = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) > u_0$, donc (u_{2n}) est strictement croissante et (u_{2n+1}) est strictement décroissante.

Comme f est à images dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $u_n > 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et comme $u_0 = 0$ et $f(\mathbb{R}_+) =]0, \ln 2]$, tous les termes de u sont dans $[0, \ln 2]$, donc la suite est bornée. Ainsi, les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et comme f est continue, leur(s) limite(s) sont fixe(s) par $f \circ f$.

Posons $\forall\, x \in [0, \ln 2]$, $g(x) = f \circ f(x) - x = \ln\left(\dfrac{2+e^{-x}}{1+e^{-x}}\right) - x$.

g est dérivable sur $[0, \ln 2]$ et $g'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})(2+e^{-x})} - 1 < 0$. Donc, g est strictement décroissante sur $[0, \ln 2]$, de $g(0) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right) > 0$ à $g(\ln 2) = \ln\left(\dfrac{5}{6}\right) < 0$.

Comme g est continue (car dérivable) sur $[1, \pi]$, le théorème de la bijection assure l'existence d'un unique réel $\ell \in [1, \pi]$ tel que $g(\ell) = 0$, soit $f \circ f(\ell) = \ell$.

Ainsi, (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite ℓ (l'unique point fixe de $f \circ f$), donc (u_{2n+1}) converge aussi vers ℓ.

Exercice 6	*Suites usuelles*

a. Si on pose $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, on a $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$ et comme $u_0 = 1 \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{1}{u_n} + 1$ donc $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est arithmétique de raison 1 et de 1er terme $\dfrac{1}{u_0} = 1$.

   On obtient $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ et u décroit strictement vers 0.

b. On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{4}{2^n} - 4$ et u décroit strictement vers – 4.

c. L'équation caractéristique admet 2 racines réelles distinctes ($1-\sqrt{2}$ et $1+\sqrt{2}$), d'où (avec les deux premiers termes), on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(1-\sqrt{2})^n + (1+\sqrt{2})^n}{2}$

   Une récurrence double immédiate permet de montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

   Alors, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} + u_n > 0$ donc u croît strictement à partir du rang 1 et $\lim u_n = +\infty$.

d. L'équation caractéristique admet 2 racines complexes conjuguées ($1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$), d'où (avec les deux premiers termes), on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2}^{\,n} \sin\left(n\dfrac{\pi}{4}\right)$.

   $\forall\, p \in \mathbb{N}$, $u_{4p} = 0$, $u_{4p+1} = (-4)^p$ et $u_{4p+2} = u_{4p+3} = 2(-4)^p$ donc u n'est pas monotone et n'admet pas de limite.

e. L'équation caractéristique admet une racine double (1/2), d'où (avec les deux premiers termes), on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$. u croît strictement à partir du rang 2 et $\lim u_n = 0$.

Chapitre 11 - Analyse asymptotique - Entrainement

Exercice 1 *Comparaisons*

1) Simplifier :

$$\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ln x\right) \qquad \underset{0^+}{o}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ln x\right) \qquad \underset{+\infty}{o}\left(x^2\right)-\underset{+\infty}{o}\left(x^4\right) \qquad \underset{0}{o}\left(x^2\right)-\underset{0}{o}\left(x^4\right).$$

2) Comparer en termes de négligeabilité/équivalence les trois fonctions suivantes en 0, puis en + ∞ :

$$x \mapsto e^{2x} \qquad x \mapsto [\ln(1+x)]^x \qquad x \mapsto x^{\ln x}.$$

Exercice 2 *Equivalents simples de fonctions*

Dans chaque cas, donner l'équivalent le plus simple possible de f(x) :

a. $f(x)=e^{3x}+e^{2x}+e^x$ en 0, puis en – ∞.

b. $f(x)=x^x-1$ en 0, puis en + ∞.

c. $f(x)=\dfrac{\tan x}{\cos x-1}$ en 0, puis en $\dfrac{\pi}{2}$.

d. $f(x)=\sqrt{\ln(1+e^{-x})}$ en + ∞.

e. $f(x)=x^{x^x}$ en 0.

Exercice 3 *Equivalents simples de suites*

1) Déterminer un équivalent très simple en + ∞ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'exercice 4.b. de la feuille d'entrainement du chapitre précédent (où x_n est l'unique solution réelle positive de $x^n+nx=1$).

2) On pose $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$ (cette suite a été étudiée dans la feuille d'entrainement du chapitre précédent).

   a. Prouver par récurrence que $\forall\, n\in\mathbb{N}^*,\ 2\sqrt{n+1}-2\le u_n\le 2\sqrt{n}-1$.

   b. En déduire un équivalent très simple de u_n en + ∞.

Exercice 4 *Formules de Taylor*

1) Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}$ et $\forall\, x\in\mathbb{R}_+$, $\left|e^x-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right|\le e^x\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$, puis en déduire que $e=\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

2) Soit $f\in\mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f'(a)=f'(b)=0$. Montrer que $|f(a)-f(b)|\le\dfrac{(b-a)^2}{4}\max\limits_{[a,b]}|f''|$.

Exercice 5 *Développements limités*

Déterminer le développement limité à l'ordre n et au point a des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$, $a = 0$ et $n = 3$.

b. $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{1 - \cos x}$, $a = 0$ et $n = 3$.

c. $f(x) = \sin^3 x$, $a = 0$ et $n = 6$.

d. $f(x) = \ln x$, $a = 2$ et $n = 4$.

e. $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x - 1}$, $a = 1$ et $n = 3$.

f. $f(x) = \sin 2x \cos x$, $a = \dfrac{\pi}{4}$ et $n = 3$.

g. $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{\operatorname{ch} x}\right)$, $a = 0$ et $n = 3$.

h. $f(x) = \sqrt{1 + \sin x}$, $a = 0$ et $n = 3$.

i. $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{xe^x + \cos x - 2}$, $a = 0$ et $n = 3$.

j. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}$, $a = 1$ et $n = 3$.

Exercice 6 *Limites*

Calculer les limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - \operatorname{sh} x}{x(\cos x - \operatorname{ch} x)}$

b. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]^{x^2}$

c. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$

d. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1) - \ln(x+2)}{\sin\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)}$

e. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1) - \ln(x+2)}{\sin\left(\dfrac{x+1}{x^2+1}\right)}$

f. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sin(\pi x)}{\ln x}$

Exercice 7 *Développements asymptotiques*

Donner les trois premiers termes du développement asymptotique des fonctions suivantes :

a. $f : x \mapsto \sqrt{x^3 + x}$ en $+\infty$.

b. $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ en $+\infty$.

c. $f : x \mapsto e^{\frac{1}{x}} \ln(e^x - 1)$ en 0.

Indications

Exercice 1 *Comparaisons*

1) Utiliser :
   - Si $f \sim g$ et $h = o(f)$, alors $h = o(g)$ pour les deux premiers.
   - $o\big(f + o(f)\big) = o(f)$ pour les deux autres.
2) Passer aux exponentielles dans toutes les expressions, puis étudier les limites des rapports en 0 et $+\infty$.

Exercice 2 *Equivalents simples de fonctions*

Dans chaque cas, conjecturer un équivalent simple puis calculer la limite du rapport entre f(x) et cet équivalent simple.

a. Estimer l'ordre de grandeur de chaque terme.

b. Idem en passant à l'exponentielle.

c. Trouver un équivalent du numérateur et du dénominateur. En $\frac{\pi}{2}$, poser $x = \frac{\pi}{2} + h$ pour se ramener à des résultats connus en 0.

d. $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$.

e. Ecrire $f(x) = e^{(\ln x)e^{x \ln x}} = x e^{(\ln x)(e^{x \ln x} - 1)}$.

Exercice 3 *Equivalents simples de suites*

1) D'après l'exercice 4.b. de la feuille d'entrainement du chapitre précédent $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$. Evaluer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n{}^n$, sachant que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ n x_n = 1 - x_n{}^n$.

2) a. Pour l'hérédité, comparer $2\sqrt{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et $2\sqrt{n+2}$, puis $2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ et $2\sqrt{n+1}$ en étudiant le signe de la différence. Penser aux expressions conjuguées.

   b. Avec l'encadrement établi, un équivalent simple saute aux yeux…

Exercice 4 *Formules de Taylor*

1) $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, utiliser l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n entre 0 et x pour la fonction exponentielle. Ensuite, prendre $x = 1$.
2) Utilisons deux fois la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 : une fois entre a et b et une fois entre b et a.

Exercice 5 *Développements limités*

a. Ecrire $f(x)=\ln(1+x^2)-\ln(1+x)$.

b. Pousser les DL du numérateur et du dénominateur à l'ordre 5.

c. Linéariser.

d. Poser $x=2+h$, puis écrire $f(2+h)=\ln 2+\ln\left(1+\frac{h}{2}\right)$. On peut aussi évaluer les dérivées successives en 2.

e. Poser $x=1+h$. Attention, un h se simplifie donc il faut pousser le DL initial à l'ordre 4.

f. Poser $x=\frac{\pi}{4}+h$. Puis transformer $\cos\left(\frac{\pi}{4}+h\right)$.
On peut aussi utiliser directement la formule donnant $\sin a\cos b$, puis calculer les dérivées successives en $\frac{\pi}{4}$.

g. Standard : quotient puis composition.

h. Standard : composition.

i. Classique : quotient, mais attention des x simplifient, il faut donc pousser les DL initiaux plus loin qu'à l'ordre 3.

j. Poser $x=1+h$, puis quotient.

Exercice 6 *Limites*

a. Déterminer un équivalent simple en 0 du numérateur et du dénominateur.

b. Poser $h=\frac{1}{x}$ pour se ramener à une limite en 0, puis passer aux exponentielles.

c. Passer aux exponentielles, duis déterminer un équivalent simple en 0 du numérateur et du dénominateur dans l'exposant.

d. Ha ha ha…

e. $h=\frac{1}{x}$ pour se ramener en 0, et déterminer un équivalent simple en 0 du numérateur et du dénominateur.

f. Poser $x=1+h$ pour se ramener à une limite en 0, puis déterminer un équivalent simple en 0 du numérateur et du dénominateur. On peut aussi multiplier haut et bas par $x-1$ et reconnaitre un taux d'accroissement au numérateur et une limite connue (aussi un taux d'accroissement) au dénominateur.

Exercice 7 *Développements asymptotiques*

a. Forcer la factorisation par x^3 dans la racine, puis poser $h=\frac{1}{x}$ pour se ramener en 0. Ne pas oublier alors de revenir en x.

b. Poser $h=\frac{1}{x}$ pour se ramener en 0, utiliser $\arctan\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan a$ pour $a>0$, puis établir un DL à l'ordre 2 de arctan en 1 (avec les dérivées successives).

c. On ne peut pas faire plus simple que $e^{\frac{1}{x}}$. Il s'agit donc de trouver un développement asymptotique de $\ln(e^x-1)$. Pour cela, utiliser le DL de e^x-1, factoriser par x, puis utiliser $\ln ab=\ln a+\ln b$ et le DL de $\ln(1+h)$ en 0.

Réponses

Exercice 1 *Comparaisons*

1) $\underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ln x\right)=\underset{+\infty}{o}(\ln x)$ $\qquad$ $\underset{0^+}{o}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\ln x\right)=\underset{0^+}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$\underset{+\infty}{o}(x^2)-\underset{+\infty}{o}(x^4)=\underset{+\infty}{o}(x^4)$ $\qquad$ $\underset{0}{o}(x^2)-\underset{0}{o}(x^4)=\underset{0}{o}(x^2)$

2) $x^{\ln x}=\underset{+\infty}{o}(e^{2x})$ $\qquad$ $e^{2x}=\underset{+\infty}{o}\left([\ln(1+x)]^x\right)$

$e^{2x}\underset{0}{\sim}[\ln(1+x)]^x\underset{0}{\sim}1$ $\qquad$ $e^{2x}=\underset{0}{o}\left(x^{\ln x}\right)$

Exercice 2 *Equivalents simples de fonctions*

a. $f(x)\underset{0}{\sim}3$ et $f(x)\underset{-\infty}{\sim}e^x$.

b. $f(x)\underset{0}{\sim}x\ln x$ et $f(x)\underset{+\infty}{\sim}x^x$.

c. $f(x)\underset{0}{\sim}-\frac{2}{x}$ et $f(x)\underset{\frac{\pi}{2}}{\sim}\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}$.

d. $f(x)\underset{+\infty}{\sim}e^{-\frac{x}{2}}$.

e. $f(x)\underset{0}{\sim}x$.

Exercice 3 *Equivalents simples de suites*

1) Dans le corrigé de l'exercice 4.b. de la feuille d'entrainement du chapitre précédent, on a montré que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Or, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $nx_n=1-x_n{}^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n{}^n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{n\ln x_n}=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n=1$, soit $x_n\sim\frac{1}{n}$.

2) a. On a $2\sqrt{1+1}-2\approx 0,83$, $u_1=1$ et $2\sqrt{1}-1=1$, donc $2\sqrt{1}-2\le u_1\le 2\sqrt{1}-1$ et la propriété est vraie au rang 1.

Supposons la propriété vraie à un rang $n\in\mathbb{N}^*$. Alors, comme $u_{n+1}=\sum\limits_{k=1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{k}}=u_n+\frac{1}{\sqrt{n+1}}$, on a par hypothèse de récurrence :

$$2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}\le u_{n+1}\le 2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Or :

- $2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}=\frac{1}{(2n+3+2\sqrt{(n+2)(n+1)})\sqrt{n+1}}>0\ \Rightarrow\ 2\sqrt{n+2}-2<2\sqrt{n+1}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2$.
- $2\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}<0\ \Rightarrow\ 2\sqrt{n}-1+\frac{1}{\sqrt{n+1}}<2\sqrt{n+1}-1$.

Donc $2\sqrt{n+2}-2\le u_{n+1}\le 2\sqrt{n+1}-1$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Finalement la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$.

b. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{u_n}{2\sqrt{n}} \leq 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}$. Grace au théorème des gendarmes, ceci implique que $\frac{u_n}{2\sqrt{n}} \to 1$ et donc que $u_n \sim 2\sqrt{n}$.

Exercice 4 *Formules de Taylor*

3) La fonction exponentielle est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, on a $\exp^{(k)}(x) = e^x$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\max\limits_{[0,x]} |\exp^{(k)}| = e^x$, donc, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on peut écrire $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} e^0 \right| \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \max\limits_{[0,x]} |\exp^{(k)}|$, soit :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq e^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour $x = 1 \in \mathbb{R}_+$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| \leq \frac{e}{(n+1)!}$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e}{(n+1)!} = 0$, on obtient :

$$e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$

4) Utilisons deux fois la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2 :

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b (b-t) f''(t)\,dt$$

$$f(a) = f(b) + f'(b)(a-b) + \int_b^a (a-t) f''(t)\,dt$$

Avec $f'(a) = f'(b) = 0$, on obtient :

$$f(b) - f(a) = \int_a^b (b-t) f''(t)\,dt = -\int_b^a (a-t) f''(t)\,dt = \int_a^b (a-t) f''(t)\,dt.$$

Alors :

$$2\left[f(b) - f(a)\right] = \int_a^b (b-t) f''(t)\,dt + \int_a^b (a-t) f''(t)\,dt.$$

D'où :

$$|f(b) - f(a)| = \frac{1}{2}\left|\int_a^b (a+b-2t) f''(t)\,dt\right| \leq \int_a^b \left|\frac{a+b}{2} - t\right| |f''(t)|\,dt.$$

$\max\limits_{[a,b]} |f''|$ existe car f'' est continue sur le segment $[a,b]$ et on a :

$$|f(b) - f(a)| \leq \max_{[a,b]} |f''| \int_a^b \left|\frac{a+b}{2} - t\right| dt.$$

Or, $\int_a^b \left|\frac{a+b}{2} - t\right| dt = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - t\right) dt + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) dt = \frac{(b-a)^2}{4}$, donc on a bien :

$$|f(a) - f(b)| \leq \frac{(b-a)^2}{4} \max_{[a,b]} |f''|.$$

Exercice 5 *Développements limités*

a. $f(x) = -x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \underset{0}{o}(x^3)$.

b. $f(x) = \dfrac{x}{3} + \dfrac{x^3}{90} + \underset{0}{o}(x^3)$.

c. $f(x) = x^3 - \dfrac{x^5}{2} + \underset{0}{o}(x^6)$.

d. $f(x) = \ln 2 + \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{8} + \dfrac{(x-2)^3}{24} - \dfrac{(x-2)^4}{64} + \underset{2}{o}\left((x-2)^4\right)$.

e. $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}(x-1) - \dfrac{1}{6}(x-1)^2 + \dfrac{1}{12}(x-1)^3 + \underset{1}{o}\left((x-1)^3\right)$.

f. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 + \dfrac{13\sqrt{2}}{12}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \underset{\frac{\pi}{4}}{o}\left(\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3\right)$.

g. $f(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \underset{0}{o}(x^3)$.

h. $f(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{48} + \underset{0}{o}(x^3)$.

i. $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{17}{45}x^3 + \underset{0}{o}(x^3)$.

j. $f(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8}(x-1)^2 - \dfrac{1}{8}(x-1)^3 + \underset{1}{o}\left((x-1)^3\right)$.

Exercice 6 *Limites*

a. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \operatorname{sh} x}{x(\cos x - \operatorname{ch} x)} = \frac{1}{3}$

b. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{x^2} = e^{-\frac{1}{6}}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^{\frac{1}{e^x - 1}} = \sqrt{e}$

d. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - \ln(x+2)}{\sin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)} = -\frac{\ln 2}{\sin 1}$

e. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x+2)}{\sin\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right)} = -1$

f. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x} = -\pi$

Exercice 7 *Développements asymptotiques*

a. $f(x) = x\sqrt{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{2} - \dfrac{1}{8\sqrt{x}} + \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

b. $f(x) = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{4x^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

c. $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \ln x + \dfrac{1}{2} x e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{24} x^2 e^{\frac{1}{x}} + \underset{0}{o}(x^2 e^{\frac{1}{x}})$.

Chapitre 12 - Intégration - Entrainement

Exercice 1 *Inégalités*

1) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leq \int_0^1 f^2$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$. Montrer que $\left|\int_0^1 f\right| \leq \frac{1}{2}\sup_{[0,1]}|f'|$.

3) Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$. Montrer que $\sqrt{1+\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2} \leq \int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)}\,dt \leq 1+\int_0^1 f(t)dt$.

4) Soit $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ telle que $f(a)=0$ et $\forall\, t\in[a,b],\ 0\leq f'(t)\leq 1$. Comparer $\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2$ et $\int_a^b (f(t))^3\,dt$.

   ☺ *On introduira* $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $G(x)=\int_a^x (f(t))^3\,dt$ *et* $H=F^2-G$.

Exercice 2 *Suite d'intégrales*

Etudier la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^1 \frac{e^{-nt}}{1+t}dt$.

Exercice 3 *Intégration par parties, formule de Taylor avec reste intégral*

1) Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\int_a^b f(t)\,dt=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2}f''(t)\,dt$.

2) Soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $g: x\mapsto \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$ et que $g^{(n+1)}=f$.

3) Montrer que $\forall\, n\in\mathbb{N}$ et $\forall\, x\in\mathbb{R}_+$, $\left|\ln(1+x)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exercice 4 *Calculs*

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt$ b. $\int_0^1 \frac{x^4-x^2+1}{x^2-x-2}dx$ c. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t+\sin(2t)}{1+\sin^2 t}dt$ d. $\int_0^1 t\ln(1+t^2)dt$ e. $\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-x+2}dx$

Exercice 5 *Sommes de Riemann*

Calculer la limite et donner un équivalent simple de u_n dans chacun des cas suivants :

a. $u_n=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(2n-k)}$. b. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+n^2}$. c. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{4n^2-k^2}}$. d. $u_n=\prod_{k=1}^{n}e^{\sqrt{k}}$.

e. $u_n=\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ (on pourra utiliser l'encadrement $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x$ pour $x\geq 0$).

On ne cherchera pas d'équivalent simple pour le d.

Indications

Exercice 1 *Inégalités*

1) Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à f et une fonction g simple.

2) Appliquer l'inégalité des accroissements finis à f entre 0 et $t \in]0,1]$, puis intégrer.

3) Exercice plus délicat. Faire les deux inégalités séparément.

- Evaluer $\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)}\,dt - \int_0^1 f(t)dt - 1$ à l'aide d'une seule intégrale, puis utiliser la quantité conjuguée.
- Evaluer $\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 - \left(\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)}\,dt\right)^2$ à l'aide d'un produit de deux intégrales, puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec les fonctions $\sqrt{\sqrt{1+f^2}-f}$ et $\sqrt{\sqrt{1+f^2}+f}$ (en justifiant que l'on peut !).

4) Remarquer que comparer $\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2$ et $\int_a^b (f(t))^3\,dt$ revient à déterminer le signe de $H(b)$. Puis, étudier la fonction H en introduisant une fonction auxiliaire pour étudier le signe de la dérivée de H (on doit montrer que H est croissante).

Exercice 2 *Suite d'intégrales*

Pour le sens de variation, écrire $I_{n+1} - I_n$ sous la forme d'une seule intégrale, puis remarquer que $\forall\, t \in]0;1]$, $\frac{e^{-nt}}{1+t}(e^{-t}-1) < 0$. Pour la limite, remarquer que $\forall\, t \in [0;1]$, $0 \le \frac{1}{1+t} \le 1$.

Exercice 3 *Intégration par parties, formule de Taylor avec reste intégral*

1) Calculer $\int_a^b f(t)\,dt$ en faisant deux intégrations par parties.

2) Poser $F_0 = f$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} : x \mapsto \int_a^x F_n(t)dt$, puis, appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à la fonction F_{n+1}.

3) Considérer $f : x \mapsto \ln(1+x)$ et appliquer à f la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n entre 0 et $x \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 4 *Calculs*

a. Linéariser $\sin^4 t$.

b. Décomposer $\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 - x - 2}$ en éléments simples (le dénominateur admet deux racines réelles).

c. Remarquer que $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$, puis poser $u = \sin t$.

d. Soit intégrer par parties (pour se débarrasser du ln), soit poser $u = t^2$.

e. Décomposer $\frac{x^2+1}{x^2 - x + 2}$ en éléments simples (le dénominateur n'admet pas de racine réelle).

Exercice 5 *Sommes de Riemann*

Dans chaque cas, il s'agit de faire apparaitre une somme de Riemann $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec f bien choisie.

a. $f(t) = \sqrt{2t - t^2}$. Pour calculer $\int_0^1 f(t)dt$, poser $u = 1 - t$, puis $u = \sin x$.

b. $f(t) = \frac{1}{1+t^2}$ et $u_n = \frac{v_n}{n}$.

c. $f(t) = \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}$ et $u_n = n v_n$.

d. Il faut bien sûr passer au logarithme ($\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$). $f(t) = \sqrt{t}$ et $\ln u_n = n\sqrt{n}\ v_n$.

e. Il faut encadrer u_n à l'aide des inégalités données dans l'énoncé, puis introduire deux fonctions : $f(t) = t$ et $g(t) = t^3$, et deux sommes de Riemann.

Réponses

Exercice 1 *Inégalités*

1) En posant $g: t \mapsto 1$, f et g sont continues sur $[0,1]$. On peut donc appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 fg\right)^2 \le \left(\int_0^1 f^2\right)\left(\int_0^1 g^2\right).$$

Comme $\int_0^1 g^2 = \int_0^1 dt = 1$, on a immédiatement $\left(\int_0^1 f\right)^2 \le \int_0^1 f^2$.

2) f est C^1 sur $[0,1]$ donc $M = \sup\limits_{[0,1]}|f'|$ existe. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a, avec $f(0)=0$:

$$\forall\, t \in\,]0,1],\ \left|\frac{f(t)-f(0)}{t}\right| = \frac{|f(t)|}{t} \le M \ \Rightarrow\ \forall\, t \in [0,1],\ f(t) \le Mt.$$

Alors, $\left|\int_0^1 f(t)dt\right| \le \int_0^1 |f(t)|\,dt \le \int_0^1 Mtdt$ et avec $\int_0^1 Mtdt = \left[M\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}M = \frac{1}{2}\sup\limits_{[0,1]}|f'|$, on obtient $\left|\int_0^1 f\right| \le \frac{1}{2}\sup\limits_{[0,1]}|f'|$.

3) On a d'une part :

$$\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)}\,dt - \int_0^1 f(t)dt - 1 = \int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)}\,dt - \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 dt = \int_0^1 \left[\sqrt{1+f^2(t)} - \left(f(t)+1\right)\right]dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1+f^2(t)-\left(f(t)+1\right)^2}{\sqrt{1+f^2(t)}+f(t)+1}\,dt = -2\int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{1+f^2(t)}+f(t)+1}\,dt$$

Comme $f(t) \ge 0$, on obtient $\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)}\,dt - \int_0^1 f(t)dt - 1 \le 0$, soit:

$$\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)}\,dt \le 1 + \int_0^1 f(t)dt.$$

D'autre part :

$$\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2 - \left(\int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)}\,dt\right)^2 = \left(\int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)}\,dt\right)\left(\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 \sqrt{1+f^2(t)}\,dt\right)$$

$$= -\left(\int_0^1 \left[\sqrt{1+f^2(t)} - f(t)\right]dt\right)\left(\int_0^1 \left[\sqrt{1+f^2(t)} + f(t)\right]dt\right)$$

Les fonctions $\sqrt{\sqrt{1+f^2} - f}$ et $\sqrt{\sqrt{1+f^2} + f}$ sont définies (car f est positive) continues sur $[0,1]$ (car f l'est) donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left(\int_0^1 \left(\sqrt{\sqrt{1+f^2} - f}\right)\left(\sqrt{\sqrt{1+f^2} + f}\right)\right)^2 \le \left(\int_0^1 \left[\sqrt{1+f^2(t)} - f(t)\right]dt\right)\left(\int_0^1 \left[\sqrt{1+f^2(t)} + f(t)\right]dt\right).$$

Or :

$$\int_0^1 \left(\sqrt{\sqrt{1+f^2} - f}\right)\left(\sqrt{\sqrt{1+f^2} + f}\right) = \int_0^1 \sqrt{\left(\sqrt{1+f^2} - f\right)\left(\sqrt{1+f^2} + f\right)} = \int_0^1 \sqrt{1+f^2-f^2} = \int_0^1 1 = 1.$$

Donc $\left(\int_0^1\left[\sqrt{1+f^2(t)}-f(t)\right]dt\right)\left(\int_0^1\left[\sqrt{1+f^2(t)}+f(t)\right]dt\right)\geq 1$, soit :

$$\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2-\left(\int_0^1\sqrt{1+f^2(t)}dt\right)^2\leq -1 \iff 1+\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2\leq\left(\int_0^1\sqrt{1+f^2(t)}dt\right)^2.$$

Soit :

$$\sqrt{1+\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2}\leq\int_0^1\sqrt{1+f^2(t)}dt.$$

Ainsi, on a bien :

$$\sqrt{1+\left(\int_0^1 f(t)dt\right)^2}\leq\int_0^1\sqrt{1+f^2(t)}dt\leq 1+\int_0^1 f(t)dt.$$

4) Tel qu'indiqué posons $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, $G(x)=\int_a^x (f(t))^3\,dt$ et $H=F^2-G$.

On a donc $H(b)=\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2-\int_a^b (f(t))^3\,dt$ et comparer $\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2$ et $\int_a^b (f(t))^3\,dt$ revient à déterminer le signe de $H(b)$.

Comme $f\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, $f^3\in\mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ donc les fonctions F et G, donc H de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$.

On a alors $\forall\, x\in[a,b]$:

$$H'(x)=2F'(x)F(x)-G'(x)=2f(x)F(x)-f(x)^3=f(x)\left(2F(x)-f(x)^2\right).$$

Comme $f'\geq 0$, f est croissante sur $[a,b]$ et comme $f(a)=0$, f est positive sur $[a,b]$. Le signe de $H'(x)$ est donc celui de $h(x)=2F(x)-f(x)^2$.

La fonction h est dérivable sur $[a,b]$ en tant que différence de telles fonctions et :

$$h'(x)=2f(x)-2f'(x)f(x)=2f(x)\left(1-f'(x)\right).$$

On vient de voir que $\forall\, x\in[a,b]$, $f(x)\geq 0$ et par hypothèse, $f'(x)\leq 1$. Donc, $h'(x)\geq 0$ sur $[a,b]$ et h est croissante sur ce segment. Enfin, $F(a)=f(a)=0$, donc $h(a)=2F(a)-f(a)^2=0$ et ainsi, h et donc H' sont positives sur $[a,b]$. Ceci prouve que H est croissante sur $[a,b]$.

Enfin, $F(a)=G(a)=0$ donc $H(a)=0$ et ainsi, $H(b)\geq 0$, soit :

$$\int_a^b (f(t))^3\,dt\leq\left(\int_a^b f(t)dt\right)^2.$$

Exercice 2 *Suite d'intégrales*

On a $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $I_n=\int_0^1\frac{e^{-nt}}{1+t}dt$. Alors $\forall\, n\in\mathbb{N}$:

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\frac{e^{-(n+1)t}}{1+t}dt-\int_0^1\frac{e^{-nt}}{1+t}dt=\int_0^1\frac{e^{-nt}}{1+t}(e^{-t}-1)dt.$$

Or, $\forall\, t\in[0;1]$, $\frac{e^{-nt}}{1+t}(e^{-t}-1)\leq 0$ et ne s'annule qu'en 0, donc $I_{n+1}-I_n<0$ et :

$(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

De plus, $\forall\, n\in\mathbb{N}$, on a $\forall\, t\in[0;1]$, $0\le\frac{e^{-nt}}{1+t}\le e^{-nt}$, donc $0\le I_n\le\int_0^1 e^{-nt}dt$, soit $\int_0^1 e^{-nt}dt=\frac{1}{n}(1-e^{-nt})\le\frac{1}{n}$, donc $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $0\le I_n\le\frac{1}{n}$, ce qui donne immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=0\,.$$

Exercice 3 *Intégration par parties, formule de Taylor avec reste intégral*

1) Par intégrations par parties, on a :

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,dt&=\big[(t-a)f(t)\big]_a^b-\int_a^b (t-a)f'(t)\,dt=(b-a)f(b)-\int_a^b (t-a)f'(t)\,dt\\&=(b-a)f(b)-\left(\big[(t-b)(t-a)f'(t)\big]_a^b-\int_a^b (t-b)\big[f'(t)+(t-a)f''(t)\big]dt\right)\\&=(b-a)f(b)+\int_a^b (t-b)\big[f'(t)+(t-a)f''(t)\big]dt\\&=(b-a)f(b)+\int_a^b (t-b)f'(t)\,dt+\int_a^b (t-b)(t-a)f''(t)\,dt\end{aligned}.$$

Et, de même :

$$\int_a^b f(t)\,dt=\big[(t-b)f(t)\big]_a^b-\int_a^b (t-b)f'(t)\,dt=(b-a)f(a)-\int_a^b (t-b)f'(t)\,dt\,.$$

En ajoutant les deux résultats, on obtient :

$$2\int_a^b f(t)\,dt=(b-a)f(b)+(b-a)f(a)+\int_a^b (t-b)(t-a)f''(t)\,dt\,.$$

Soit :

$$\int_a^b f(t)\,dt=(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}+\int_a^b \frac{(t-a)(t-b)}{2}f''(t)\,dt\,.$$

2) Posons $F_0=f$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $F_{n+1}:x\mapsto\int_a^x F_n(t)dt$ (F_{n+1} est donc la primitive de F_n qui s'annule en a).

Alors $\forall\, n\in\mathbb{N}$, la fonction F_{n+1} est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$ avec $\forall\, k\in[\![0,n+1]\!]$, $F_k^{(i)}=F_{k-i}$ (donc $F_k^{(i)}(a)=0$ pour $k\le n$) et $F_{n+1}^{(n+1)}=F_0=f$.

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n à F_{n+1}, on obtient $\forall\, x\in[a,b]$:

$$F_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{F_{n+1}{}^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}F_{n+1}^{(n+1)}(t)\,dt=\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f(t)\,dt=g(x)\,.$$

Ceci prouve immédiatement que g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a,b]$ et que $g^{(n+1)}=f$.

3) La fonction $f:x\mapsto\ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.

La formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n\in\mathbb{N}^*$ appliquée à f donne $\forall\, x\in\mathbb{R}_+$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt\,.$$

Soit $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + (-1)^n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt.$$

Alors $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$:

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| = \left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\,dt\right| \le \int_0^x \left|\frac{(x-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\right| dt \le \int_0^x (x-t)^n\,dt.$$

Or, $\int_0^x (x-t)^n\,dt = \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, donc $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$:

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right| \le \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exercice 4 *Calculs*

a. $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $\sin^4 t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{8}\big(\cos 4t - 4\cos 2t + 3\big)$, donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\,dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos 4t - 4\cos 2t + 3\big)dt = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{4}\sin 4t - 2\sin 2t + 3t\right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{16}.$$

b. On a $\forall\, x \in [0;1]$:

$$\frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 - x - 2} = x^2 + x + 2 + 2\frac{2x-1}{x^2-x-2} + \frac{7}{(x+1)(x-2)} = x^2 + x + 2 + 2\frac{2x-1}{x^2-x-2} + \frac{7}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^2 - x - 2}dx &= \int_0^1 \left[x^2 + x + 2 + 2\frac{2x-1}{x^2-x-2} + \frac{7}{3}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+1}\right)\right]dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2\ln\left|x^2 - x - 2\right| + \frac{7}{3}\big(\ln|x-2| - \ln|x+1|\big)\right]_0^1 = \frac{17}{6} - \frac{14}{3}\ln 2\end{aligned}$$

c. On a $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin(2t)}{1+\sin^2 t}dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\sin t}{1+\sin^2 t}\cos t\,dt$ et en posant $u = \sin t$, on obtient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin(2t)}{1+\sin^2 t}dt = \int_0^1 \frac{1+2u}{1+u^2}du = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} + \int_0^1 \frac{2u}{1+u^2}du = \big[\arctan u\big]_0^1 + \big[\ln(1+u^2)\big]_0^1 = \frac{\pi}{4} + \ln 2.$$

d. En intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\ln(1+t^2)dt &= \left[\frac{1}{2}t^2\ln(1+t^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}t^2\frac{2t}{1+t^2}dt = \frac{1}{2}\ln 2 - \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^2}dt \\ &= \frac{1}{2}\ln 2 - \int_0^1 \left(t - \frac{t}{1+t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\ln 2 - \left[\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ou bien, en posant $u = t^2$, on obtient :

$$\int_0^1 t\ln(1+t^2)dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \ln(1+u)du = \frac{1}{2}\big[(1+u)\ln(1+u) - u\big]_0^1 = \ln 2 - \frac{1}{2}.$$

e. $\forall\, x \in [0;1]$, $\dfrac{x^2+1}{x^2-x+2} = 1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{2x-1}{x^2-x+2} - \dfrac{1}{\sqrt{7}}\dfrac{\frac{2}{\sqrt{7}}}{\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)^2+1}$, donc :

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2-x+2}dx = \left[x + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-x+2\right| - \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{7}}\right)\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{\sqrt{7}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right).$$

Exercice 5 *Sommes de Riemann*

a. On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k(2n-k)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2\frac{k}{n} - \left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

avec $f(t) = \sqrt{2t - t^2}$.

La fonction f est continue sur $[0;1]$, donc on a affaire à une somme de Riemann et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(t)dt.$$

Et, avec $u = 1 - t$:

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \sqrt{2t-t^2}\,dt = \int_0^1 \sqrt{1-(1-t)^2}\,dt = \int_1^0 \sqrt{1-u^2}\,(-du) = \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,du.$$

Posons alors $u = \sin x$, on a :

$$\int_0^1 f(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 x}\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, comme $\frac{\pi}{4} \neq 0$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad u_n \sim \frac{\pi}{4}.$$

b. On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2} = \frac{v_n}{n}$$

avec $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

La fonction f est continue sur $[0;1]$, donc v_n est une somme de Riemann et :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \big[\arctan t\big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ceci prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \text{et} \quad u_n \sim \frac{\pi}{4n}.$$

c. On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{4n^2 - k^2}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k/n}{\sqrt{4-(k/n)^2}} = n\,v_n$$

avec $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{4-t^2}}$.

La fonction f est continue sur $[0;1]$, donc v_n est une somme de Riemann et :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}dt = -\int_0^1 \frac{-2t}{2\sqrt{4-t^2}}dt = -\left[\sqrt{4-t^2}\right]_0^1 = 2-\sqrt{3}.$$

Comme $2-\sqrt{3} > 0$, ceci prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{et} \quad u_n \sim (2-\sqrt{3})n.$$

d. On a $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et :

$$\ln u_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \sqrt{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}} = n\sqrt{n}\; v_n$$

avec $v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $f(t) = \sqrt{t}$.

La fonction f est continue sur $[0;1]$, donc v_n est une somme de Riemann et :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \sqrt{t}\,dt = \int_0^1 t^{1/2}dt = \left[\frac{2}{3}t^{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}.$$

Ceci prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln u_n = +\infty$ et $\ln u_n \sim \dfrac{2}{3}n\sqrt{n}$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Attention ici, il n'est pas si évident de trouver un équivalent simple de u_n, car $\dfrac{u_n}{e^{\frac{2}{3}n\sqrt{n}}} = \exp\left[\ln u_n - \dfrac{2}{3}n\sqrt{n}\right]$, mais on ne connait pas la limite de $\ln u_n - \dfrac{2}{3}n\sqrt{n}$ …

e. On admet que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, on a $x - \dfrac{x^3}{6} \le \sin x \le x$ (n'hésitez pas à le prouver en étudiant les différences).

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, on a $\dfrac{k}{n^2} - \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{k}{n^2}\right)^3 \le \sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right) \le \dfrac{k}{n^2}$, donc :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^6} \le u_n \le \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}.$$

Or :

- $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $f(t) = t$.
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^6} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\right]$ avec $g(t) = t^3$.

Les fonctions f et g sont continues sur $[0;1]$, donc $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)$ sont des sommes de Riemann et :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{k}{n}\right)\right] = \int_0^1 g(t)dt = \int_0^1 t^3 dt = \frac{1}{4}.$$

Alors, $\lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^6}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$ et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad u_n \sim \frac{1}{2}.$$

Chapitre 13 – Séries Numériques - Entrainement

Exercice 1 *Convergence de séries*

Etudier la convergence de la série Σu_n avec :

a. $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)$ b. $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)$ c. $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\right)$ d. $u_n = \frac{n^2+n+2}{n^4+n^2+2}$

e. $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ f. $u_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos^2\left(\frac{1}{n}\right)$ g. $u_n = \frac{2^n+e^n}{n^2+\ln n+3^n}$ h. $u_n = \frac{(n^2)!}{(n!)^2}$ i. $u_n = \frac{(2n)!n!}{(3n)!}$

Exercice 2 *Convergence et somme de séries*

Montrer que la série Σu_n est convergente et calculer sa somme avec :

a. $u_n = \frac{2}{n(n+1)(n+2)}$ b. $u_n = \frac{2^{2n}}{3^{3n-3}}$ c. $u_n = 2^n \tan^2\frac{x}{2^{n+1}}\tan\frac{x}{2^n}$ avec $x \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$

d. $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ e. $u_n = ne^{-n}$

Exercice 3 *Comparaison série-intégrale*

1) Soit $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$. Prouver que la série Σu_n converge et donner un équivalent simple de son reste.

2) Soit $u_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$. Prouver que la série Σu_n diverge et donner un équivalent simple la somme partielle.

Exercice 4 *Avec une suite récurrente*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}-1$. Déterminer la nature de Σu_n.

Exercice 5 *Avec une suite implicite*

Montrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $x^5+x^3 = \frac{1}{n}$ admet une unique solution réelle u_n et déterminer la nature de Σu_n.

Exercice 6 *Produits infinis*

Dans les deux cas suivants, prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et étudier la nature de la série Σu_n.

a. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{2^k}\exp\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$. b. $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{\frac{1}{k}}$.

Indications

Exercice 1 *Convergence de séries*

a. $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \ldots$

b. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+a\right) = -\sin a$, puis donner un équivalent simple de u_n.

c. Idem.

d. Donner un équivalent simple de u_n.

e. Prouver que $u_n \sim e^{-n+\frac{1}{2}}$.

f. Donner un équivalent simple de u_n.

g. Idem.

h. Utiliser la règle de d'Alembert.

i. Idem.

Exercice 2 *Convergence et somme de séries*

a. Pour la convergence, donner un équivalent simple de u_n. Puis, décomposer en éléments simples, puis télescopage.

b. Reconnaitre la nature de la suite.

c. Pour la convergence, donner un équivalent simple de u_n.
Puis, remarquer que $u_n = 2^n \tan\dfrac{x}{2^n} - 2^n\left(1-\tan^2\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)\tan\left(2\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)$ et $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

d. Pour la convergence, donner un équivalent simple de u_n. Puis, $u_n = \ln(n+1)+\ln(n-1)-2\ln n \ldots$

e. Pour la convergence, comparer u_n et $e^{-n/2}$.
Puis, introduire $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} e^{-kx}$ et remarquer que f est dérivable…

Exercice 3 *Comparaison série-intégrale*

Dans les deux cas, se référer au cours.

1) Comparer le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ à $\lim\limits_{N \to +\infty} \int_n^N \dfrac{\ln t}{t^2}\,dt$. Intégrer par parties pour calculer l'intégrale.

2) Comparer la somme partielle $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ à $\int_3^n \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}\,dt$ (attention la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{t}}$ n'est pas toujours décroissante). Pour calculer l'intégrale, poser $u = \sqrt{t}$.

Exercice 4 *Avec une suite récurrente*

Etudier la suite récurrente u. On montre entre autres que u converge vers 0, puis utiliser la règle de d'Alembert en évaluant $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$.

Exercice 5 *Avec une suite implicite*

Comme toujours (!), utiliser le théorème de la bijection continue, ici avec la fonction $g : x \mapsto x^5 + x^3$. Montrer ensuite que u converge vers 0, puis déterminer un équivalent simple de u_n.

Exercice 6 *Produit infini*

a. Etudier $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. On peut conclure pour la suite et la série en même temps.

b. En justifiant que l'on peut, prendre le logarithme de u_n, puis étudier la nature de la série ainsi trouvée. Pour la série Σu_n, on peut conclure très vite !

Réponses

Exercice 1 *Convergence de séries*

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ donc la série Σu_n diverge grossièrement.

b. $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n}\right) = -\sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim -\dfrac{1}{n}$ et la série harmonique $\Sigma\dfrac{1}{n}$ diverge donc Σu_n diverge.

c. $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n^2}\right) = -\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \sim -\dfrac{1}{n^2}$ et la série de Riemann $\Sigma\dfrac{1}{n^2}$ converge donc Σu_n converge.

d. $u_n = \dfrac{n^2+n+2}{n^4+n^2+2} \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $\Sigma\dfrac{1}{n^2}$ converge donc Σu_n converge.

e. $u_n = e^{-n^2\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} = e^{-n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{-n^2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = e^{-n+\frac{1}{2}+o(1)}$ donc $u_n \sim e^{-n+\frac{1}{2}} = \sqrt{e}\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$.

La série géométrique $\Sigma\sqrt{e}\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$, donc Σu_n converge.

f. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\cos^2\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{n}$ et $\Sigma\dfrac{1}{n}$ diverge donc Σu_n diverge.

g. $u_n = \dfrac{2^n+e^n}{n^2+\ln n+3^n} \sim \left(\dfrac{e}{3}\right)^n$ et la série géométrique $\Sigma\left(\dfrac{e}{3}\right)^n$ converge donc Σu_n converge.

h. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{((n+1)^2)!(n!)^2}{(n^2)!((n+1)!)^2} = \dfrac{((n+1)^2-1)!(n+1)^2}{(n^2)!(n+1)^2} = (n^2+1)(n^2+2)\ldots(n^2+2n) \to +\infty$ donc Σu_n diverge.

i. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(2n+2)!(n+1)!(3n)!}{(2n)!n!(3n+3)!} = \dfrac{(2n+2)(2n+1)(n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \dfrac{2(2n+1)(n+1)}{3(3n+2)(3n+1)} \to \dfrac{4}{27} < 1$ donc Σu_n converge.

Exercice 2 *Convergence et somme de séries*

a. On a $u_n = \dfrac{2}{n(n+1)(n+2)} \sim \dfrac{2}{n^3}$ et la série de Riemann $\Sigma\dfrac{1}{n^3}$ converge donc Σu_n converge.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{2}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}$ donc :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+1}\right) = 1-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{1}{2}.$$

b. $u_n = \dfrac{2^{2n}}{3^{3n-3}} = 27\left(\dfrac{4}{27}\right)^n$ donc Σu_n est une série géométrique convergente (car $0 < \dfrac{4}{27} < 1$).

De plus, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 27\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{27}\right)^k = 27\,\frac{1-\left(\frac{4}{27}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{27}} = \frac{729}{23}\left[1-\left(\frac{4}{27}\right)^{n+1}\right].$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = \frac{729}{23}.$$

c. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$, donc $u_n \sim 2^n\left(\dfrac{x}{2^{n+1}}\right)^2 \dfrac{x}{2^n} = \dfrac{x^3}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. Comme la série géométrique $\Sigma \dfrac{x^3}{4}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ converge, Σu_n converge. De plus $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 2^n \tan^2\frac{x}{2^{n+1}} \tan\frac{x}{2^n} = 2^n \tan\frac{x}{2^n} - 2^n\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{n+1}}\right)\tan\left(2\frac{x}{2^{n+1}}\right) = 2^n\tan\frac{x}{2^n} - 2^{n+1}\tan\frac{x}{2^{n+1}}.$$

Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n}\left(2^k\tan\frac{x}{2^k} - 2^{k+1}\tan\frac{x}{2^{k+1}}\right) = \tan x - 2^{n+1}\tan\frac{x}{2^{n+1}} = \tan x - x\,\frac{\tan\frac{x}{2^{n+1}}}{\frac{x}{2^{n+1}}}.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\tan(x/2^{n+1})}{x/2^{n+1}} = \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\tan t}{t} = 1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \tan x - x.$$

d. On a $u_n = \ln\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) \sim -\dfrac{1}{n^2}$. Comme la série de Riemann $\Sigma\dfrac{1}{n^2}$ converge, Σu_n converge.

De plus $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tel $n \geq 2$, $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln(n+1) + \ln(n-1) - 2\ln n$, donc :

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} u_k &= \sum_{k=2}^{n}\big(\ln(k+1)+\ln(k-1)-2\ln k\big) = \sum_{k=2}^{n}\big(\ln(k+1)-\ln k\big) - \sum_{k=2}^{n}\big(\ln k - \ln(k-1)\big)\\ &= \big(\ln(n+1)-\ln 2\big) - \big(\ln n - \ln 1\big) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln 2\end{aligned}$$

Donc :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} u_k = -\ln 2.$$

e. On a $u_n = ne^{-n} = o(e^{-n/2})$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$. Comme la série géométrique $\Sigma(e^{-1/2})^n$ converge, la série Σu_n converge.

De plus $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sum_{k=0}^{n-1} e^{-kx} = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{-x})^k = \frac{1-e^{-nx}}{1-e^{-x}}$, donc, en dérivant :

$$-\sum_{k=0}^{n-1} ke^{-kx} = \frac{ne^{-nx}(1-e^{-x}) - e^{-x}(1-e^{-nx})}{(1-e^{-x})^2}.$$

Et pour $x = 1$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} ke^{-k} = -\frac{ne^{-n}(1-e^{-1}) - e^{-1}(1-e^{-n})}{(1-e^{-1})^2}.$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} ne^{-n} = \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$, donc $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{e^{-1}}{(1-e^{-1})^2}$, soit :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \frac{e}{(e-1)^2}.$$

Exercice 3 *Comparaison série-intégrale*

1) On a $\lim_{n\to+\infty} n^{3/2}u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.

Comme la série de Riemann $\Sigma\frac{1}{n^{3/2}}$ converge, la série Σu_n converge. Le reste d'ordre n est alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Posons $f(t) = \frac{\ln t}{t^2}$. La fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$ en tant que quotient de telles fonctions et :

$$f'(t) = \frac{1-2\ln t}{t^3}.$$

Sur $[1;+\infty[$, on a $f'(t) < 0$ quand $\ln t > \frac{1}{2}$, soit $t > \sqrt{e}$. Donc, f est strictement décroissante sur $[\sqrt{e};+\infty[$.

Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$, on a $\forall t \in [k,k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$, donc $u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq u_k$.

En sommant, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $\forall p \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_{k+1} \leq \sum_{k=n}^{n+p} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{n+p} u_k \iff \sum_{k=n+1}^{n+p+1} u_k \leq \int_n^{n+p+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n}^{n+p} u_k \quad \textbf{(1)}.$$

Et :

$$\int_n^{n+p+1} f(t)dt = \int_n^{n+p+1} \frac{\ln t}{t^2}dt = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_n^{n+p+1} + \int_n^{n+p+1} \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{\ln t}{t} - \frac{1}{t}\right]_n^{n+p+1} = -\frac{1+\ln(n+p+1)}{n+p+1} + \frac{1+\ln n}{n}.$$

Donc $\lim_{p\to+\infty} \frac{1+\ln(n+p+1)}{n+p+1} = 0$ et, comme $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n}^{n+p} u_{k+1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = R_n$ et $\lim_{p\to+\infty} \sum_{k=n}^{n+p} u_k = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k = R_n + u_n$.

En passant à la limite quand p tend vers $+\infty$ dans la double inégalité **(1)**, on obtient $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$R_n \leq \frac{1+\ln n}{n} \leq R_n + u_n \iff \frac{1+\ln n}{n} - u_n \leq R_n \leq \frac{1+\ln n}{n} \iff \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n^2} \leq R_n \leq \frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n}.$$

Et donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$:

$$1+\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{n} \leq \frac{n}{\ln n} R_n \leq 1+\frac{1}{\ln n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\ln n}-\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\ln n}\right)=1$, le théorème des gendarmes donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\ln n}R_n=1$ et donc :

$$\boxed{R_n \sim \frac{\ln n}{n}}$$

2) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\ln n = +\infty$, donc $\frac{1}{n}=o(u_n)$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 0$.

Comme la série harmonique $\Sigma \frac{1}{n}$ diverge, la série Σu_n diverge. La somme partielle est $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

Posons $f(t)=\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$. La fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$ en tant que quotient de telles fonctions et :

$$f'(t)=\frac{2-\ln t}{2t\sqrt{t}}.$$

Sur $[1;+\infty[$, on a $f'(t)<0$ quand $\ln t>2$, soit $t>e^2$. Donc, f est strictement décroissante sur $[e^2;+\infty[$.

Alors, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 3$, on a $\forall\, t \in [k,k+1]$, $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k)$, donc $u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq u_k$.

En sommant, on obtient $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 8 > e^2$:

$$\sum_{k=8}^{n} u_{k+1} \leq \sum_{k=8}^{n}\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=8}^{n} u_k \iff S_{n+1}-S_8 \leq \int_8^{n+1} f(t)dt \leq S_n - S_7.$$

Alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 9$:

$$\int_8^{n+1} f(t)dt + S_7 \leq S_n \leq \int_8^{n} f(t)dt + S_8 \quad \textbf{(1)}.$$

Et, avec $u=\sqrt{t}$, on a :

$$\int_8^n f(t)dt=\int_8^n \frac{\ln t}{\sqrt{t}}dt = 4\int_8^n \ln\sqrt{t}\,\frac{dt}{2\sqrt{t}} = 4\int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{n}} \ln u\, du = 4\left[u\ln u - u\right]_{\sqrt{8}}^{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n}\ln n - 4\sqrt{n} - A.$$

avec $A=4\left[\sqrt{8}\ln\sqrt{8}-\sqrt{8}\right]$.

On a alors clairement $\int_8^n f(t)dt \sim 2\sqrt{n}\ln n$.

De plus :

$$\frac{\int_8^{n+1} f(t)dt}{2\sqrt{n}\ln n}=\frac{2\sqrt{n+1}\ln(n+1)-4\sqrt{n+1}-A}{2\sqrt{n}\ln n}=\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{\ln n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-2\sqrt{1+\frac{1}{n}}\frac{1}{\ln n}-\frac{A}{2\sqrt{n}\ln n}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\int_8^{n+1} f(t)dt}{2\sqrt{n}\ln n}=1$.

Finalement, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 9$:

$$\frac{\int_8^{n+1} f(t)dt}{2\sqrt{n}\ln n} + \frac{S_7}{2\sqrt{n}\ln n} \leq S_n \leq \frac{\int_8^{n} f(t)dt}{2\sqrt{n}\ln n} + \frac{S_8}{2\sqrt{n}\ln n}$$

avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\int_8^{n+1} f(t)dt}{2\sqrt{n}\ln n} + \frac{S_7}{2\sqrt{n}\ln n} \right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{\int_8^{n} f(t)dt}{2\sqrt{n}\ln n} + \frac{S_8}{2\sqrt{n}\ln n} \right) = 1$. On a alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}\ln n} = 1$ et ainsi :

$$\boxed{S_n \sim 2\sqrt{n}\ln n}$$

Exercice 4 *Avec une suite récurrente*

Posons $f(x) = \sqrt{1+x^2} - 1$. La fonction f est définie, continue et croissante sur $[0;1]$.

De plus, $f(0) = 0$ et $f(1) = \sqrt{2} - 1 \in [0;1]$, donc $f([0;1]) \subset [0;1]$.

Comme $u_0 = \frac{1}{2} \in [0;1]$, on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$ et u est bornée.

On a $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{5}-2}{2} < \frac{1}{2} = u_0$. Comme f est croissante sur $[0;1]$, la suite u est décroissante.

Etant minorée par 0, elle converge vers une limite $\ell \in [0;1]$ telle que $f(\ell) = \ell$ car f est continue sur $[0;1]$.

Enfin, $f(\ell) = \ell$ quand $1 + \ell^2 = (\ell+1)^2$, soit $\ell = 0$. Finalement, la suite u converge vers 0.

On a alors $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} - 1 = \frac{1}{2}u_n^2 + o(u_n^2)$, donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}u_n + o(u_n)$, ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

Alors, d'après la règle de d'Alembert :

$$\boxed{\text{La série } \Sigma u_n \text{ converge.}}$$

Exercice 5 *Avec une suite implicite*

La fonction $g : x \mapsto x^5 + x^3$ est définie, continue et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$ sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et sa réciproque est continue.

Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n}$ possède un unique antécédent par g : $u_n = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $g^{-1}(0) = 0$ (car $g(0) = 0$) et g^{-1} est continue en 0, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Or, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^5 + u_n^3 = \frac{1}{n}$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{nu_n^3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n^5 + u_n^3}{u_n^3} = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(u_n^2 + 1\right) = 1$ et ainsi, $u_n^3 \sim \frac{1}{n}$, donc $u_n \sim \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Enfin, la série de Riemann $\Sigma \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \Sigma \frac{1}{n^{1/3}}$ diverge donc :

$$\boxed{\text{La série } \Sigma u_n \text{ diverge.}}$$

Exercice 6 *Produit infini*

a. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2^{\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n+1)}{2}}} \exp\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right) = \dfrac{n+1}{2^{n+1}} \exp\left(\dfrac{1}{(n+1)^2}\right)$.

Alors, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$, donc d'après la règle de d'Alembert, $\sum u_n$ converge, ce qui implique que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers 0 et la série } \sum u_n \text{ converge.}}$$

b. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 0$ et $\ln u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$.

Or, $\dfrac{1}{k} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \sim \dfrac{1}{k^2}$ et la série de Riemann $\Sigma \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc la série $\sum \dfrac{1}{k} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$ converge.

Ceci prouve que $(\ln u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie ℓ et donc que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers $e^{\ell} > 0$.

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \neq 0$, on conclut immédiatement :

$$\boxed{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge et la série } \sum u_n \text{ diverge grossièrement.}}$$

Chapitre 15 - Algèbre Linéaire - Entrainement

Dimension quelconque

Exercice 1 *Espaces vectoriels*

Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1) $E=$ ensemble des fonctions 3-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.
2) $E=$ ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ telles que $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x-2y)=f(2x+y)$.
3) $E=\{f\in\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{K}), f'(0)=0\}$.
4) $E=\{u\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall\, n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_{n+2}+u_n+u_0\}$.
5) $E=\{u\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \lim u=u_0\}$.

Exercice 2 *Espaces supplémentaires*

1) On appelle E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles convergentes. On pose $F=\{u\in E, \lim u=0\}$ et G = ensemble des suites réelles constantes.
   Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, puis que $E=F\oplus G$.
2) On appelle E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des suites complexes stationnaires, F l'ensemble des suites complexes nulles apcr et G l'ensemble des suites réelles constantes .
   Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, puis que $E=F\oplus G$.

Exercice 3 *Familles libres*

1) $\forall\, n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n(x)=e^{nx}$. Montrer que la famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.
2) $\forall\, p\in\mathbb{N}^*$, on note u_p la suite telle que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_{p,n}=\sin\left(\dfrac{n\pi}{p}\right)$. La famille $(u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est-elle libre ?

Exercice 4 *Applications linéaires*

Dans chacun des cas, montrer que u est une application linéaire, puis déterminer son image et son noyau.

1) $u:\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\to\mathbb{C}^2$; $v\mapsto(v_0,v_1)$.
2) $u:\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $f\mapsto f'$.
3) $u:\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$; $f\mapsto F$ avec $\forall\, x\in\mathbb{R},\ F(x)=\int_0^x f(t)dt$.

Exercice 5 *Endomorphismes*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $f\in\mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que $f\left(\ker(f\circ f)\right)=\ker f\cap \operatorname{Im} f$.
2) Montrer que $f\circ f=0$ si et seulement si $\operatorname{Im} f\subset\ker f$.
3) Montrer que si $f^4=f^2$, alors $E=\ker f^2\oplus\ker(f^2-id)=\ker(f-id)\oplus\ker(f^3+f^2)$.
4) Soit $g\in\mathcal{L}(E)$ tel que $g\circ f=f\circ g$. Montrer que le noyau et l'image de g sont stables par f.

Exercice 6 *Projecteurs et symétries*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p et q deux projecteurs de E qui commutent.

1) Montrer que $p-q$ est une symétrie si et seulement si p et q sont associés.
2) Montrer que $p-q$ est un projecteur si et seulement si $\operatorname{Im} q \subset \operatorname{Im} p$.

Dimension finie

Exercice 1 *Espaces vectoriels, bases*

Montrer que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et donner une base de E.

1) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $E=\operatorname{Vect}\big((1,2,3),(-1,0,2),(0,2,-3)\big)$.
2) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $E=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+y=z+t \text{ et } x-y+z-t=0\right\}$.
3) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $E=\left\{(z,z')\in\mathbb{C}^2,\ 3z+2z'=0\right\}$.
4) $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $E=\left\{f\in\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f'=2f\right\}$.
5) $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $E=\left\{u\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \setminus \forall\, n\in\mathbb{N}, u_{n+2}-4iu_{n+1}-3u_n=0\right\}$.

Exercice 2 *Bases*

Dans chaque cas, la famille donnée est-elle une base de E ?

1) (e_1,e_2,e_3) de $E=\mathbb{R}^3$ avec $e_1=(1,-1,2)$, $e_2=(-1,-2,0)$ et $e_3=(3,-2,3)$.
2) (e_1,e_2,e_3,e_4) de $E=\mathbb{R}^4$ avec $e_1=(1,-1,2,1)$, $e_2=(-1,0,-2,0)$, $e_3=(0,1,-2,3)$ et $e_4=(1,1,1,1)$.
3) (e_1,e_2,e_3,e_4) de $E=\mathbb{R}^4$ avec $e_1=(1,0,0,0)$, $e_2=(-1,0,-1,0)$, $e_3=(0,1,-2,1)$ et $e_4=e_1-2e_2+3e_3$.
4) (f,g,h) de $E=\mathbb{R}_2[x]$ avec $f:x\mapsto(x+1)^2$, $g:x\mapsto(x+1)(x-1)$ et $h:x\mapsto(x-1)^2$.
5) (f,g,h) de $E=\mathbb{R}_2[x]$ avec $f:x\mapsto(x+1)^2$, $g:x\mapsto(x+2)^2$ et $h:x\mapsto x^2-2$.

Exercice 3 *Espaces supplémentaires*

1) Soit $F=\left\{(x,y,x),(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$ et $G=\left\{(x,x,0),x\in\mathbb{R}\right\}$. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2) On pose $F=\left\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \setminus x+y+z=y+z+t=0\right\}$. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 *Applications linéaires, noyaux, images, rang*

I - Dans chacun des cas, montrer que u est une linéaire, puis déterminer son noyau, son image et son rang.

1) $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$; $(x,y,z)\mapsto(x+y,y+z,z+x)$.
2) $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$; $(x,y,z)\mapsto(x+y+z,x+2y+3z,2x+3y+4z,3x+4y+5z)$.
3) $u:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2$; $(x,y,z,t)\mapsto(x+y,z-t)$.
4) $u:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$; $P\mapsto Q$ telle que $\forall\, x\in\mathbb{R},\ Q(x)=2xP(x)-x^2P'(x)$.

II - Dans chacun des cas, déterminer le noyau, l'image et le rang de l'application linéaire donnée.

1) $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linéaire telle que $f(e_1)=e_1+e_2+e_3$, $f(e_2)=3e_1+2e_2$ et $f(e_3)=e_2+3e_3$ où (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2) $u:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ linéaire telle que $u(e_1)=f_1+f_2$, $u(e_2)=f_1-f_2$, $u(e_3)=2f_1-3f_2$ et $u(e_4)=3f_1-2f_2$ où (e_1,e_2,e_3,e_4) est la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et (f_1,f_2) celle de $\mathbb{R}^2$.

3) $u:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ linéaire telle que $u(e_1)=f_1+f_2$, $u(e_2)=f_3+f_4$ et $u(e_3)=f_1+f_2+f_3+f_4$ où (e_1,e_2,e_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1,f_2,f_3,f_4) celle de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 *Endomorphismes*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$ et $(f,g)\in\mathcal{L}(E)^2$.

1) Montrer que $\operatorname{Im} f+\ker f=E \Leftrightarrow \operatorname{Im} f\oplus\ker f=E$.
2) Prouver que $\operatorname{rg}(f)-\operatorname{rg}(g\circ f)=\dim\left(\operatorname{Im} f\cap\ker g\right)$.
3) On suppose qu'il existe un projecteur p tel que $f=p\circ f-f\circ p$.
   a. Montrer que $f\left(\ker p\right)\subset\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im} p\subset\ker f$.
   b. En déduire que $f^2=0$.

Indications

Dimension quelconque

Exercice 1 *Espaces vectoriels*

La méthode est la même dans tous les cas : prouver que E est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de référence (préciser cet espace, puis justifier que E est non vide et stable par combinaison linéaire).

Exercice 2 *Espaces supplémentaires*

Dans les deux cas, la méthode pour prouver que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E est celle-ci-dessus (attention dans la question 2, deux suites nulles apcr ne le sont pas forcément nulles à partir du même rang).

Puis, pour prouver que $E = F \oplus G$, montrer que $F \cap G = \{0_{\mathbb{N}}\}$ et que toute suite de E peut s'écrire comme la somme d'une suite de F et d'une suite de G. Cette décomposition est assez facile à conjecturer dans les deux cas, sinon, on peut procéder par analyse-synthèse (ce qui évite alors de prouver que $F \cap G = \{0_{\mathbb{N}}\}$).

Exercice 3 *Familles libres*

1) La famille $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant infinie, il faut montrer que toute sous-famille finie est libre. On justifier assez facilement que qu'il suffit de prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $(f_0, f_1, .., f_n)$ est libre. Attention, pour la rédaction : ne pas confondre f_n et $f_n(x)$ et ne pas oublier les quantificateurs.

2) Evaluer la suite u_1 et conclure !

Exercice 4 *Applications linéaires*

Dans les trois cas, utiliser la définition pour montrer la linéarité.

Pour déterminer les noyaux, la méthode est standard. Pour les images, il faut conjecturer un peu …

Indication : Les deux premières applications sont surjectives mais non injectives ; la troisième est injective mais non surjective.

Exercice 5 *Endomorphismes*

1) Procéder par double inclusion.

Montrer que $f\left(\ker(f \circ f)\right) \subset \ker f \cap \operatorname{Im} f$ revient à montrer que $f\left(\ker(f \circ f)\right) \subset \ker f$ et $f\left(\ker(f \circ f)\right) \subset \operatorname{Im} f$ (cette deuxième inclusion est immédiate).

Pour montrer $\ker f \cap \operatorname{Im} f \subset f\left(\ker(f \circ f)\right)$, considérer $x \in \ker f \cap \operatorname{Im} f$, traduire les deux conditions et montrer que $x = f(z)$ avec $(f \circ f)(z) = 0$.

2) Simple et classique : on peut raisonner par équivalences.

3) Pour la première égalité, on peut poser $p = f^2$ et remarquer que p est un …

Pour la seconde égalité, procéder par analyse-synthèse classique. Pour l'analyse, considérer $x \in E$, supposer la décomposition $x = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in \ker(f - id) \times \ker(f^3 + f^2)$, puis calculer $f^2(x) + f^3(x)$. Remarquer que $x_1 \in \ker(f - id)$ équivaut à $f(x_1) = x_1$.

4) Montrer que le noyau et l'image de g sont stables par f revient à prouver que $f(\ker g) \subset \ker g$ et $f(\operatorname{Im} g) \subset \operatorname{Im} g$. Cet exercice est simple (pour les images, écrire $f(\operatorname{Im} g) = f(g(E)) = f \circ g(E) = ...$)

Exercice 6 *Projecteurs et symétries*

Commencer par remarquer que $p - q$ est linéaire et développer $(p - q)^2$ sans oublier que $pq = qp$.

Attention dans les deux cas, on veut une équivalence.

1) $p - q$ est une symétrie $\Leftrightarrow$ $(p - q)^2 = id$ ...

Pour le sens direct, ne pas hésiter à composer à p ou q l'égalité obtenue.

2) $p - q$ est un projecteur $\Leftrightarrow$ $(p - q)^2 = p - q$.

Pour la réciproque, ne pas oublier que $y \in \operatorname{Im} p \Leftrightarrow p(y) = y$.

Dimension finie

Exercice 1 *Espaces vectoriels, bases*

1) E est par définition un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Pour déterminer une base, étudier la liberté de la famille des trois vecteurs engendrant E.

2) Par une suite d'équivalences, on peut trouver deux vecteurs e_1 et e_2 tels que $E = \operatorname{Vect}(e_1, e_2)$. Ne pas hésiter à utilisation la notation en colonne pour les vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

3) C'est très simple ici en utilisant la même méthode que ci-dessus sans se laisser perturber par le fait que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (le raisonnement est le même que pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).

4) C'est quasiment du cours sur les équations différentielles.

5) C'est quasiment du cours sur les suites récurrentes linéaires doubles.

Exercice 2 *Bases*

Dans chaque cas, repérer la dimension de E et le nombre de vecteurs de la famille, puis étudier la liberté de la famille. Pour les 4 et 5, attention à la nature des objets (cf. remarque dans les indications pour l'exercice 3 en dimension quelconque).

Exercice 3 *Espaces supplémentaires*

1) Ne pas hésiter à écrire F et G comme des Vect d'un ou deux vecteurs fixés. Montrer que F et G sont supplémentaires revient à montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$: il suffit ici de montrer que la famille formée par la réunion des vecteurs trouvées ci-dessus (engendrant F ou G) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2) On peut trouver deux vecteurs e_1 et e_2 tels que $F=\text{Vect}(e_1,e_2)$, donc F est un plan.

Dans $\mathbb{R}^4$ (de dimension 4), tous les supplémentaires de F sont donc des plans. Pour en trouver un, il suffit de trouver deux vecteurs e_3 et e_4 tels que (e_1,e_2,e_3,e_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 4 *Applications linéaires, noyaux, images, rang*

I - Dans chacun des cas, montrer que u est une linéaire avec la définition. Les écritures sont assez lourdes, ne pas hésiter à utilisation la notation en colonne pour les vecteurs : c'est plus clair et plus facile de s'y retrouver.

Pour le noyau, on se retrouve en général avec un système simple. Le noyau étant connu, déterminer le rang (par le théorème du rang), et ensuite l'image en trouvant des u(…) qui donne le bon nombre de vecteurs linéairement indépendants (le bon nombre étant le rang !).

Pour le 4, ne pas oublier que tout élément de $\mathbb{R}_2[x]$ est de la forme $x\mapsto ax^2+bx+c$.

II - 1) Ne pas oublier que tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$ s'écrit $X=xe_1+ye_2+ze_3$ avec $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Avec les images des vecteurs de la base canonique et la linéarité, on peut exprimer alors l'image de X en fonction de x, y et z.

Les méthodes sont alors les mêmes que plus haut.

2) et 3) Mêmes indications en faisant attentions aux espaces de départ et d'arrivée qui sont distincts (et pas de mêmes dimensions, donc u ne peut en aucun être à la fois injective et surjective…).

Exercice 5 *Endomorphismes*

1) Classique. On a une équivalence à prouver mais un sens est immédiat.

Ne pas oublier que $\text{Im} f\oplus\ker f=\text{Im} f+\ker f \iff \text{Im} f\cap\ker f=\{0\}$ et ne pas oublier non plus le théorème du rang et la formule de Grassmann.

2) Considérer $\tilde{g}:\text{Im} f\to E\,;\,x\mapsto g(x)$, la restriction de g à $\text{Im} f$. Déterminer $\ker\tilde{g}$ et $\text{Im}\,\tilde{g}$, puis appliquer le théorème du rang.

3) a. Ne pas oublier que $y\in\text{Im}\,p \iff p(y)=y$ et, pour la deuxième inclusion, remarquer que si $p(y)=2y$, alors $y=p\left(\frac{1}{2}y\right)\in\text{Im}\,p$…

b. Montrer que $f^2=0$ revient à montrer que $\forall\, x\in E$, $f^2(x)=0$. Ne pas oublier que $E=\text{Im}\,p\oplus\ker p$.

Réponses

Dimension quelconque

Exercice 1 *Espaces vectoriels*

1) On a ici $E=\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}),\forall x\in\mathbb{R}, f(x+3)=f(x)\}$.

- $E\subset\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et la fonction nulle appartient à E, donc E est non vide.
- $\forall (f,g)\in E^2$ et $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, on a $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$(\lambda f+\mu g)(x+3)=\lambda f(x+3)+\mu g(x+3)=\lambda f(x)+\mu g(x)=(\lambda f+\mu g)(x).$$

Donc $\lambda f+\mu g\in E$.

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, donc E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2) On a ici $E=\left\{f\in\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K}),\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x-2y)=f(2x+y)\right\}$.

- $E\subset\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et la fonction nulle appartient à E, donc E est non vide.
- $\forall (f,g)\in E^2$ et $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, on a $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$(\lambda f+\mu g)(x-2y)=\lambda f(x-2y)+\mu g(x-2y)=\lambda f(2x+y)+\mu g(2x+y)=(\lambda f+\mu g)(2x+y).$$

Donc $\lambda f+\mu g\in E$.

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, donc E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3) $E=\{f\in\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{K}), f'(0)=0\}$.

- $E\subset\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ et la fonction nulle appartient à E, donc E est non vide.
- $\forall (f,g)\in E^2$ et $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\lambda f+\mu g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$(\lambda f+\mu g)'(0)=\lambda f'(0)+\mu g'(0)=\lambda\times 0+\mu\times 0=0.$$

Donc $\lambda f+\mu g\in E$.

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{K})$, donc E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4) $E=\left\{u\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}},\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_{n+2}+u_n+u_0\right\}$.

- $E\subset\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et la suite nulle appartient à E, donc E est non vide.
- $\forall (u,v)\in E^2$ et $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, on a $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(\lambda u+\mu v)_{n+1}&=\lambda u_{n+2}+\mu v_{n+2}+\lambda u_n+\mu v_n+\lambda u_0+\mu v_0\\&=\lambda(u_{n+2}+u_n+u_0)+\mu(v_{n+2}+v_n+v_0)=\lambda u_{n+1}+\mu v_{n+1}=(\lambda u+\mu v)_{n+1}\end{aligned}$$

Donc $\lambda u+\mu v\in E$.

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, donc E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

5) $E=\left\{u\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}},\lim u=u_0\right\}$.

- $E\subset\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et la suite nulle appartient à E, donc E est non vide.
- $\forall\,(u,v)\in E^2$ et $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, $\lambda u+\mu v$ converge et :

$$\lim(\lambda u+\mu v)=\lambda\lim u+\mu\lim v=\lambda u_0+\mu v_0=(\lambda u+\mu v)_0.$$

  Donc $\lambda u+\mu v\in E$.

Ainsi, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, donc E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exercice 2 *Espaces supplémentaires*

1) On a vu dans le cours que F est un sous-espace vectoriel de E (toute combinaison linéaire de suites de limite nulle est de limite nulle). Par ailleurs, $G\subset E$ (une suite constante converge), $0_{\mathbb{N}}\in G$, et toute combinaison linéaire de suites constantes est constante, donc G est un sous-espace vectoriel de E.

Alors :

- $\forall\,u\in F\cap G$, u est constante ($u\in G$) donc $\exists\,a\in\mathbb{R}$ tel que $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_n=a$ et $\lim u=a=0$ car $u\in F$. Ainsi, $F\cap G=\{0_{\mathbb{N}}\}$ et $F+G=F\oplus G$.
- $\forall\,u\in E$, on a $\lim u=\ell\in\mathbb{R}$ et $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_n=v_n+w_n$ avec $v_n=u_n-\ell$ et $w_n=\ell$.

  On a $\lim v=\ell-\ell=0$ donc $v\in F$ et $w\in G$. Ainsi, $u\in F+G=F\oplus G$.

Finalement, on a bien $E=F\oplus G$.

2) On a $E=\left\{u\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\setminus\exists\,N\in\mathbb{N},\forall\,n\geq N,u_n=u_N\right\}$ et $F=\left\{u\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\setminus\exists\,N\in\mathbb{N},\forall\,n\geq N,u_n=0\right\}$.

On a $F\subset E$ (car toute suite nulle apcr est constante à partir du même rang) et $0_{\mathbb{N}}\in F$.
De plus, $\forall\,(u,v)\in F^2$ et $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, $\exists\,(N_u,N_v)\in\mathbb{N}^2$ tel que $\forall\,n\geq N_u$, $u_n=0$ et $\forall\,n\geq N_v$, $v_n=0$.
Alors, en posant $N=\max(N_u,N_v)$, on a $\forall\,n\geq N$, $u_n=v_n=0$, donc $\lambda u_n+\mu v_n=0$ et ainsi, $\lambda u+\mu v\in F$.
Donc, F est un sous-espace vectoriel de E.
On montre comme dans la question 1 que G est un sous-espace vectoriel de E.
Alors :

- $\forall\,u\in F\cap G$, u est constante donc $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0$ ($u\in G$) et $\exists\,N\in\mathbb{N}$, $\forall\,n\geq N$, $u_n=0$ ($u\in F$).

  Ainsi, $u_N=u_0=0$ et $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_n=u_0=0$. Donc, $F\cap G=\{0_{\mathbb{N}}\}$ et $F+G=F\oplus G$.
- $\forall\,u\in E$, $\exists\,N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\,n\geq N$, $u_n=u_N$. Posons $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_n-u_N$ et $w_n=u_N$.
  On a immédiatement $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_n=v_n+w_n$ et $w\in G$. De plus, $\forall\,n\geq N$, $v_n=u_N-u_N=0$ donc $v\in F$.

  Ainsi, $u\in F+G=F\oplus G$.

Finalement, on a bien $E=F\oplus G$.

Exercice 3 *Familles libres*

1) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre revient à montrer que toute sous-famille finie extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

Autrement dit que $\forall\,(n_1,n_2,...,n_p)\in\mathbb{N}^p$ avec $p\in\mathbb{N}^*$, la famille $(f_{n_1},f_{n_2},...,f_{n_p})$ est libre. Pour prouver cela, il suffit de prouver que la famille $(f_0,f_1,...,f_N)$ est libre avec $N=\max(n_1,n_2,...,n_p)$ (car toute famille extraite d'une famille libre est libre). Ceci montre que pour prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre, il suffit de prouver que $\forall\,N\in\mathbb{N}$, $(f_0,f_1,...,f_N)$ est libre.

Prouvons ceci par récurrence sur N.

- Pour $N=0$, on a $f_0 : x\mapsto e^{0x}=1$ donc f_0 est constante et non nulle donc (f_0) est libre.
- Supposons que pour $N\in\mathbb{N}$, la famille $(f_0,f_1,...,f_N)$ est libre.

  Soit alors $(\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_N,\lambda_{N+1})\in\mathbb{R}^{N+2}$ tel que $\lambda_0f_0+\lambda_1f_1+...+\lambda_Nf_N+\lambda_{N+1}f_{N+1}=0$.

  On a alors $\forall\,x\in\mathbb{R}$:

$$\lambda_0f_0(x)+\lambda_1f_1(x)+...+\lambda_Nf_N(x)+\lambda_{N+1}f_{N+1}(x)=\lambda_0+\lambda_1e^x+...+\lambda_Ne^{Nx}+\lambda_{N+1}e^{(N+1)x}=0.$$

  Alors, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left[\lambda_0f_0(x)+\lambda_1f_1(x)+...+\lambda_Nf_N(x)+\lambda_{N+1}f_{N+1}(x)\right]e^{-(N+1)x}\right)=0$, soit :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\lambda_0e^{-(N+1)x}+\lambda_1e^{-Nx}+...+\lambda_Ne^{-x}+\lambda_{N+1}\right)=\lambda_{N+1}=0.$$

  On a ainsi $\lambda_{N+1}=0$, donc $\lambda_0f_0+\lambda_1f_1+...+\lambda_Nf_N=0$. Or, par HR, la famille $(f_0,f_1,...,f_N)$ est libre, donc $\lambda_0=\lambda_1=...=\lambda_N=0$ et ainsi :

$$\lambda_0f_0+\lambda_1f_1+...+\lambda_Nf_N+\lambda_{N+1}f_{N+1}=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_0=\lambda_1=...=\lambda_N=\lambda_{N+1}=0.$$

  Donc, la famille $(f_0,f_1,...,f_N,f_{N+1})$ est libre et la propriété est vraie au rang $N+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie $\forall\,N\in\mathbb{N}$.

Ceci prouve que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

2) On a $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_{1,n}=\sin\left(\dfrac{n\pi}{1}\right)=\sin(n\pi)=0$. Donc, $u_1=0_{\mathbb{N}}$ ce qui implique immédiatement que la famille $(u_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas libre.

Exercice 4 *Applications linéaires*

1) $\forall\,(v,w)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\times\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, on a :

$$u(\lambda v+\mu w)=\left((\lambda v+\mu w)_0,(\lambda v+\mu w)_1\right)=\left(\lambda v_0+\mu w_0,\lambda v_1+\mu w_1\right)=\lambda(v_0,v_1)+\mu(w_0,w_1)=\lambda u(v)+\mu u(w).$$

Donc :

$$\boxed{\text{u est linéaire.}}$$

On a $\forall\,v\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $u(v)=(0,0)\;\Leftrightarrow\;(v_0,v_1)=(0,0)\;\Leftrightarrow\;v_0=v_1=0$, donc :

$$\boxed{\ker u=\left\{v\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}},v_0=v_1=0\right\}}$$

Par ailleurs, $\forall\,(a,b)\in\mathbb{C}^2$, soit $v\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $v_0=a$, $v_1=b$ et $\forall\,n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geq 2$, $v_n=0$.

On a alors clairement $u(v)=(v_0,v_1)=(a,b)$ et ainsi, u est surjective, donc :

$$\boxed{\operatorname{Im} u=\mathbb{C}^2}$$

2) Ici, u est linéaire par linéarité de la dérivation.

On a $\forall\,f\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u(f)=0 \;\Leftrightarrow\; f'=0 \;\Leftrightarrow\;$ f constante, donc :

$$\boxed{\ker u=\text{ensemble des fonctions constantes}.}$$

Par ailleurs, $\forall\,g\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, si f est une primitive de g, alors $g=f'=u(f)$, donc, u est surjective, et :

$$\boxed{\operatorname{Im} u=\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$$

3) Ici, u est linéaire par linéarité de l'intégrale.

On a $\forall\,f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $u(f)$ est la primitive de f qui s'annule en 0. Donc, si $u(f)=F=0$, alors $F'=f=0$. Ainsi, u est injective avec :

$$\boxed{\ker u=\{0\}}$$

Par ailleurs, $\forall\,f\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $u(f)=F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $F(0)=0$.

Réciproquement, $\forall\,F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tel que $F(0)=0$, on a $\forall\,x\in\mathbb{R}$, $F(x)=\int_0^x F'(t)dt$ avec $F'\in\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, donc $F=u(F')$. Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Im} u=\left\{F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\setminus F(0)=0\right\}}$$

Exercice 5 *Endomorphismes*

1) Procédons par double inclusion.

- $\ker(f\circ f)\subset E \Rightarrow f\left(\ker(f\circ f)\right)\subset f(E)=\operatorname{Im} f$;
- $x\in\ker(f\circ f) \Leftrightarrow (f\circ f)(x)=f\left(f(x)\right)=0 \Leftrightarrow f(x)\in\ker f$. Ainsi, $f\left(\ker(f\circ f)\right)\subset\ker f$.

On a alors $f\left(\ker(f\circ f)\right)\subset\ker f\cap\operatorname{Im} f$.

Réciproquement, $\forall\,x\in\ker f\cap\operatorname{Im} f$, on a $x\in\ker f$ donc $f(x)=0$ et $x\in\operatorname{Im} f$ donc $\exists\,z\in E$, $x=f(z)$.

Alors, on a $f(x)=f\circ f(z)=0$ donc $z\in\ker(f\circ f)$ et donc $x=f(z)\in f\left(\ker(f\circ f)\right)$.

On a alors $\ker f\cap\operatorname{Im} f\subset f\left(\ker(f\circ f)\right)$.

Finalement :

$$\boxed{f\left(\ker(f\circ f)\right)=\ker f\cap\operatorname{Im} f}$$

2) On a :

$$f\circ f=0 \iff \forall x\in E,\ f\circ f(x)=f\big(f(x)\big)=0 \iff \forall x\in E,\ f(x)\in\ker f \iff f(E)=\operatorname{Im} f\subset\ker f\ .$$

3) Si $f^4=f^2$, alors en posant $p=f^2\in\mathcal{L}(E)$, on a $p^2=p$ donc p est un projecteur et $E=\ker p\oplus\operatorname{Im} p$, soit :

$$E=\ker f^2\oplus\operatorname{Im} f^2\ .$$

Comme $\mathrm{id}-f^2=\mathrm{id}-p$ est le projecteur associé à p, on a $\ker(\mathrm{id}-f^2)=\operatorname{Im} f^2$ et avec $\ker(\mathrm{id}-f^2)=\ker(f^2-\mathrm{id})$, on a bien :

$$\boxed{E=\ker f^2\oplus\ker(f^2-\mathrm{id})}$$

Pour la deuxième égalité, procédons par analyse-synthèse.

Soit $x\in E$.

Analyse :

Si $E=\ker(f-\mathrm{id})\oplus\ker(f^3+f^2)$, alors $\exists\,(x_1,x_2)\in\ker(f-\mathrm{id})\times\ker(f^3+f^2)$ tel que $x=x_1+x_2$.

On a :

- $x_1\in\ker(f-\mathrm{id})$ donc $f(x_1)=x_1$ (ce qui implique immédiatement que $f^3(x_1)=f^2(x_1)=x_1$) ;
- $x_2\in\ker(f^3+f^2)$ donc $(f^3+f^2)(x_2)=f^3(x_2)+f^2(x_2)=0$.

Alors, $f^2(x)=x_1+f^2(x_2)$ et $f^3(x)=x_1+f^3(x_2)$ donc $f^2(x)+f^3(x)=2x_1+f^2(x_2)+f^3(x_2)=2x_1$, soit :

$$x_1=\frac{1}{2}\big(f^2(x)+f^3(x)\big)\ \text{ et }\ x_2=x-x_1=x-\frac{1}{2}\big(f^2(x)+f^3(x)\big).$$

Ainsi, si la décomposition existe, elle est unique.

Synthèse :

Posons $x_1=\frac{1}{2}\big(f^2(x)+f^3(x)\big)$ et $x_2=x-\frac{1}{2}\big(f^2(x)+f^3(x)\big)=x-x_1$. On a immédiatement $x=x_1+x_2$ et :

- $f(x_1)=\frac{1}{2}\big(f^3(x)+f^4(x)\big)=\frac{1}{2}\big(f^3(x)+f^2(x)\big)=x_1$ donc $x_1\in\ker(f-\mathrm{id})$;
- $f^3(x_2)+f^2(x_2)=f^3(x)-f^3(x_1)+f^2(x)-f^2(x_1)=f^3(x)+f^2(x)-\big(f^2(x)+f^3(x)\big)=0$ et $x_2\in\ker(f^3+f^2)$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{E=\ker(f-\mathrm{id})\oplus\ker(f^3+f^2)}$$

4) On veut prouver que $f\big(\ker g\big)\subset\ker g$ et $f\big(\operatorname{Im} g\big)\subset\operatorname{Im} g$.

- $\forall x\in\ker g$, $g(x)=0$ et $g\big(f(x)\big)=(g\circ f)(x)=(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f(0)=0$ donc $f(x)\in\ker g$. Ainsi :

$$\boxed{f\big(\ker g\big)\subset\ker g}$$

- On a $f\big(\operatorname{Im} g\big)=f\big(g(E)\big)=f\circ g(E)=g\circ f(E)=g\big(f(E)\big)\subset g(E)=\operatorname{Im} g$. Ainsi :

$$\boxed{f\big(\operatorname{Im} g\big)\subset\operatorname{Im} g}$$

Exercice 6 *Projecteurs et symétries*

Remarquons déjà que p et q sont linéaires, donc $p-q$ l'est aussi et, comme p et q commutent :

$$(p-q)^2 = p^2 - pq - qp + q^2 = p + q - 2pq.$$

1) On a :

$$p-q \text{ est une symétrie } \Leftrightarrow (p-q)^2 = \mathrm{id} \Leftrightarrow p+q-2pq = \mathrm{id}.$$

Alors, si $p+q-2pq=\mathrm{id}$, on obtient en composant à gauche par p :

$$p^2 + pq - 2p^2q = p \Leftrightarrow pq = 0 = qp.$$

Et $p+q-2pq=\mathrm{id}$ devient $p+q=\mathrm{id}$, autrement dit, p et q sont associés.

Réciproquement, si p et q sont associés, alors $q=\mathrm{id}-p$, donc $pq = p(\mathrm{id}-p) = p - p^2 = p - p = 0$ et :

$$(p-q)^2 = p+q-2pq = \mathrm{id}.$$

Ainsi, si p et q sont associés, alors $p-q$ est une symétrie.

Finalement, si p et q commutent, on a bien :

$$\boxed{p-q \text{ est une symétrie } \Leftrightarrow \text{ p et q sont associés.}}$$

2) On a :

$$p-q \text{ est un projecteur } \Leftrightarrow (p-q)^2 = p+q-2pq = p-q \Leftrightarrow q = pq.$$

Alors, si $q=pq$, on a $\mathrm{Im}\, q = q(E) = pq(E) = p\left(\mathrm{Im}\, q\right) \subset \mathrm{Im}\, p$, donc $\underline{\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p}$.

Réciproquement, supposons que $\mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p$. Alors, $\forall\, x \in E$:

$$q(x) \in \mathrm{Im}\, q \Rightarrow q(x) \in \mathrm{Im}\, p \Rightarrow p\big(q(x)\big) = q(x).$$

Ainsi, $\forall\, x \in E$, $pq(x) = q(x)$, soit $pq = q$ et donc $p-q$ est un projecteur.

Finalement, si p et q commutent, on a bien :

$$\boxed{p-q \text{ est une projecteur } \Leftrightarrow \mathrm{Im}\, q \subset \mathrm{Im}\, p.}$$

Dimension finie

Exercice 1 *Espaces vectoriels, bases*

1) Posons $e_1 = (1,2,3)$, $e_2 = (-1,0,2)$ et $e_3 = (0,2,-3)$.

On alors $E = \mathrm{Vect}\left(e_1, e_2, e_3\right)$, qui est par définition un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Etudions la liberté de (e_1, e_2, e_3). Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, soit :

$$a\begin{vmatrix}1\\2\\3\end{vmatrix} + b\begin{vmatrix}-1\\0\\2\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix}0\\2\\-3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}a-b\\2a+2c\\3a+2b-3c\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a-b=0\\2a+2c=0\\3a+2b-3c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=a\\c=-a\\8a=0\end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=0\,/$$

Ainsi, la famille (e_1, e_2, e_3) est libre. Elle contient 3 vecteurs et $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, donc c'est une base de $\mathbb{R}^3$ et :

$$\boxed{E = \mathbb{R}^3}$$

2) $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4,\ x+y=z+t \text{ et } x-y+z-t=0\}\subset\mathbb{R}^4$ et $(0,0,0,0)\in E$. On a $\forall\,(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$:

$$(x,y,z,t)\in E \iff \begin{cases}x+y=z+t\\ x-y+z-t=0\end{cases} \iff \begin{cases}x+y=z+t\\ x-y=t-z\end{cases} \iff \begin{cases}x=t\\ y=z\end{cases} \iff \begin{vmatrix}x\\y\\z\\t\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t\\z\\z\\t\end{vmatrix}=t\begin{vmatrix}1\\0\\0\\1\end{vmatrix}+z\begin{vmatrix}0\\1\\1\\0\end{vmatrix}$$

Donc, en posant $e_1=(1,0,0,1)$ et $e_2=(0,1,1,0)$, on a $(x,y,z,t)\in E \iff (x,y,z,t)=te_1+ze_2$, donc :

$$E=\mathrm{Vect}(e_1,e_2).$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^4\text{, de dimension 2 et de base } (e_1,e_2) \text{ avec } e_1=\begin{vmatrix}1\\0\\0\\1\end{vmatrix} \text{ et } e_2=\begin{vmatrix}0\\1\\1\\0\end{vmatrix}.}$$

3) $E=\{(z,z')\in\mathbb{C}^2,\ 3z+2z'=0\}\subset\mathbb{C}^2$ et $(0,0)\in E$. De plus, $\forall\,(z,z')\in\mathbb{C}^2$, on a :

$$(z,z')\in E \iff 3z+2z'=0 \iff z'=-3\frac{z}{2} \iff (z,z')=(z,-3\frac{z}{2})=\frac{z}{2}(2,-3) \iff (z,z')\in\mathrm{Vect}((2,-3)).$$

Donc, $E=\mathrm{Vect}((2,-3))$ et ainsi :

$$\boxed{E \text{ est une droite vectorielle dirigée par } (2,-3).}$$

4) Les solutions de l'équation différentielle $y'=2y$ sont les fonctions $t\mapsto ke^{2t}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Notons $f_o : t\mapsto e^{2t}$. On a alors :

$$E=\{f\in\mathcal{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ f'=2f\}=\{kf_o,\ k\in\mathbb{R}\}=\mathrm{Vect}(f_o).$$

Donc :

$$\boxed{E \text{ est une droite vectorielle dirigée par } f_o : t\mapsto e^{2t}.}$$

5) $E=\{u\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}\setminus\forall\,n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}-4iu_{n+1}-3u_n=0\}$ est l'ensemble des suites complexes récurrentes linéaires doubles vérifiant $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2}-4iu_{n+1}-3u_n=0$.

L'équation caractéristique associée à cette relation est $r^2-4ir-3=0$ dont les racines sont i et 3i, donc :

$$\forall\,n\in\mathbb{N},\ u_n=\lambda i^n+\mu(3i)^n \text{ avec } (\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2.$$

En posant $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $a_n=i^n$ et $b_n=(3i)^n$, on a $u\in E$ si et seulement si $u=\lambda a+\mu b$ avec $(\lambda,\mu)\in\mathbb{C}^2$, donc :

$$E=\mathrm{Vect}(a,b).$$

Donc :

$$\boxed{E \text{ est un plan vectoriel de base } \left((i^n)_{n\in\mathbb{N}},(3^n i^n)_{n\in\mathbb{N}}\right).}$$

Exercice 2 *Bases*

1) On a $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ donc la famille (e_1, e_2, e_3) est une base si et seulement si elle est libre.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 = 0$, soit :

$$a\begin{vmatrix}1\\-1\\2\end{vmatrix} + b\begin{vmatrix}-1\\-2\\0\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix}3\\-2\\3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+3c=0\\ a+2b+2c=0\\ 2a+3c=0\end{cases} \Leftrightarrow \quad a=b=c=0.$$

Donc la famille est libre et ainsi :

$$\boxed{(e_1, e_2, e_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3.}$$

2) On a $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ donc la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base si et seulement si elle est libre.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4 = 0$, soit :

$$a\begin{vmatrix}1\\-1\\2\\1\end{vmatrix} + b\begin{vmatrix}-1\\0\\-2\\0\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix}0\\1\\-2\\3\end{vmatrix} + d\begin{vmatrix}1\\1\\1\\1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+d=0\\ -a+c+d=0\\ 2a-2b-2c+d=0\\ a+3c+d=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c+d\\ b=a+d=c+2d\\ -2c-d=0\\ 4c+2d=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-c\\ b=-3c\\ d=-2c\end{cases}.$$

Donc $e_1 + 3e_2 - e_3 + 2e_4 = 0$ et la famille est liée et ainsi :

$$\boxed{(e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^4.}$$

3) On a $\dim \mathbb{R}^4 = 4$ donc la famille (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base si et seulement si elle est libre.

Or, $e_4 = e_1 - 2e_2 + 3e_3$ donc la famille est liée et ainsi :

$$\boxed{(e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}^4.}$$

4) On a $\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$ donc la famille (f, g, h) est une base si et seulement si elle est libre.

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $af + bg + ch = 0$, soit $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $a(x+1)^2 + b(x+1)(x-1) + c(x-1)^2 = 0$.

En particulier :

- pour $x = 1$, on obtient $4a = 0$, soit $a = 0$;
- pour $x = -1$, on obtient $4c = 0$, soit $c = 0$;
- pour $x = 0$, on obtient $a - b + c = 0$, soit $b = 0$ avec $a = c = 0$.

Ainsi, $a = b = c = 0$ donc (f, g, h) est libre, d'où :

$$\boxed{(f, g, h) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[x].}$$

5) On a $\dim \mathbb{R}_2[x]=3$ donc la famille (f,g,h) est une base si et seulement si elle est libre.

On a $\forall\, x\in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} f(x)=(x+1)^2=x^2+2x+1 \\ g(x)=(x+2)^2=x^2+4x+4 \\ h(x)=x^2-2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2f(x)-g(x)=x^2-2=h(x).$$

Donc, $h=2f-g$ et la famille (f,g,h) est liée, d'où :

$$\boxed{(f,g,h) \text{ n'est pas une base de } \mathbb{R}_2[x].}$$

Exercice 3 *Espaces supplémentaires*

1) Notons (e_1,e_2,e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Remarquons que $\forall\,(x,y,z)\in \mathbb{R}^3$, on a :

- $(x,y,z)\in F \iff z=x \iff (x,y,z)=(x,y,x)=x(e_1+e_3)+ye_2$, donc $F=\mathrm{Vect}\big(e_1+e_3,e_2\big)$.

  Les vecteurs e_1+e_3 et e_2 n'étant pas colinéaires, F est un plan vectoriel (de dimension 2).

- $(x,y,z)\in F \iff \begin{cases} y=x \\ z=0 \end{cases} \iff (x,y,z)=(x,x,0)=x(e_1+e_2)$, donc $G=\mathrm{Vect}\big(e_1+e_2\big)$.

  Donc G est une droite vectorielle (de dimension 1).

Soit $(x,y,z)\in F\cap G$.

D'après ce qui précède, on a alors $\begin{cases} z=x \\ y=x \\ z=0 \end{cases}$, ce qui donne immédiatement $x=y=z=0$. Ainsi :

$$F\cap G=\{0\}.$$

Alors, $F+G=F\oplus G\subset \mathbb{R}^3$ et $\dim(F\oplus G)=\dim F+\dim G=2+1=3=\dim \mathbb{R}^3$ donc :

$$\boxed{F\oplus G=\mathbb{R}^3}$$

2) $F=\big\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4 \setminus x+y+z=y+z+t=0\big\}$ donc :

$$(x,y,z,t)\in E \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ y+z+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=-x-y \\ t=x \end{cases} \iff \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \\ -x-y \\ x \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

En posant $e_1=(1,0,-1,1)$ et $e_2=(0,1,-1,0)$, on a $F=\mathrm{Vect}\big(e_1,e_2\big)$ et comme e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires, F est un plan vectoriel. Tout supplémentaire de F est donc un plan et pour en déterminer un, il suffit de compléter (e_1,e_2) par deux vecteurs e_3 et e_4 en une base de $\mathbb{R}^4$. Pour que (e_1,e_2,e_3,e_4) soit une base de $\mathbb{R}^4$ (de dimension 4), il suffit que la famille (e_1,e_2,e_3,e_4) soit libre.

Posons simplement $e_3=(1,0,0,0)$ et $e_4=(0,1,0,0)$ (autrement dit, e_3 et e_4 sont les deux premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^4$) et étudions la liberté de (e_1,e_2,e_3,e_4).

Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que $ae_1+be_2+ce_3+de_4=0$, soit :

$$a\begin{vmatrix}1\\0\\-1\\1\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}0\\1\\-1\\0\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}1\\0\\0\\0\end{vmatrix}+d\begin{vmatrix}0\\1\\0\\0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\\0\end{vmatrix}\iff\begin{cases}a+c=0\\b+d=0\\-a-b=0\\a=0\end{cases}\iff\begin{cases}c=-a\\d=-b\\b=-a\\a=0\end{cases}\iff a=b=c=d=0.$$

Donc, (e_1,e_2,e_3,e_4) est libre, ce qui prouve que c'est une base de $\mathbb{R}^4$ et $E=F\oplus\mathrm{Vect}(e_3,e_4)$. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Vect}\big((1,0,0,0),(0,1,0,0)\big)\text{ est un supplémentaire de F dans }\mathbb{R}^4.}$$

Exercice 4 *Applications linéaires, noyaux, images, rang*

I - 1) $\forall\big((x,y,z),(x',y',z')\big)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ et $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}u\big(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\big)&=u\big((\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')\big)\\&=(\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y',\lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z',\lambda z+\mu z'+\lambda x+\mu x')\\&=\big(\lambda(x+y)+\mu(x'+y'),\lambda(y+z)+\mu(y'+z'),\lambda(z+x)+\mu(z'+x')\big)\\&=\lambda(x+y,y+z,z+x)+\mu(x'+y',y'+z',z'+x')\\&=\lambda u\big((x,y,z)\big)+\mu u\big((x',y',z')\big)\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{u\text{ est linéaire.}}$$

On a :

$$u\big((x,y,z)\big)=(x+y,y+z,z+x)=(0,0,0)\iff\begin{cases}x+y=0\\y+z=0\\z+x=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-y\\z=-y\\-2y=0\end{cases}\iff x=y=z=0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\ker u=\{(0,0,0)\}}$$

Ainsi, u est injective et comme $u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, u est surjective, donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,u=\mathbb{R}^3\text{ et }\mathrm{rg}(u)=3}$$

2) $\forall\big((x,y,z),(x',y',z')\big)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ et $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}u\big(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\big)&=u\big((\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z')\big)\\&=\begin{vmatrix}\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y'+\lambda z+\mu z'\\\lambda x+\mu x'+2(\lambda y+\mu y')+3(\lambda z+\mu z')\\2(\lambda x+\mu x')+3(\lambda y+\mu y')+4(\lambda z+\mu z')\\3(\lambda x+\mu x')+4(\lambda y+\mu y')+5(\lambda z+\mu z')\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda(x+y+z)+\mu(x'+y'+z')\\\lambda(x+2y+3z)+\mu(x'+2y'+3z')\\\lambda(2x+3y+4z)+\mu(2x'+3y'+4z')\\\lambda(3x+4y+5z)+\mu(3x'+4y'+5z')\end{vmatrix}\end{aligned}$$

Donc :

$$u\big(\lambda(x,y,z)+\mu(x',y',z')\big)=\lambda\left|\begin{array}{l}x+y+z\\x+2y+3z\\2x+3y+4z\\3x+4y+5z\end{array}\right.+\mu\left|\begin{array}{l}x'+y'+z'\\x'+2y'+3z'\\2x'+3y'+4z'\\3x'+4y'+5z'\end{array}\right.=\lambda u\big((x,y,z)\big)+\mu u\big((x',y',z')\big).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{u est linéaire.}}$$

On a $u\big((x,y,z)\big)=(x+y+z,x+2x+3z,2x+3y+4z,3x+4y+5z)=(0,0,0,0)$ revient à :

$$\begin{cases}x+y+z=0\\x+2y+3z=0\\2x+3y+4z=0\\3x+4y+5z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=0\\y+2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z\\y=-2z\end{cases}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x\\y=\\z\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}z\\-2z=z\\z\end{array}\right.\left|\begin{array}{l}1\\-2\\1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}x\\y\in \mathrm{Vect}\\z\end{array}\right.\left(\left|\begin{array}{l}1\\-2\\1\end{array}\right.\right).$$

Donc :

$$\boxed{\ker u=\mathrm{Vect}\left(\left|\begin{array}{l}1\\-2\\1\end{array}\right.\right)}$$

On a alors $\dim(\ker u)=1$ donc, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\,u)=\dim\mathbb{R}^3-\dim(\ker u)=3-1=2$.

On a $u\big((1,0,0)\big)=\left|\begin{array}{l}1\\1\\2\\3\end{array}\right.$ et $u\big((0,1,0)\big)=\left|\begin{array}{l}1\\2\\3\\4\end{array}\right.$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,u=\mathrm{Vect}\left(\left|\begin{array}{l}1\\1\\2\\3\end{array}\right.,\left|\begin{array}{l}1\\2\\3\\4\end{array}\right.\right)\text{ et } \mathrm{rg}(u)=2}$$

3) $\forall\big((x,y,z,t),(x',y',z',t')\big)\in\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4$ et $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}u\big(\lambda(x,y,z,t)+\mu(x',y',z',t)\big)&=u\big((\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z',\lambda t+\mu t')\big)\\&=\big(\lambda x+\mu x'+\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z'-\lambda t-\mu t'\big)\\&=\lambda(x+y,z-t)+\mu(x'+y',z'-t')\\&=\lambda u\big((x,y,z,t)\big)+\mu u\big((x',y',z',t)\big)\end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\text{u est linéaire.}}$$

On a :

$$u\big((x,y,z,t)\big)=(x+y,z-t)=(0,0) \iff \begin{cases} x+y=0 \\ z-t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ t=z \end{cases} \iff \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ -x \\ z \\ z \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\ker u = \mathrm{Vect}\left(\begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}\right)}$$

On a $\dim(\ker u)=2$ donc, d'après le théorème du rang, $\mathrm{rg}(u)=\dim \mathbb{R}^4-\dim(\ker u)=4-2=2=\dim \mathbb{R}^2$. Comme u est à images dans $\mathbb{R}^2$, on peut conclure que u est surjective et :

$$\boxed{\mathrm{Im}\, u=\mathbb{R}^2 \text{ et } \mathrm{rg}(u)=2}$$

4) $\forall (P_1,P_2)\in \mathbb{R}_2[x]\times\mathbb{R}_2[x]$ et $\forall (\lambda,\mu)\in \mathbb{R}^2$, posons $u(P_1)=Q_1$, $u(P_2)=Q_2$ et $u(\lambda P_1+\mu P_2)=Q$.

On a $\forall x\in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2x(\lambda P_1+\mu P_2)(x)-x^2(\lambda P_1+\mu P_2)'(x)=2x\big(\lambda P_1(x)+\mu P_2(x)\big)-x^2\big(\lambda P_1'(x)+\mu P_2'(x)\big) \\ &= \lambda\big(2xP_1(x)-x^2P_1'(x)\big)+\mu\big(2xP_2(x)-x^2P_2'(x)\big)=\lambda Q_1(x)+\mu Q_2(x) \end{aligned}$$

Donc $Q=\lambda Q_1+\mu Q_2$, soit $u(\lambda P_1+\mu P_2)=\lambda u(P_1)+\mu u(P_2)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{u est linéaire.}}$$

Soit $\forall P\in \mathbb{R}_2[x]$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=ax^2+bx+c$. Si $u(P)=Q$, on a $\forall x\in\mathbb{R}$:

$$Q(x)=2xP(x)-x^2P'(x)=2x(ax^2+bx+c)-x^2(2ax+b)=bx^2+2cx.$$

Alors :

$$P\in\ker u \iff \forall x\in\mathbb{R},\ Q(x)=bx^2+2cx=0 \iff b=c=0 \iff \forall x\in\mathbb{R},\ P(x)=ax^2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\ker u=\mathrm{Vect}(A) \text{ avec } A:x\mapsto x^2.}$$

On vient de voir que $\forall P\in\mathbb{R}_2[x]$, si $\forall x\in\mathbb{R}$, $P(x)=ax^2+bx+c$ alors $\forall x\in\mathbb{R}$, $u(P)(x)=bx^2+2cx$, soit $u(P)=bA+2cB$ avec $A:x\mapsto x^2$ et $B:x\mapsto x$. Donc, $\mathrm{Im}\,u\subset\mathrm{Vect}(A,B)$.

Or, $\dim(\ker u)=1$, donc $\dim(\mathrm{Im}\,u)=\dim(\mathbb{R}_2[x])-\dim(\ker u)=3-1=2=\dim(\mathrm{Vect}(A,B))$. Ceci prouve que :

$$\boxed{\mathrm{Im}\,u=\mathrm{Vect}(A,B) \text{ avec } A:x\mapsto x^2 \text{ et } B:x\mapsto x\text{, et } \mathrm{rg}(u)=2.}$$

II - 1) Soit $X = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} f(X)=0 &\Leftrightarrow xf(e_1)+yf(e_2)+zf(e_3)=0 \\ &\Leftrightarrow x(e_1+e_2+e_3)+y(3e_1+2e_2)+z(e_2+3e_3)=0 \\ &\Leftrightarrow (x+3y)e_1+(x+2y+z)e_2+(x+3z)e_3=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3z \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow X=z(-3e_1+e_2+e_3) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\ker f = \mathrm{Vect}\left(-3e_1+e_2+e_3\right)}$$

On a alors $\dim\left(\ker f\right)=1$, donc $\mathrm{rg}(f)=\dim(\mathbb{R}^3)-\dim\left(\ker f\right)=3-1=2$. Comme $f(e_2)$ et $f(e_3)$ ne sont pas colinéaires, on peut écrire $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(f(e_2), f(e_3)\right)$. Ainsi :

$$\boxed{\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(3e_1+2e_2, e_2+3e_3\right) \text{ et } \mathrm{rg}(f)=2}$$

2) Soit $X = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4 \in \mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{aligned} u(X)=0 &\Leftrightarrow xu(e_1)+yu(e_2)+zu(e_3)+tu(e_4)=0 \\ &\Leftrightarrow x(f_1+f_2)+y(f_1-f_2)+z(2f_1-3f_2)+t(3f_1-2f_2)=0 \\ &\Leftrightarrow (x+y+2z+3t)f_1+(x-y-3z-2t)f_2=0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z+3t=0 \\ x-y-3z-2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}t \\ y=-\frac{5}{2}z-\frac{5}{2}t \end{cases} \\ &\Leftrightarrow X=\frac{z}{2}(e_1-5e_2+2e_3)-\frac{t}{2}(e_1+5e_2-2e_4) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\ker u = \mathrm{Vect}\left(e_1-5e_2+2e_3, e_1+5e_2-2e_4\right)}$$

On a alors $\dim\left(\ker u\right)=2$, donc $\mathrm{rg}(u)=\dim(\mathbb{R}^4)-\dim\left(\ker u\right)=4-2=2=\dim(\mathbb{R}^2)$.

Comme $\mathrm{Im}\, u \subset \mathbb{R}^2$, on a :

$$\boxed{\mathrm{Im}\, u = \mathbb{R}^2 \text{ et } \mathrm{rg}(u)=2}$$

3) On a $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left(u(e_1), u(e_2), u(e_3)\right)$. Or $u(e_1)+u(e_2)=u(e_3)$, donc $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left(u(e_1), u(e_2)\right)$.

Comme $u(e_1)=f_1+f_2$ et $u(e_2)=f_3+f_4$ ne sont pas colinéaires, on obtient :

$$\boxed{\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}\left(f_1+f_2, f_3+f_4\right) \text{ et } \mathrm{rg}(u)=2}$$

On a alors $\dim(\ker u) = \dim(\mathbb{R}^3) - \mathrm{rg}(u) = 3 - 2 = 1$. Or, comme $u(e_1) + u(e_2) = u(e_3)$, on a :

$$u(e_1) + u(e_2) - u(e_3) = u(e_1 + e_2 - e_3) = 0.$$

Donc, $e_1 + e_2 - e_3 \in \ker u$ qui est une droite, donc :

$$\boxed{\ker u = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 - e_3)}$$

Exercice 5 *Endomorphismes*

1) On veut $\mathrm{Im} f + \ker f = E \Leftrightarrow \mathrm{Im} f \oplus \ker f = E$. Le sens réciproque est immédiat.

Supposons que $\mathrm{Im} f + \ker f = E$. Alors :

$$\dim(\mathrm{Im} f + \ker f) = \dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f) - \dim(\mathrm{Im} f \cap \ker f) = \dim E.$$

Or, d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim E$, donc $\dim(\mathrm{Im} f \cap \ker f) = 0$, soit :

$$\mathrm{Im} f \cap \ker f = \{0\}.$$

Ceci implique immédiatement que :

$$\mathrm{Im} f + \ker f = \mathrm{Im} f \oplus \ker f = E.$$

2) Appelons $\tilde{g}$ la restriction de g à $\mathrm{Im} f$. On a $\tilde{g} : \mathrm{Im} f \to E\,;\, x \mapsto g(x)$ et :

- $x \in \ker \tilde{g} \;\Leftrightarrow\; x \in \mathrm{Im} f$ et $\tilde{g}(x) = g(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \mathrm{Im} f$ et $x \in \ker g \;\Leftrightarrow\; x \in \mathrm{Im} f \cap \ker g$.

  Donc $\underline{\ker \tilde{g} = \mathrm{Im} f \cap \ker g}$.
- $\mathrm{Im}\, \tilde{g} = \tilde{g}(\mathrm{Im} f) = g(\mathrm{Im} f) = g(f(E)) = (g \circ f)(E)$, soit $\underline{\mathrm{Im}\, \tilde{g} = \mathrm{Im}(g \circ f)}$.

Le théorème du rang appliqué à $\tilde{g}$ donne $\dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\ker \tilde{g}) + \dim(\mathrm{Im}\, \tilde{g})$, soit :

$$\dim(\mathrm{Im} f) = \dim(\mathrm{Im} f \cap \ker g) + \dim(\mathrm{Im}(g \circ f)).$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g \circ f) = \dim(\mathrm{Im} f \cap \ker g)}$$

3) a. $\forall\, x \in \ker p$, on a :

$$f(x) = p \circ f(x) - f \circ p(x) = p(f(x)) - f(p(x)) = p(f(x)) - f(0) = p(f(x)).$$

Donc $p(f(x)) = f(x)$, soit $f(x) \in \mathrm{Im}\, p$. Ceci prouve que :

$$\boxed{f(\ker p) \subset \mathrm{Im}\, p}$$

$\forall\, x \in \mathrm{Im}\, p$, on a $p(x) = x$ donc :

$$f(x) = p \circ f(x) - f \circ p(x) = p(f(x)) - f(p(x)) = p(f(x)) - f(x) \;\Rightarrow\; f(x) = \frac{1}{2} p(f(x)) = p\left(\frac{1}{2} f(x)\right).$$

Alors, $f(x) \in \mathrm{Im}\, p$, donc $p(f(x)) = f(x)$ et avec $2f(x) = p(f(x))$, on obtient $f(x) = 0$, soit $x \in \ker f$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\mathrm{Im}\, p \subset \ker f}$$

b. Comme $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$, on a $\forall\, x \in E,\ x = x_i + x_k$ avec $x_i \in \operatorname{Im} p$ et $x_k \in \ker p$. Alors :

$$f^2(x) = f^2(x_i) + f^2(x_k).$$

Comme $x_i \in \operatorname{Im} p \subset \ker f$, on a $f(x_i) = 0$ donc $f^2(x_i) = 0$.

Comme $f(x_k) \in f\left(\ker p\right) \subset \operatorname{Im} p \subset \ker f$, on a $f\left(f(x_k)\right) = 0$, soit $f^2(x_k) = 0$.

Ainsi, $\forall\, x \in E,\ f^2(x) = 0 + 0 = 0$ et donc :

$$\boxed{f^2 = 0}$$

Chapitre 16 - Polynômes - Entrainement

Exercice 1 *Vocabulaire*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quel est le degré, le coefficient dominant et le terme constant de chacun des polynômes suivants ?

$$P = (X+1)^n - (X-1)^n \qquad Q = (X^2+1)^n - (X^2-1)^n \qquad R = (X^n+1)^2 - (X^n-1)^2$$

Exercice 2 *Bases de $\mathbb{R}_n[X]$*

Dans chaque cas, montrer que la famille $F = (P_0, P_1, P_2, ..., P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

1) $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k + X^{k-1} + ... + X + 1$.
2) $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^n + X^{n-1} + ... + X^k$.

Exercice 3 *Equations*

Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ les équations d'inconnue(s) P et Q (le cas échéant) :

1) $P + P'' = 2XP'$.
2) $P + Q = PQ$.

Exercice 4 *Application linéaire avec des polynômes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ telle que $\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) = (X+1)P(X+1) - XP(X)$.
   Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer le noyau et l'image de f.
2) Même question avec $\forall\, P \in \mathbb{R}_n[X]$, $f(P) = (X+1)P' - P$.

Exercice 5 *Suite de polynômes*

On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$, $P_1 = 2X$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - X^2P_n$. Déterminer les P_n.

Exercice 6 *Division euclidienne*

Effectuer la division euclidienne de $P = X^5 + 2X^3 - X$ par Q dans les différents cas suivants :

a. $Q = X$
b. $Q = X^2$
c. $Q = X^3 - X$
d. $Q = X^4 - X^2 + 1$
e. $Q = X^5 - X^3 + 1$
f. $Q = X^6 - X^4 + X^2 - 1$
g. $Q = X^3 - (i+1)X + i$

Exercice 7 *Divisibilité*

1) Déterminer tous les polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par $X^2 - 1$ et divisant $X^4 - 1$.
2) Même question mais dans $\mathbb{C}[X]$.
3) Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que $X^2 + a$ divise $X^5 + aX^2 - X + a$.
4) Même question mais avec $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 8 *Factorisation*

Déterminer sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ la décomposition en facteurs irréductibles de P pour :

a. $P = X^3 + X^2 - 4X - 4$ b. $P = X^5 - 1$ c. $P = X^2 - 2(\cos\theta)X + 1$ d. $P = (X^2 + X + 1)^2 + 1$

Exercice 9 *Ordre de multiplicité*

Donner l'ordre de multiplicité de 1 dans $P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 *Système*

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ xyz = -1 \end{cases}$.

Indications

Exercice 1

Développer P, Q et R avec le binôme.

Exercice 2 *Bases de* $\mathbb{R}_n[X]$

1) Famille échelonnée en degrés.

2) Evaluer $P_k - P_{k+1}$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, puis montrer que $\text{Vect}(P_0, P_1, P_2, ..., P_n) = \text{Vect}(1, X, X^2, ..., X^n)$.

Exercice 3 *Equations*

1) Chercher les solutions sous la forme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ en distinguant les cas $n \leq 1$ et $n \geq 2$.

2) Remarquer que P et Q jouent le même rôle et que $P + Q = PQ \Leftrightarrow Q = P(Q-1) \Rightarrow P \mid Q$ …

Exercice 4 *Application linéaire avec des polynômes*

1) Attention, ne pas oublier de justifier l'aspect « endo » dans endomorphisme. Pour cela, on peut remarquer que f est à images dans $\mathbb{R}_n[X]$ si et seulement si $\forall\, k \in [\![0, n]\!]$, $f(X^k) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Pour déterminer le noyau et l'image de f, remarquer $\text{Im} f = \text{Vect}\big(f(1), f(X), f(X^2), ..., f(X^n)\big)$ et considérer la famille des $f(X^k)$.

2) Ici, il est simple de justifier que f est à images dans $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour le noyau, évaluer $f(P)$ avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et déduire de $f(P) = 0$ des relations liant les a_k.

Pour l'image, remarquer que la famille $\big(1, X+1, (X+1)^2, (X+1)^3, ..., (X+1)^n\big)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et que $\text{Im} f = \text{Vect}\big(f(1), f(X+1), f((X+1)^2), f((X+1)^3), ..., f((X+1)^n)\big)$.

Exercice 5 *Suite de polynômes*

Calculer les 6 ou 7 premiers termes de la suite, conjecturer une formule, puis la prouver par récurrence.

Exercice 6 *Division euclidienne*

Les a, b et f sont immédiats. Pour les autres cas, on a toujours $Q = X^\alpha - ...$. Ecrire alors $X^\alpha = Q + ...$ et remplacer X^α dans P.

Exercice 7 *Divisibilité*

1) Procéder par analyse-synthèse. Remarquer qu'une solution du problème s'écrit $P=(X^2-1)Q$ avec Q unitaire et que $X^4-1=(X^2-1)(X^2+1)$ donc Q divise X^2+1.

2) Même chose que ci-dessus, amis dans $\mathbb{C}[X]$, X^2+1 a quatre diviseurs unitaires.

3) X^2+a divise X^5+aX^2-X+a si et seulement si le reste de la division euclidienne de X^5+aX^2-X+a par X^2+a est nul.

4) Le fait que a puisse être complexe change-t-il quelque chose ici ?...

Exercice 8 *Factorisation*

Dans la plupart des cas, il est plus facile de commencer par factoriser dans $\mathbb{C}$ (tous les polynômes sont scindés) en trouvant les racines de P, puis d'associer les éventuelles racines non réelles et conjuguées pour obtenir la factorisation dans $\mathbb{R}$.

a. Il y a une racine évidente.
b. Racines cinquièmes de l'unité.
c. C'est un trinôme.
d. Ecrire $P=(X^2+X+1)^2-i^2$, puis utiliser l'identité remarquable a^2-b^2.

Exercice 9 *Ordre de multiplicité*

Calculer P' sous forme factorisée.

Exercice 10 *Système*

Remarquer que x, y et z jouent le même rôle dans le système et que $\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, x, y et z sont les racines de $(X-x)(X-y)(X-z)=X^3-(x+y+z)X^2+(xy+yz+zx)X-xyz$.

Pour calculer $xy+yz+zx$, développer $(x+y+z)^2$.

Réponses

Exercice 1

On a :

$$P=(X+1)^n-(X-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}(-1)^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[1-(-1)^k\right]X^{n-k}=2\sum_{\substack{k=0\\ k\text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}X^{n-k}.$$

Soit :

$$P=2nX^{n-1}+2\binom{n}{3}X^{n-3}+...+\left[1-(-1)^{n-1}\right]nX+\left[1-(-1)^n\right].$$

Donc :

$$\boxed{P \text{ est de degré } n-1\text{, de coefficient dominant } 2n \text{ et de terme constant } 1-(-1)^n.}$$

Alors, comme $Q=P(X^2)=2nX^{2n-2}+2\binom{n}{3}X^{2(n-3)}+...+\left[1-(-1)^{n-1}\right]nX^2+\left[1-(-1)^n\right]$:

$$\boxed{Q \text{ est de degré } 2n-2\text{, de coefficient dominant } 2n \text{ et de terme constant } 1-(-1)^n.}$$

Enfin, $R=(X^n+1)^2-(X^n-1)^2=(X^{2n}+2X^n+1)-(X^{2n}-2X^n+1)=4X^n$, donc :

$$\boxed{R \text{ est de degré } n\text{, de coefficient dominant 4 et de terme constant 0.}}$$

Exercice 2

1) On a $\forall\, k\in[\![0,n]\!]$, $\deg P_k=k$ donc *F* est une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Si $n=0$, alors $P_0=1$ et $F=(P_0)$ est bien une base de $\mathbb{R}_0[X]$.

Si $n\geq 1$, alors $P_n=X^n$ et $\forall\, k\in[\![0,n-1]\!]$, $P_k-P_{k+1}=X^k$, donc :

$$\mathrm{Vect}\left(P_0,P_1,P_2,...,P_{n-1},P_n\right)=\mathrm{Vect}\left(P_0-P_1,P_1-P_2,P_2-P_3,...,P_{n-1}-P_n,P_n\right)=\mathrm{Vect}\left(1,X,X^2,...,X^{n-1},X^n\right)=\mathbb{R}_n[X].$$

Ainsi, *F* est génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ et comme elle contient $n+1$ polynômes, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 3

1) Commençons par chercher les éventuelles solutions de degré au plus 1, donc de la forme $P=aX+b$.

On a alors $P+P''-2XP'=-aX+b=0$ donc $a=b=0$ et $P=0$ (et le polynôme nul est bien solution).

Cherchons maintenant les éventuelles solutions P de degré $n\geq 2$, soit $P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$.

On a alors :

$$\begin{aligned}P+P''-2XP' &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=2}^{n} k(k-1)a_k X^{k-2} - 2X\sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2}-(2k-1)a_k\right]X^k - (2n-1)a_n X^n - (2n-3)a_{n-1}X^{n-1}\end{aligned}$$

Donc $P+P''=2XP'$ si et seulement si :

$$\begin{cases}(2n-1)a_n=(2n-3)a_{n-1}=0 \\ (k+2)(k+1)a_{k+2}-(2k-1)a_k=0 \quad \forall\, k\in[\![0,n-2]\!]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a_n=a_{n-1}=0 \\ a_k=\dfrac{(k+2)(k+1)}{2k-1}a_{k+2} \quad \forall\, k\in[\![0,n-2]\!]\end{cases}$$

Ceci donne immédiatement $a_k=0$, $\forall\, k\in[\![0,n]\!]$ donc $P=0$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La seule solution est le polynôme nul.}}$$

2) Remarquons déjà que $(0,0)$ est solution et que si (P,Q) est solution, alors si $P=0$, $Q=0$ et réciproquement.

Soit alors (P,Q) une éventuelle solution telle que $P\neq 0$ et $Q\neq 0$. On a :

$$P+Q=PQ \;\Leftrightarrow\; \begin{cases}P=Q(P-1)\\ Q=P(Q-1)\end{cases} \;\Rightarrow\; Q\,|\,P \text{ et } P\,|\,Q.$$

Donc, P et Q sont associés, soit $Q=\lambda P$ avec $\lambda\in\mathbb{R}^*$. Alors :

$$P+Q=PQ \;\Leftrightarrow\; (\lambda+1)P=\lambda P^2 \;\Leftrightarrow\; \big(\lambda P-(\lambda+1)\big)P=0 \;\Leftrightarrow\; \lambda P-(\lambda+1)=0 \text{ (car } P\neq 0\text{)} \;\Leftrightarrow\; P=\frac{\lambda+1}{\lambda}.$$

Ainsi, P est constant et Q aussi avec $P=1+\dfrac{1}{\lambda}$ et $Q=\lambda P=1+\lambda$.

Réciproquement, si P et Q ont la forme ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned}P+Q&=1+\frac{1}{\lambda}+1+\lambda=2+\frac{1}{\lambda}+\lambda\\ PQ&=(1+\lambda)(1+\frac{1}{\lambda})=1+\lambda+\frac{1}{\lambda}+\lambda\frac{1}{\lambda}=2+\frac{1}{\lambda}+\lambda\end{aligned}$$

Donc $P+Q=PQ$.

Remarquons que si $\lambda=-1$, on retrouve $P=Q=0$ et finalement :

$$\boxed{\text{Les solutions sont les couples } (P,Q)=\left(1+\frac{1}{\lambda},1+\lambda\right) \text{ avec } \lambda\in\mathbb{R}^*.}$$

Exercice 4

1) $\forall (P,Q)\in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\forall (\lambda,\mu)\in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(\lambda P+\mu Q) &= (X+1)(\lambda P+\mu Q)(X+1)-X(\lambda P+\mu Q)(X) \\ &= (X+1)\left[\lambda P(X+1)+\mu Q(X+1)\right]-X\left[\lambda P(X)+\mu Q(X)\right] \\ &= \lambda(X+1)P(X+1)+\mu(X+1)Q(X+1)-\lambda XP(X)-\mu XQ(X) \\ &= \lambda\left[(X+1)P(X+1)-XP(X)\right]+\mu\left[(X+1)Q(X+1)-XQ(X)\right]=\lambda f(P)+\mu f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire.

De plus, $\forall k\in [\![0,n]\!]$, on a :

$$f(X^k)=(X+1)(X+1)^k-XX^k=(X+1)^{k+1}-X^{k+1}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}X^i .$$

Donc $f(X^k)$ est un polynôme tel que $\deg f(X^k)=k\le n$, soit $f(X^k)\in \mathbb{R}_n[X]$.

Ceci prouve que f est à images dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc que :

$$\boxed{\text{f est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

On vient de voir que $\forall k\in [\![0,n]\!]$, $\deg f(X^k)=k$, donc $\left(f(1),f(X),f(X^2),...,f(X^n)\right)$ est une famille échelonnée en degrés de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme l'image par f d'une base (la base canonique) de $\mathbb{R}_n[X]$ est une base, f est un automorphisme et donc :

$$\boxed{\ker f=\{0\} \text{ et } \operatorname{Im} f=\mathbb{R}_n[X].}$$

2) $\forall P\in \mathbb{R}_n[X]$, $(X+1)P'\in \mathbb{R}_n[X]$ donc $f(P)\in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, $\forall (P,Q)\in \mathbb{R}_n[X]^2$ et $\forall (\lambda,\mu)\in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f(\lambda P+\mu Q) &= (X+1)(\lambda P+\mu Q)'-(\lambda P+\mu Q) \\ &= (X+1)(\lambda P'+\mu Q')-(\lambda P+\mu Q) \\ &= \lambda(X+1)P'+\mu(X+1)Q'-\lambda P-\mu Q \\ &= \lambda\left[(X+1)P'-P\right]+\mu\left[(X+1)Q'-Q\right]=\lambda f(P)+\mu f(Q) \end{aligned}$$

Donc f est linéaire et ainsi :

$$\boxed{\text{f est un endomorphisme de } \mathbb{R}_n[X].}$$

On a $\forall P=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k\in \mathbb{R}_n[X]$, on a :

$$\begin{aligned} f(P) &= \sum_{k=0}^{n}a_kf(X^k)=\sum_{k=1}^{n}a_k\left[k(X+1)X^{k-1}-X^k\right]-a_0=\sum_{k=1}^{n}a_k\left[(k-1)X^k+kX^{k-1}\right]-a_0 \\ &= \sum_{k=0}^{n}(k-1)a_kX^k+\sum_{k=1}^{n}ka_kX^{k-1}=\sum_{k=0}^{n}(k-1)a_kX^k+\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}X^k \\ &= (n-1)a_nX^n+\sum_{k=0}^{n-1}\left[(k-1)a_k+(k+1)a_{k+1}\right]X^k \end{aligned}$$

Alors, $f(P)=0$ quand $(n-1)a_n=0$ et $\forall\, k\in[\![0,n]\!]$, $(k-1)a_k+(k+1)a_{k+1}=0$, soit :

$$\begin{cases} -a_0+2a_1=0 \\ 2a_2=0 \\ a_2+3a_3=0 \\ \quad\vdots \\ (n-2)a_{n-1}+na_n=0 \\ (n-1)a_n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0=2a_1 \\ a_2=a_3=\ldots=a_{n-1}=a_n=0 \end{cases} \Leftrightarrow P=a_1(X+2).$$

Ainsi :

$$\boxed{\ker f=\mathrm{Vect}(X+2)}$$

Remarquons que $\left(1,X+1,(X+1)^2,(X+1)^3,\ldots,(X+1)^n\right)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc :

$$\mathrm{Im}\, f=\mathrm{Vect}\left(f(1),f(X+1),f((X+1)^2),f((X+1)^3),\ldots,f((X+1)^n)\right).$$

Or, $\forall\, k\in[\![0,n]\!]$, $f\left((X+1)^k\right)=(k-1)(X+1)^k$, donc :

$$\mathrm{Im}\, f=\mathrm{Vect}\left(-1,0,(X+1)^2,2(X+1)^3,\ldots,(n-1)(X+1)^n\right).$$

Soit :

$$\boxed{\mathrm{Im}\, f=\mathrm{Vect}\left(1,(X+1)^2,(X+1)^3,\ldots,(X+1)^n\right)}$$

Exercice 5

On a $P_0=1$, $P_1=2X$ et :

$$\begin{aligned} P_2&=2XP_1-X^2P_0=3X^2 \\ P_3&=2XP_2-X^2P_1=4X^3 \\ P_4&=2XP_3-X^2P_2=5X^4 \end{aligned}$$

On conjecture que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $P_n=(n+1)X^n$. Prouvons-le par récurrence double sur n.

- D'après ce qui précède, la propriété est vraie pour $n=0$ et $n=1$ (et même pour n compris entre 0 et 4).
- Pour $n\in\mathbb{N}$, supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$. Alors :

$$\begin{aligned} P_{n+2}&=2XP_{n+1}-X^2P_n \\ &=2X\left[(n+2)X^{n+1}\right]-X^2\left[(n+1)X^n\right] \qquad \text{par HR} \\ &=(2n+4)X^{n+2}-(n+1)X^{n+2} \\ &=(n+3)X^{n+2} \\ &=\left[(n+2)+1\right]X^{n+2} \end{aligned}$$

  La propriété est donc vraie au rang $n+2$.

La propriété est initialisée et héréditaire donc vraie $\forall\, n\in\mathbb{N}$, soit :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ P_n=(n+1)X^n.}$$

Exercice 6

a. $P = X(X^4 + 2X^2 - 1) + 0$ (quotient $= X^4 + 2X^2 - 1$ et reste $= 0$).

b. $P = X^2(X^3 + 2X) - X$ (quotient $= X^3 + 2X$ et reste $= -X$).

c. $P = Q(X^2 + 1) + 2X$ (quotient $= X^2 + 1$ et reste $= 2X$).

d. $P = XQ + 3X^3 - 2X$ (quotient $= X$ et reste $= 3X^3 - 2X$).

e. $P = Q + 3X^3 - X - 1$ (quotient $= 1$ et reste $= 3X^3 - X - 1$).

f. $P = 0Q + X^5 + 2X^3 - X$ (quotient $= 0$ et reste $= P$).

g. $P = (X^2 + i + 3)Q - iX^2 + (4i + 1)X + 1 - 3i$ (quotient $= X^2 + i + 3$ et reste $= -iX^2 + (4i + 1)X + 1 - 3i$)

Exercice 7

1) Soit P un polynôme unitaire de $\mathbb{R}[X]$ divisible par $X^2 - 1$ et divisant $X^4 - 1$.

Comme $P \mid X^4 - 1$, on a $\deg P \leq 4$. Alors, comme $X^2 - 1 \mid P$, on a :

$$P = (X^2 - 1)Q \text{ et avec } \deg Q \leq 2.$$

Comme P est unitaire, Q l'est aussi.

Enfin, comme $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1)$ et $P = (X^2 - 1)Q$ divise $X^4 - 1$, on a :

$$Q \mid X^2 + 1.$$

Or, $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, donc les seuls polynômes unitaires divisant $X^2 + 1$ sont 1 et $X^2 + 1$.

Ainsi, $P = X^2 - 1$ ou $P = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = X^4 - 1$.

Réciproquent, $X^2 - 1$ et $X^4 - 1$ sont bien solutions du problème, donc les polynômes unitaires de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par $X^2 - 1$ et divisant $X^4 - 1$ sont :

$$\boxed{X^2 - 1 \text{ et } X^4 - 1.}$$

2) Le raisonnement est le même que dans la question précédente, sauf que dans $\mathbb{C}[X]$, $X^2 + 1$ n'est pas irréductible, mais s'écrit $X^2 + 1 = (X + i)(X - i)$. Alors, avec les notations de la question précédente, on a :

$$Q = 1 \text{ ou } Q = X - i \text{ ou } Q = X + i \text{ ou } Q = X^2 + 1.$$

Et ainsi, les polynômes unitaires de $\mathbb{C}[X]$ divisibles par $X^2 - 1$ et divisant $X^4 - 1$ sont :

$$\boxed{X^2 - 1,\ (X - i)(X^2 - 1),\ (X + i)(X^2 - 1) \text{ et } X^4 - 1.}$$

3) La division euclidienne de $X^5 + aX^2 - X + a$ par $X^2 + a$ s'écrit :

$$X^5 + aX^2 - X + a = (X^3 - aX + a)(X^2 + a) + (a^2 - 1)X + a - a^2.$$

Or, $X^2 + a$ divise $X^5 + aX^2 - X + a$ si et seulement le reste de cette division est nul, soit $(a^2 - 1)X + a - a^2 = 0$.

Ainsi :

$$X^2+a \text{ divise } X^5+aX^2-X+a \iff (a^2-1)X+a-a^2=0 \iff \begin{cases} a^2-1=0 \\ a-a^2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \text{ ou } a=-1 \\ a=1 \text{ ou } a=0 \end{cases} \iff a=1.$$

Finalement :

$$\boxed{X^2+a \text{ divise } X^5+aX^2-X+a \text{ si et seulement si } a=1.}$$

4) Ici, le raisonnement est le même et le résultat aussi !

Exercice 8

a. $P=(X+1)(X-2)(X+2)$ sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$.

b. $P=(X-1)(X-e^{i\frac{2\pi}{5}})(X-e^{-i\frac{2\pi}{5}})(X-e^{i\frac{4\pi}{5}})(X-e^{-i\frac{4\pi}{5}})$ sur $\mathbb{C}$.

$P=(X-1)\left[X^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)X+1\right]\left[X^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)X+1\right]$ sur $\mathbb{R}$.

c. $P=(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$ sur $\mathbb{C}$.

P est irréductible sur $\mathbb{R}$, sauf pour $\theta=0\ [2\pi]$, alors $P=(X-1)^2$, et pour $\theta=\pi\ [2\pi]$, alors $P=(X+1)^2$.

d. $P=(X+1-i)(X+i)(X+1+i)(X-i)$ sur $\mathbb{C}$.

$P=(X^2+2X+2)(X^2+1)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9

On a déjà $P(1)=n-(n+1)+1=0$ donc 1 est bien racine de P. On a :

$$P'=n(n+1)X^n-n(n+1)X^{n-1}=n(n+1)X^{n-1}(X-1).$$

Donc 1 est d'ordre 1 dans P' (et 0 d'ordre $n-1$). Ainsi :

$$\boxed{\text{1 est d'ordre 2 dans P.}}$$

Exercice 10

$\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, x, y et z sont les racines de $(X-x)(X-y)(X-z)=X^3-(x+y+z)X^2+(xy+yz+zx)X-xyz$.

De plus :

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \iff xy+yz+zx=\frac{1}{2}\left[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\right].$$

Alors :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=4 \\ xyz=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=0 \\ xy+yz+zx=-2 \\ xyz=-1 \end{cases}.$$

Et $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ est solution du système si et seulement si x, y et z sont les racines de X^3-2X+1.

Or, 1 est une racine évidente de ce polynôme, et :

$$X^3-2X+1=(X-1)(X^2+X-1).$$

Les racines de X^2+X-1 sont $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, donc les solutions du système sont :

$$\boxed{\begin{array}{c}\left(1,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(1,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\\ \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},1,\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},1,\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\\ \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},1\right),\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2},1\right)\end{array}}$$

Chapitre 17 - Matrices et systèmes linéaires - Entrainement

Exercice 1 *Calculs sur les matrices*

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0_3$.
   b. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = A$.
   c. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = M$.
   d. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
   e. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 + 3A - 4I_2 = 0_2$, puis en déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Déterminer les matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telles que $M^2 = ({}^tM)^2$.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

   a. $2AM + {}^tMA$ soit symétrique.
   b. $2AM + {}^tMA$ soit antisymétrique.

Exercice 2 *Matrices et applications linéaires*

1) On note $\mathcal{B}_c = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Déterminer les images et le ou les antécédent(s) (s'il y en a) des vecteurs de $\mathcal{B}_c$.

2) Pour chaque application linéaire u donnée, déterminer la matrice de u dans les bases canoniques des espaces considérés.

   a. $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z, t) \mapsto (x + y + z,\ 2t - x,\ y + 3t)$.
   b. $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y + z, x + y + z)$.
   c. $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] : P \mapsto P + XP' + X^2P''$.
   d. $u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : M \mapsto AM + {}^tMA$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On prendra $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ comme base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

e. $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ est la symétrie par rapport au plan d'équation $x+y=0$, parallèlement à la droite dirigée par le vecteur $a=(1,1,-1)$.

3) Pour chaque matrice A donnée, déterminer $\ker A$ et $\operatorname{Im} A$.

a. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ c. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ e. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

4) Dans chaque cas, montrer que la famille $\mathcal{B}$ donnée est une base de l'espace E considéré, donner P, la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}$, puis de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_c$.

a. $E=\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$ avec $e_1=(1,-1,1)$, $e_2=(-1,1,0)$ et $e_3=(0,1,1)$.

Donner la matrice B de l'application u de la question 2.b dans la base $\mathcal{B}$.

b. $E=\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{B}=(P_1,P_2,P_3,P_4)$ avec $P_i=(X+i-2)^3$ pour $i=1, 2, 3$ ou 4.

Donner la matrice B de l'application u de la question 2.c dans la base $\mathcal{B}$.

c. $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}=(A_1,A_2,A_3,A_4)$ avec $A_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_3=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_4=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice B de l'application u de la question 2.d dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 3 *Inversibilité*

1) Pour chaque matrice A donnée, dire si la matrice est inversible et donner son inverse s'il y a lieu.

a. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ c. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ d. $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda-1 & -1 & -1 \\ 0 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $A \in GL_3(\mathbb{R})$. Pour ces valeurs, calculer A^{-1}. Existe-t-il des valeurs complexes de λ qui rendent A non inversible dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

3) Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^3-4A^2+5A+I_3=0$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1} en fonction de A.

4) Dans chaque cas, montrer que l'application linéaire u donnée est un automorphisme de E.

a. $E=\mathbb{R}^3$ et $\begin{cases} u(\varepsilon_1)=\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3 \\ u(\varepsilon_2)=2\varepsilon_1+2\varepsilon_3 \\ u(\varepsilon_3)=\varepsilon_2-2\varepsilon_3 \end{cases}$ où $\mathcal{B}_c=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ est la base canonique de E.

b. $E=\mathbb{R}^3$ et $u : E \to E : (x,y,z) \mapsto (x+y+z, x-2y-z, x-y+3z)$.

c. $E=\mathbb{R}_2[X]$ et $u : E \to E : P \mapsto 2XP(X+1)-X^2P'+P''$ (où $P(X+1)$ est la composée, pas le produit).

Exercice 4 *Rang et échelonnage*

Déterminer le rang des matrices A suivantes, puis donner la matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes :

a. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c. $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -a \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$

d. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

f. $A = I_n + E_{i,j} + E_{j,k}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$ tel que $i < j$ et $k < j$.

Exercice 5 *Systèmes*

Résoudre les systèmes suivants :

a. $\begin{cases} 2x - y + z = 2 \\ x + 2y - z = -2 \\ -x + y + 2z = 2 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y = z + t \\ y + z = t + x \\ x + z = y + t \end{cases}$ c. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x - 2y = 4 \\ 5x + 3y = \lambda \end{cases}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ d. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases}$

Indications

Exercice 1

1) a. Considérer $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, puis calculer AM.

b. Utiliser la question précédente, avec $M-I_3$.

c et d. Poser $N=A-I_3$.

e. Calculer les puissances de N, puis en remarquant que I_3 et N commutent, utiliser la formule du binôme pour $n\geq 2$.

2) Calculer A^2, puis $A^2+3A-4I_2$.

Etablir que $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $A^n=(-1)^n\left[(a_n+(-1)^n)I_2-a_nA\right]$ avec $a_{n+1}=4a_n+(-1)^n$.

Poser alors $b_n=\dfrac{a_n}{4^n}$ et calculer $b_{n+1}-b_n$ pour déterminer les a_n.

3) Poser $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, puis calculer M^2 et $({}^tM)^2$.

4) Dans les deux questions, poser $M=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

a. Introduire $B=2A-{}^tA$.

b. Introduire $C=2A+{}^tA$.

Exercice 2

1) Pour les images, c'est immédiat.

Pour les antécédents éventuels de ε_1, résoudre $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. De même avec ε_2 et ε_3.

2) Dans chaque cas, les coordonnées des vecteurs de la base canonique sont les coefficients des colonnes de la matrices de u.

Pour la dernière (la symétrie), on pourra déterminer une base du plan vectoriel donné, puis exprimer les vecteurs de la base canonique dans cette base complétée par le vecteur a.

3) On rappelle que $\ker A$ et $\operatorname{Im} A$ sont respectivement le noyau et l'image de l'application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ canoniquement associé à A (identifier n et p). Pour le noyau résoudre $AX=0$ avec $X\in\mathbb{R}^n$; pour l'image, utiliser le théorème du rang pour trouver sa dimension, puis trouver une base (par exemple une famille libre ayant le bon nombre de vecteurs parmi les colonnes de A).

4) Dans chaque cas :

- La famille $\mathcal{B}$ contient le bon nombre de vecteurs, donc pour montrer que c'est une base de E, il suffit de vérifier qu'elle est libre ou que $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = \mathrm{E} = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_c)$.
- Les colonnes de $\mathrm{P} = \mathrm{P}_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}$ contiennent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}_c$. Il faut donc écrire les vecteurs de $\mathcal{B}$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}_c$.
- On a $\mathrm{P}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = \mathrm{P}^{-1}$. On peut aussi utiliser la technique ci-dessus en écrivant les vecteurs de $\mathcal{B}_c$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}$.
- On peut utiliser la formule $\mathrm{B} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ ou calculer les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ des images des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Exercice 3 *Inversibilité*

1) Pour montrer qu'une matrice carrée est inversible (ou pas), on a plusieurs méthodes :

- Déterminer le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé.
- Calculer son rang.
- Déterminer l'espace engendré par ses vecteurs colonnes.
- La transformer en une matrice échelonnée.

Toutes ces méthodes reviennent à faire la même chose : déterminer le rang (ou la dimension du noyau).

Parfois, on peut voir une combinaison simple linéaire nulle des colonnes : l matrice n'est alors pas inversible.

Le plus rapide souvent sera le calcul de déterminant vu dans le chapitre suivant.

Une matrice 2×2, $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et dans ce cas, son inverse est la matrice $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Pour calculer l'inverse d'une matrice A inversible, on peut :

- passer de A à I_n par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes ;
- résoudre le système $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$ où X et Y sont des vecteurs colonnes, X étant l'inconnue et Y un vecteur paramètre. L'expression $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{Y}$ de la solution permet de trouver A^{-1}.
- …

2) Transformer A en une matrice échelonnée en distinguant le cas ou λ est nul. Pour la suite, cf. ci-dessus.

3) Calculer A^2 et A^3, puis $\mathrm{A}^3 - 4\mathrm{A}^2 + 5\mathrm{A} + \mathrm{I}_3$. Ensuite, remarquer que $-(\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{A} + 5\mathrm{I}_3)\mathrm{A} = \mathrm{I}_3 \ldots$

4) Dans chaque cas, écrire la matrice de u dans la base canonique de E, puis montrer que cette matrice est inversible (donc que l'endomorphisme u est bijectif) en la transformant en une matrice triangulaire supérieure par opérations sur les lignes.

Exercice 4 *Rang et échelonnage*

Application directe du cours. On pourra déterminer la matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à A avant de donner son rang.

Ne pas hésiter à échanger des lignes pour mettre un pivot simple (1 pour ne pas le citer) en haut à gauche.

Pour la c, considérer trois cas : $a = -3$, $a = 3$ et $a^2 \neq 9$.

Pour la dernière, écrire la matrice et considérer deux cas : $i = k$ et $i \neq k$.

Exercice 5 *Systèmes*

a. Système de Cramer standard.

b. Attention : 3 équations et 4 inconnues : il faut choisir un paramètre.

c. Attention : 3 équations et 2 inconnues : l'existence d'une solution éventuelle dépend de la valeur de λ.

d. Considérer x, y et z comme les racines de $(X-x)(X-y)(X-z)$ et remarquer que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}$ et $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$.

Réponses

Exercice 1 *Calculs sur les matrices*

1) Posons $N=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. On a alors $A=I_3+N$.

Dans les questions a, b et c, on considère $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On a $NM=\begin{pmatrix}d&e&f\\g&h&i\\0&0&0\end{pmatrix}$.

a. On a :

$$AM=0_3 \iff (I_3+N)M=M+NM=0_3 \iff \begin{pmatrix}a+d&b+e&c+f\\d+g&e+h&f+i\\g&h&i\end{pmatrix}=0_3.$$

Soit :

$$\boxed{M=0_3}$$

b. On a :

$$AM=A \iff A(M-I_3)=0_3 \iff M-I_3=0_3.$$

Soit :

$$\boxed{M=I_3}$$

c. On a :

$$AM=M \iff (A-I_3)M=NM=0_3 \iff \begin{pmatrix}d&e&f\\g&h&i\\0&0&0\end{pmatrix}=0_3.$$

Soit :

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\text{ avec }(a,b,c)\in\mathbb{R}^3.}$$

d. On a :

$$AM=MA \iff (I_3+N)M=M(I_3+N) \iff NM=MN \iff \begin{pmatrix}d&e&f\\g&h&i\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a&b\\0&d&e\\0&g&h\end{pmatrix}.$$

Soit :

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}a&b&c\\0&a&b\\0&0&a\end{pmatrix}\text{ avec }(a,b,c)\in\mathbb{R}^3.}$$

e. Comme $A = I_3 + N$ et I_3 et N commutent, on peut utiliser la formule du binôme, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = (I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k .$$

De plus, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0_3$, donc $\forall n \geq 2$, on a :

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k = \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N^1 + \binom{n}{2} N^2 = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 .$$

Remarquons que $A^0 = I_3$ et $A^1 = A = I_3 + N$, donc la formule ci-dessus reste vraie pour $n = 0$ et $n = 1$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = I_3 + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

2) On a $A^2 + 3A - 4I_2 = \begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui donne immédiatement :

$$\boxed{A^2 + 3A - 4I_2 = 0_2}$$

On a alors $A^2 = 4I_2 - 3A$, donc :

$$A^3 = 4A - 3A^2 = -(12I_2 - 13A)$$
$$A^4 = 13A^2 - 12A = 52I_2 - 51A$$
$$A^5 = 52A - 51A^2 = -(204I_2 - 205A)$$

On peut alors conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = (-1)^n \left[(a_n + (-1)^n) I_2 - a_n A \right]$ où a_n est un nombre. Pouvons-le par récurrence sur n.

- La propriété est vraie au rang 0 car $A^0 = I_2 = (-1)^0 \left[(a_0 + (-1)^0) I_2 - a_0 A \right]$ avec $a_0 = 0$.
- Supposons la propriété vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, soit $A^n = (-1)^n \left[(a_n + 1) I_2 - a_n A \right]$. Alors :

$$A^{n+1} = A^n A = (-1)^n \left[(a_n + (-1)^n) I_2 - a_n A \right] A = (-1)^n \left[(a_n + (-1)^n) A - a_n A^2 \right]$$
$$= (-1)^n \left[(a_n + (-1)^n) A - a_n (4I_2 - 3A) \right] = (-1)^{n+1} \left[4a_n I_2 - (4a_n + (-1)^n) A \right]$$

  Donc, $A^{n+1} = (-1)^{n+1} \left[(a_{n+1} + (-1)^{n+1}) I_2 - a_{n+1} A \right]$ avec $a_{n+1} = 4a_n + (-1)^n$ et la propriété est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire donc vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

Reste à déterminer les a_n. On a vu que $a_0=0$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=4a_n+(-1)^n$.

Posons $b_n=\dfrac{a_n}{4^n}$. On a alors $b_0=0$ et $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $b_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{4^{n+1}}=\dfrac{a_n}{4^n}+\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}=b_n+\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}$, donc $b_{n+1}-b_n=\dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}$.

Alors $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$:

$$b_n=b_n-b_0=\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{-1}{4}\right)^k=\frac{1}{4}\,\frac{1-\left(\frac{-1}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{-1}{4}\right)}=\frac{1}{5}\left[1-\left(\frac{-1}{4}\right)^n\right].$$

Donc $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$:

$$a_n=4^n b_n=\frac{4^n}{5}\left[1-\left(\frac{-1}{4}\right)^n\right]=\frac{4^n-(-1)^n}{5}$$

Remarquons que cette formule reste vraie pour $n=0$ et finalement, $\forall\, n\in\mathbb{N}$:

$$A^n=(-1)^n\left[\left(\frac{4^n-(-1)^n}{5}+(-1)^n\right)I_2-\frac{4^n-(-1)^n}{5}A\right].$$

Ceci se récrit, $\forall\, n\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{A^n=\frac{1}{5}\Big[\big(4+(-4)^n\big)I_2+\big(1-(-4)^n\big)A\Big]}$$

3) Posons $M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. On a alors $M^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & b(a+d)\\ c(a+d) & d^2+bc\end{pmatrix}$ et $({}^tM)^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & c(a+d)\\ b(a+d) & d^2+bc\end{pmatrix}$.

Donc :

$$M^2=({}^tM)^2 \iff b(a+d)=c(a+d) \iff b=c \text{ ou } a+d=0.$$

Ainsi :

$$M^2=({}^tM)^2 \iff M=\begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix} \text{ ou } M=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -a\end{pmatrix} \text{ avec } (a,b,c,d)\in\mathbb{C}^3.$$

4) On a ${}^t(2AM+{}^tMA)=2\,{}^tM\,{}^tA+{}^tAM$, donc $2AM+{}^tMA$ est symétrique si et seulement si :

$$2\,{}^tM\,{}^tA+{}^tAM=2AM+{}^tMA \iff {}^tM(2\,{}^tA-A)=(2A-{}^tA)M \iff {}^tM\,{}^t(2A-{}^tA)=(2A-{}^tA)M.$$

Donc, $2AM+{}^tMA$ est symétrique si et seulement si :

$${}^t\big((2A-{}^tA)M\big)=(2A-{}^tA)M \iff BM \text{ est symétrique avec } B=2A-{}^tA.$$

On a $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -3\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$, donc si $M=\begin{pmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{pmatrix}$, on a $BM=\begin{pmatrix}d & e & f\\ a-3g & b-3h & c-3i\\ 3d & 3e & 3f\end{pmatrix}$ et :

$$BM \text{ est symétrique} \iff \begin{cases}e=a-3g\\ f=3d\\ c-3i=3e\end{cases} \iff \begin{cases}a=e+3g\\ f=3d\\ c=3(e+i)\end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ telles que } 2AM + {}^tMA \text{ est symétrique sont les matrices } M = \begin{pmatrix} e+3g & b & 3(e+i) \\ d & e & 3d \\ g & h & i \end{pmatrix}.}$$

b. De la même façon que plus haut, $2AM + {}^tMA$ est antisymétrique si et seulement si :

$$2\,{}^tM\,{}^tA + {}^tAM = -(2AM + {}^tMA) \iff {}^t(CM) = -CM \quad \text{avec } C = 2A + {}^tA.$$

On a $C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc si $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a $CM = \begin{pmatrix} 3d & 3e & 3f \\ 3a-g & 3b-h & 3c-i \\ d & e & f \end{pmatrix}$ et :

$$CM \text{ est antisymétrique} \iff \begin{cases} 3d = 3b-h = f = 0 \\ 3e = -(3a-g) \\ 3f = -d \\ 3c-i = -e \end{cases} \iff \begin{cases} d = f = 0 \\ h = 3b \\ g = 3a+3e \\ i = 3c+e \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\text{Les matrices } M \text{ telles que } 2AM + {}^tMA \text{ est symétrique sont les matrices } M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & 0 \\ 3a+3e & 3b & 3c+e \end{pmatrix}.}$$

Exercice 2 *Matrices et applications linéaires*

1) On a :

$$\boxed{u(\varepsilon_1) = (2,-2,0) \text{ et } u(\varepsilon_2) = u(\varepsilon_3) = (-1,1,1).}$$

Si (x, y, z) est un antécédent de ε_1, on a $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-y-z \\ -2x+y+z \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} 2x-y-z = 1 \\ -2x+y+z = 0 \\ y+z = 0 \end{cases}$.

Ce système n'a pas de solution (les deux premières équations sont incompatibles), donc :

$$\boxed{\varepsilon_1 \text{ n'a pas d'antécédent.}}$$

De la même façon avec ε_2, on obtient $\begin{cases} 2x-y-z = 0 \\ -2x+y+z = 1 \\ y+z = 0 \end{cases}$ qui n'a pas de solution, donc :

$$\boxed{\varepsilon_2 \text{ n'a pas d'antécédent.}}$$

Si (x, y, z) est un antécédent de ε_3, on a $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, soit $\begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ z = 1 - y \end{cases}$.

Ce système n'a pas de solution (les deux premières équations sont incompatibles), donc :

$$\boxed{\text{Les antécédents de } \varepsilon_3 \text{ sont les vecteurs de la forme } \left(\frac{1}{2}, y, 1-y\right) \text{ avec } y \in \mathbb{R}.}$$

2) a. Notons $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{B}_c = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$. On a alors :

$$\begin{aligned} u(e_1) &= u\big((1,0,0,0)\big) = (1,-1,0) \\ u(e_2) &= u\big((0,1,0,0)\big) = (1,0,1) \\ u(e_3) &= u\big((0,0,1,0)\big) = (1,0,0) \\ u(e_4) &= u\big((0,0,0,1)\big) = (0,2,3) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B},\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

b. Notons encore $\mathcal{B}_c = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a alors :

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_1) &= u\big((1,0,0)\big) = (1,1,1) \\ u(\varepsilon_2) &= u\big((0,1,0)\big) = (1,-1,1) \\ u(\varepsilon_3) &= u\big((0,0,1)\big) = (1,1,1) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

c. Notons $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a alors :

$$\begin{aligned} u(1) &= 1 \\ u(X) &= 2X \\ u(X^2) &= 5X^2 \\ u(X^3) &= 10X^3 \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}}$$

d. Notons $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a alors :

$$u(E_{1,1}) = u\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + {}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,1} + E_{1,2} - E_{2,1}$$

$$u(E_{1,2}) = u\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + {}^t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,1}$$

$$u(E_{2,1}) = u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2} + E_{2,1}$$

$$u(E_{2,2}) = u\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + {}^t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = E_{1,2} - E_{2,1} + 2E_{2,2}$$

Donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

e. Notons encore $\mathcal{B}_c = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, F le plan d'équation $x + y = 0$ et $D = \mathrm{Vect}(a)$ avec $a = (1,1,-1) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3$. On a alors :

$$\left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. \in F \iff x + y = 0 \iff \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} x \\ -x \\ z \end{matrix}\right. = x\left|\begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{matrix}\right. + z\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}\right. = x(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + z\varepsilon_3 \iff \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right. \in \mathrm{Vect}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3).$$

Ainsi, $F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Comme $\varepsilon_3 \in F$, on a immédiatement :

$$u(\varepsilon_3) = \varepsilon_3.$$

Remarquons que $(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_3 + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3) = 2\varepsilon_1$ donc $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_3] + \frac{1}{2}a$ et :

$$u(\varepsilon_1) = \frac{1}{2}[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \varepsilon_3] - \frac{1}{2}a = \varepsilon_3 - \varepsilon_2.$$

Comme $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \in F$, on a $u(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, soit :

$$u(\varepsilon_2) = u(\varepsilon_1) + \varepsilon_2 - \varepsilon_1 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1.$$

Alors :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

3) a. $A = M_{\mathcal{B}_c}(u)$ avec $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On a :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \iff x = y = 0.$$

Ainsi, u est injectif, donc bijectif car c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Alors :

$$\boxed{\ker A = \{0\} \text{ et } \mathrm{Im}\, A = \mathbb{R}^2}$$

b. $A = M_{\mathcal{B}_c}(u)$ avec $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. On a :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\ker A = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big)$.

On a alors $\mathrm{rg}(A) = 1$ et $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\big((2,-1)\big)$ (on aurait pu remarquer immédiatement que les deux colonnes de A sont opposées). Alors :

$$\boxed{\ker A = \mathrm{Vect}\big((1,1)\big) \text{ et } \mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\big((2,-1)\big)}$$

c. $A = M_{\mathcal{B}_c}(u)$ avec $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. On a :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ -3x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\ker A = \mathrm{Vect}\big((1,3,1)\big)$.

On a alors $\mathrm{rg}(A) = 2$. Les deux dernières colonnes de A n'étant clairement pas proportionnelles, on peut écrire $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\big((-1,-1,1),(2,1,0)\big)$.

Avec $(-1,-1,1) + (2,1,0) = (1,0,1)$, on a plus simplement $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\big((1,1,-1),(1,0,1)\big)$ et ainsi :

$$\boxed{\ker A = \mathrm{Vect}\big((1,3,1)\big) \text{ et } \mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\big((1,1,-1),(1,0,1)\big)}$$

d. $A = M_{\mathcal{B}_c}(u)$ avec $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$. On a :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y + z + 2t = 0 \\ -x + 2y - t = 0 \\ -y - z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ t = 2y \\ z = -3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\ker A = \mathrm{Vect}\big((0,1,-3,2)\big)$.

On a alors $\mathrm{rg}(A) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc $\mathrm{Im}\, A = \mathbb{R}^3$. Finalement :

$$\boxed{\ker A = \mathrm{Vect}\big((0,1,-3,2)\big) \text{ et } \mathrm{Im}\, A = \mathbb{R}^3}$$

e. $A = M_{\mathcal{B}_c}(u)$ avec $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$. On a :

Les deux colonnes de A ne sont pas proportionnelles, donc $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\big((1,0,2,-1),(2,-1,1,-1)\big)$

On a alors $\dim(\ker A) = 0$ donc $\ker A = \{0\}$.

Finalement :

$$\boxed{\ker A = \{0\} \text{ et } \mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}\big((1,0,2,-1),(2,-1,1,-1)\big)}$$

4) a. Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $ae_1+be_2+ce_3=0$, soit :

$$a\begin{vmatrix}1\\-1\\1\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}-1\\1\\0\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}0\\1\\1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=0\\-a+b+c=0\\a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=0.$$

Ainsi, $\mathcal{B}$ est libre. Comme $E=\mathbb{R}^3$ est de dimension 3 et $\mathcal{B}$ contient 3 vecteurs :

$$\boxed{\mathcal{B}\text{ est une base de }E=\mathbb{R}^3.}$$

On a alors immédiatement :

$$\boxed{P=P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}}$$

Notons $\mathcal{B}_c=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{cases}e_1=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_3\\e_2=-\varepsilon_1+\varepsilon_2\\e_3=\varepsilon_2+\varepsilon_3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varepsilon_1=-e_1-2e_2+e_3\\\varepsilon_2=-e_1-e_2+e_3\\\varepsilon_3=e_1+e_2\end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{P^{-1}=P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-2&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}}$$

L'application u de la question 2.b est $u:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:(x,y,z)\mapsto(x+y+z,x-y+z,x+y+z)$. On a :

$$\begin{cases}u(e_1)=(1,3,1)=\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3=-3e_1-4e_2+4e_3\\u(e_2)=(0,-2,0)=-2\varepsilon_2=2e_1+2e_2-2e_3\\u(e_3)=(2,0,2)=2\varepsilon_1+2\varepsilon_3=-2e_2+2e_3\end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{B=M_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}-3&2&0\\-4&2&-2\\4&-2&2\end{pmatrix}}$$

Avec $A=M_{\mathcal{B}_c}(u)$, on peut vérifier que l'on a bien $B=P^{-1}AP$.

b. On a, pour $i=1, 2, 3$ ou 4, $P_i=(X+i-2)^3$, soit :

$$\begin{cases}P_1=(X-1)^3=X^3-3X^2+3X-1\\P_2=X^3\\P_3=(X+1)^3=X^3+3X^2+3X+1\\P_4=(X+2)^3=X^3+6X^2+12X+8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3X^2+1=\dfrac{1}{2}(P_3-P_1)\\X^3+3X=\dfrac{1}{2}(P_3+P_1)\\3X^2+6X+4=\dfrac{1}{2}(P_4-P_2)\\X^3=P_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1=\dfrac{1}{6}(-P_1+3P_2-3P_3+P_4)\\X=\dfrac{1}{6}(P_1-2P_2+P_3)\\X^2=\dfrac{1}{18}(-2P_1-3P_2+6P_3-P_4)\\X^3=P_2\end{cases}$$

On peut exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}$, donc :

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de E.}}$$

De plus, on a immédiatement :

$$\boxed{P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 0 & 3 & 12 \\ -3 & 0 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} -3 & 3 & -2 & 0 \\ 9 & -6 & -3 & 18 \\ -9 & 3 & 6 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}$$

L'application u de la question 2.c a pour matrice dans $\mathcal{B}_c$:

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Avec $B = P^{-1}AP$, on obtient :

$$\boxed{B = M_{\mathcal{B}}(u) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 17 & 0 & -5 & -4 \\ 60 & 60 & 36 & 6 \\ -21 & 0 & 33 & 60 \\ 4 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}}$$

c. On prend $\mathcal{B}_c = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

En remarquant que $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 3(E_{1,1} + E_{1,2} + E_{2,1} + E_{2,2})$, on a facilement :

$$\begin{cases} A_1 = E_{1,2} + E_{2,1} + E_{2,2} \\ A_2 = E_{1,1} + E_{2,1} + E_{2,2} \\ A_3 = E_{1,1} + E_{1,2} + E_{2,2} \\ A_4 = E_{1,1} + E_{1,2} + E_{2,1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} E_{1,1} = \dfrac{1}{3}(-2A_1 + A_2 + A_3 + A_4) \\ E_{1,2} = \dfrac{1}{3}(A_1 - 2A_2 + A_3 + A_4) \\ E_{2,1} = \dfrac{1}{3}(A_1 + A_2 - 2A_3 + A_4) \\ E_{2,2} = \dfrac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3 - 2A_4) \end{cases}$$

On peut exprimer les vecteurs de $\mathcal{B}_c$ en fonction de ceux de $\mathcal{B}$, donc :

$$\boxed{\mathcal{B} \text{ est une base de E.}}$$

De plus, on a immédiatement :

$$\boxed{P = P_{\mathcal{B}_c}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P^{-1} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}_c} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}}$$

L'application u de la question 2.d a pour matrice dans $\mathcal{B}_c$:

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Avec $B = P^{-1}AP$, on obtient :

$$\boxed{B = M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$$

Exercice 3 *Inversibilité*

1) a. On a $2\times1-(-1)\times1=3\neq0$ donc A est inversible et :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

b. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Les trois coefficients diagonaux sont non nuls, donc A est inversible.

L'équation $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ se récrit $\begin{cases} x+z=a \\ 2x-y+z=b \\ -x+y+2z=c \end{cases}$, qui donne $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(3a-b-c) \\ y=\frac{1}{2}(5a-3b-c) \\ z=\frac{1}{2}(-a+b+c) \end{cases}$. Donc :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

c. On remarque que la somme des deux premières colonnes donne l'opposée de la troisième, donc :

$$\boxed{\text{A n'est pas inversible.}}$$

d. Transformons A en une matrice échelonnée réduite et tentons directement l'inversion, en mettant en parallèle la matrice identité initialement.

$$A=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_4\leftarrow L_4-L_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4/2]{L_3\leftarrow L_3-L_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_4\\ L_3\leftarrow L_3+3L_4}]{L_1\leftarrow L_1+L_4}\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & -3/2 & 1 & 3/2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow -L_2\\ L_3\leftarrow -L_3/2}]{L_1\leftarrow -L_1}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/4 & -1/2 & -3/4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2+L_3}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/4 & -1/2 & 1/4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/4 & -1/2 & -3/4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1+2L_2}\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & -1/4 & -1/2 & 1/4\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & 3/4 & -1/2 & -3/4\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2\end{array}\right)$$

Ainsi, A est inversible et :

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -4 & -4 & -4 & 0\\ -2 & -1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & -2 & -3\\ 0 & -2 & 0 & 2\end{pmatrix}}$$

2) b. On a :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda\\ \lambda-1 & -1 & -1\\ 0 & 2\lambda & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2-(\lambda-1)L_1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda\\ 0 & -\lambda & -1-\lambda(\lambda-1)\\ 0 & 2\lambda & 1\end{pmatrix}$$

Alors :

- Si $\lambda = 0$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible (car ses deux premières colonnes sont identiques).
- Si $\lambda \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1-\lambda(\lambda-1) \\ 0 & 2\lambda & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & -\lambda & -1-\lambda(\lambda-1) \\ 0 & 0 & -(2\lambda^2 - 2\lambda + 1) \end{pmatrix}.$$

Donc A est inversible quand $2\lambda^2 - 2\lambda + 1 \neq 0$, ce qui est vrai pour tout réel λ. Dans ce cas on obtient :

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\lambda(2\lambda^2 - 2\lambda + 1)} \begin{pmatrix} 2\lambda - 1 & 2\lambda^2 - 1 & \lambda - 1 \\ 1 - \lambda & 1 & \lambda^2 - \lambda + 1 \\ 2\lambda(\lambda - 1) & -2\lambda & -\lambda \end{pmatrix}}$$

Le trinôme $2\lambda^2 - 2\lambda + 1$ n'a pas de racine réelle mais deux racines complexes, donc :

$$\boxed{\text{Il existe deux valeurs complexes de } \lambda \text{ qui rendent A non inversible dans } \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).}$$

3) On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 6 & 1 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 7 \\ 9 & -2 & 12 \\ -12 & -7 & 5 \end{pmatrix}$, et on obtient bien $A^3 - 4A^2 + 5A + I_3 = 0$.

La relation ci-dessus peut se récrire :

$$-A^3 + 4A^2 - 5A = I_3 \iff (-A^2 + 4A - 5I_3)A = I_3.$$

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{A est inversible avec } A^{-1} = -A^2 + 4A - 5I_3.}$$

4) Remarquons préalablement que l'énoncé dit que les applications données sont linéaires donc il n'est pas demandé de le prouver.

a. Avec les images des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $E = \mathbb{R}^3$, on peut immédiatement écrire la matrice de u dans $\mathcal{B}_c$:

$$M_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dans la dernière matrice, les trois coefficients diagonaux sont non nuls, donc $M_{\mathcal{B}_c}(u)$ est inversible, soit :

$$\boxed{\text{u est un automorphisme de } \mathbb{R}^3.}$$

b. On a $\forall\,(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ u\big((x,y,z)\big)=(x+y+z,\,x-2y-z,\,x-y+3z)$.

Alors, en notant à nouveau $\mathcal{B}_c=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ la base canonique de E, on a :

$$\begin{cases} u(\varepsilon_1)=u\big((1,0,0)\big)=(1,1,1)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \\ u(\varepsilon_2)=u\big((0,1,0)\big)=(1,-2,-1)=\varepsilon_1-2\varepsilon_2-\varepsilon_3 \\ u(\varepsilon_3)=u\big((0,0,1)\big)=(1,-1,3)=\varepsilon_1-\varepsilon_2+3\varepsilon_3 \end{cases}$$

Alors, la matrice de u dans $\mathcal{B}_c$ est :

$$M_{\mathcal{B}_c}(u)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Et :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3\leftarrow L_3-\frac{2}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 10/3 \end{pmatrix}.$$

Dans la dernière matrice, les trois coefficients diagonaux sont non nuls, donc $M_{\mathcal{B}_c}(u)$ est inversible, soit :

$$\boxed{\text{u est un automorphisme de } \mathbb{R}^3.}$$

c. En notant à nouveau $\mathcal{B}_c=(1,X,X^2)$ la base canonique de $E=\mathbb{R}_2[X]$, on a :

$$\begin{cases} u(1)=2X \\ u(X)=2X+X^2 \\ u(X^2)=2+2X+4X^2 \end{cases}$$

Remarquons que les trois images sont bien dans $\mathbb{R}_2[X]$, donc u est bien un automorphisme de E.

Alors, la matrice de u dans $\mathcal{B}_c$ est :

$$M_{\mathcal{B}_c}(u)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Et :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dans la dernière matrice, les trois coefficients diagonaux sont non nuls, donc $M_{\mathcal{B}_c}(u)$ est inversible, soit :

$$\boxed{\text{u est un automorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

Exercice 4 *Rang et échelonnage*

a. On a :

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3+3L_1]{L_2 \leftarrow L_2+2L_1} \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 1 & 7\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3-L_2} \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Dans la dernière matrice, les trois coefficients diagonaux sont non nuls, donc :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 3}$$

Puis :

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3/2]{L_1 \leftarrow -L_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 1 & 5\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2-5L_3]{L_1 \leftarrow L_1+2L_3} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1+L_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{A \underset{L}{\sim} I_3}$$

b. On a :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3+L_1]{L_2 \leftarrow L_2-L_1} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

On obtient deux pivots (non nuls), donc :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = 2}$$

Puis :

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2/2} \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1-L_2} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

c. On a :

$$\begin{pmatrix}a & 2 & -1\\ 2 & -1 & -a\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & -1 & -a\\ a & 2 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3+aL_1]{L_2 \leftarrow L_2+2L_1} \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4-a\\ 0 & a+2 & 2a-1\end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3-(a+2)L_2} \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4-a\\ 0 & 0 & a^2-9\end{pmatrix}$$

On obtient deux ou trois pivots (non nuls), et :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \begin{cases}2 & \text{si } a^2 = 9\\ 3 & \text{si } a^2 \neq 9\end{cases}}$$

Considérons trois cas :

- $a=-3$. Alors :

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4-a\\ 0 & 0 & a^2-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1-L_2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & -5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftarrow -L_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{A\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & 5\\ 0 & 1 & 7\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

- $a=3$. Alors :

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4-a\\ 0 & 0 & a^2-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1-L_2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftarrow -L_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{A\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

- $a^2\neq 9$. Alors :

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4-a\\ 0 & 0 & a^2-9\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\leftarrow L_3/(a^2-9)}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 4-a\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[L_2\leftarrow L_2-(4-a)L_3]{L_1\leftarrow L_1-2L_3}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1-L_2}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftarrow -L_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{A\underset{L}{\sim}I_3}$$

d. On a :

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftrightarrow L_4}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftarrow -L_1}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1\\ -1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[L_3\leftarrow L_3-L_4]{L_2\leftarrow L_2+L_1}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -2 & -3\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_4}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

On obtient quatre pivots (non nuls), donc :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A)=4}$$

Alors :

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1\\0 & -1 & 1 & 2\\0 & 0 & -2 & -3\\0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\xrightarrow[L_4\leftarrow -L_4/2]{L_2\leftarrow -L_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & -1\\0 & 1 & -1 & -2\\0 & 0 & -2 & -3\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{L_2\leftarrow L_2+2L_4\\L_3\leftarrow L_3+3L_4}]{L_1\leftarrow L_1+L_4}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & -2 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3\leftarrow -L_3/2}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2+L_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1\leftarrow L_1+2L_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{A \underset{L}{\sim} I_4}$$

e. On a :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1\\1 & 1 & -1 & -1 & 0\\0 & -1 & 1 & 0 & 0\\1 & -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4-L_1]{L_2\leftarrow L_2-L_1}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & -1\\0 & -1 & 1 & 0 & 0\\0 & -1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[L_4\leftarrow L_4+L_2]{L_3\leftarrow L_3+L_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_4\leftarrow L_4-L_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{L_3\leftarrow -L_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

On obtient trois pivots (non nuls), donc :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A)=3}$$

Puis :

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 1\\0 & 1 & -1 & 0 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[L_1\leftarrow L_1-L_3]{L_2\leftarrow L_2+L_3}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -1 & 0\\0 & 1 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

f. On a :

$$
A=\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & & 1 & & \vdots\\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & 1 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{ ligne } i \\ \\ \\ \leftarrow \text{ ligne } j \\ \\ \\ \end{array}\\
\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{colonne } k & & \text{colonne } j & & \end{array} &
\end{array}
$$

Considérons deux cas.

<u>1^{er} cas</u> : $i=k$. Alors :

$$
A=\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & 1 & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & 1 & \ddots & 1 & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \text{ ligne } i \\ \\ \leftarrow \text{ ligne } j \\ \\ \\ \end{array}\\
\begin{array}{ccccccc} & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & \text{colonne } i & & \text{colonne } j & & \end{array} &
\end{array}
\xrightarrow{L_j \leftarrow L_j - L_i}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & 1 & \ddots & 1 & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots\\
\vdots & & 0 & \ddots & 0 & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Puis, en échangeant L_j et L_{j+1}, puis L_{j+1} et L_{j+2}, et ainsi de suite jusqu'à échanger L_{n-1} et L_n, on obtient :

$$
\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & 1 & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & 1 & 0 & & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & 0 & 1 & & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & 1\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{ ligne } i \\ \\ \leftarrow \text{ ligne } j \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Donc :

$$
\boxed{\operatorname{rg}(A)=n-1 \text{ et } A \underset{L}{\sim}
\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & 1 & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & 1 & 0 & & & \vdots\\
\vdots & & \ddots & 0 & 1 & & \vdots\\
\vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & & \ddots & \ddots & 1\\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{ ligne } i \\ \\ \leftarrow \text{ ligne } j \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}}
$$

<u>2^{nd} cas</u> : $i \neq k$. Alors :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&&1&&\vdots\\\vdots&\ddots&1&\ddots&&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&&1&\ddots&1&\ddots&\vdots\\\vdots&&&&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\leftarrow \text{ligne } i\\\\\\\leftarrow \text{ligne } j\\\\\\\end{matrix}\xrightarrow{L_j\leftarrow L_j-L_k}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&&1&&\vdots\\\vdots&\ddots&1&\ddots&&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&&0&\ddots&1&\ddots&\vdots\\\vdots&&&&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_i\leftarrow L_i-L_j}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&&0&&\vdots\\\vdots&\ddots&1&\ddots&&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&&0&\ddots&1&\ddots&\vdots\\\vdots&&&&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&0&1\end{pmatrix}$$

$\uparrow$ colonne k $\quad\uparrow$ colonne j

Donc :

$$\boxed{\mathrm{rg}(A)=n \text{ et } A\underset{L}{\sim} I_n}$$

Exercice 5 *Systèmes*

a. On a :

$$\begin{cases}2x-y+z=2\\x+2y-z=-2\\-x+y+2z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x+y=0\\x+2y-z=-2\\3y+z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2(-3x)-9x=-2\\y=-3x\\z=9x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=1\\y=-3x\\z=9x\end{cases}$$

Donc :

$$\boxed{(x,y,z)=\left(\frac{1}{7},-\frac{3}{7},\frac{9}{7}\right)}$$

b. On a :

$$\begin{cases}x+y=z+t\\y+z=t+x\\x+z=y+t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-z=t\\-x+y+z=t\\x-y+z=t\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{t}{2}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\boxed{(x,y,z)=(t,t,t) \text{ avec } t\in\mathbb{R}}$$

b. On a :

$$\begin{cases}2x+y=1\\3x-2y=4\\5x+3y=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=1-2x\\3x-2(1-2x)=4\\5x+3(1-2x)=\lambda\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-\dfrac{5}{7}\\x=\dfrac{6}{7}\\x=3-\lambda\end{cases}$$

Donc, le système admet une solution si et seulement si $3-\lambda=\frac{6}{7}$, soit $\lambda=\frac{15}{7}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } \lambda\neq\frac{15}{7}\text{, il n'y a pas de solution et si } \lambda=\frac{15}{7}\text{, alors } (x,y)=\left(\frac{6}{7},-\frac{5}{7}\right).}$$

d. On a :

$$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx) \quad \text{et} \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{xy+yz+zx}{xyz}.$$

Donc :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{xy+yz+zx}{xyz}=1 \\ (x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ xyz=-1 \\ xy+yz+zx=-1 \end{cases}$$

Or, x, y et z sont racines de $(X-x)(X-y)(X-z)=X^3-(x+y+z)X^2+(xy+yz+zx)X-xyz$, donc :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=-1 \\ x^2+y^2+z^2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \text{x, y et z sont racines de } X^3-X^2-X+1.$$

Enfin :

$$X^3-X^2-X+1=X^2(X-1)-(X-1)=(X^2-1)(X-1)=(X+1)(X-1)^2.$$

Donc les racines de X^3-X^2-X+1 sont – 1 et 1 (double) et ainsi :

$$\boxed{\text{Les triplets solutions sont } (-1,1,1),\ (1,-1,1) \text{ et } (1,1,-1).}$$

Chapitre 18 - Déterminants - Entrainement

Exercice 1 *Calculs*

a. $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ b. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$ c. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

Exercice 2 *Inversibilité de matrice*

Dans chacun des cas suivants, calculer le déterminant de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sous la forme la plus factorisée possible et donner une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c (le cas échéant) pour que A soit inversible.

a. $A = \begin{pmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & -a+b-c & 2b \\ 2c & 2c & -a-b+c \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} a & b & b & -a \\ a & -b & b & a \\ b & a & a & -b \\ b & -a & a & b \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 1 & \sin a & \sin 2a \\ 1 & \sin 2a & \sin 3a \\ 1 & \sin 3a & \sin 4a \end{pmatrix}$ d. $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$

Exercice 3 *Déterminants d'ordre n*

Calculer les déterminants d'ordre n suivants :

a. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & n-4 & n-3 & n-2 \\ 2 & 1 & 0 & \ddots & \ddots & n-4 & n-3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-3 & n-4 & \ddots & \ddots & 0 & 1 & 2 \\ n-2 & n-3 & n-4 & \ddots & 1 & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ b. $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & ab & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}$

c. $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ avec n pair. d. $\Delta_4 = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & \cdots & b \\ 1 & a & b & b & & \vdots \\ 1 & 1 & a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & b & b \\ \vdots & & \ddots & 1 & a & b \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 & a \end{vmatrix}$

Exercice 4 *Déterminants d'endomorphismes*

Calculer le déterminant des endomorphismes u donnés.

a. $u : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : (x, y, z, t) \mapsto (x + y + z,\ y + z + t,\ z + t + x,\ t + x + y)$.

b. $u : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X] : P \mapsto (6X + 2)P - 2(X + 1)^2 P' + (X + 1)^3 P'' - X^4 P'''$.

c. $u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : M \mapsto {}^t M$.

Exercice 5 *Systèmes*

Résoudre les systèmes suivants, suivant la valeur de paramètre *m* :

a. $\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ x + 2y - z = m \\ x + my + z = 0 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + y - z = 1 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + y + z - t = 1 \\ x - y - z + t = m \\ x - y + z - t = m^2 \\ x + y - z + t = m^3 \end{cases}$

Commencer par calculer sous forme factorisée (s'il y a lieu) le déterminant de la matrice associée au système.

Indications

Exercice 1 *Calculs*

a. On peut commencer par $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, puis $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$.

b. On peut faire $C_3 \leftarrow C_3 - C_1$ et $C_4 \leftarrow C_4 - C_2$, puis observer les deux dernières colonnes.

c. Commencer par $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, puis soustraire la première ligne aux autres pour développer par rapport à la première colonne.

Exercice 2 *Inversibilité de matrice*

a. Commencer par $L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3$.
b. On peut faire $C_3 \leftarrow C_3 - C_2$ et $C_4 \leftarrow C_4 + C_1$, puis factoriser par 2 les deux dernières colonnes, puis $C_1 \leftarrow C_1 - C_4$ et $C_2 \leftarrow C_2 + C_3$, puis $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$ et $C_3 \leftarrow C_3 + C_4$, puis factoriser par $a+b$ les colonnes adéquates.
c. On peut faire $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et utiliser la formule donnant $\sin a - \sin b$ sous forme factorisée. Avec la formule $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$, on s'en sort bien après.
d. Commencer par $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, puis factoriser par $a+b$, puis $L_i \leftarrow L_i - L_1$ pour $i = 2,3,4$.

Bien entendu, dans tous les cas, A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Exercice 3 *Déterminants d'ordre n*

a. Retrancher chaque colonne à la suivante, puis $L_i \leftarrow L_i + L_n$ pour $i = 1,2,3,...,n-1$.

b. Poser $\Delta_2 = \Delta_2(n)$. Deux développements bien choisis donnent une relation de récurrence linéaire double. On sera amené à considérer deux cas : $a \neq b$ et $a = b$.

c. Poser $n = 2p$ et $\Delta_3 = \Delta_3(p)$. Faire $L_1 \leftarrow L_1 - aL_2$ et $L_i \leftarrow L_i - L_2$ pour $i = 4,6,8,...,2p$, puis échanger les deux premières colonnes. Deux développements successifs permettent alors d'obtenir une relation très simple entre $\Delta_3(p)$ et $\Delta_3(p-1)$.

d. On retranche la première colonne à toutes les autres, puis la dernière ligne à toutes les autres sauf la première. On développe par rapport à la première colonne, puis quand $b \neq a$, poser :

$$u_n = \frac{1}{(b-a)^n} \begin{vmatrix} b-a & b-a & \cdots & b-a & b-a \\ a-1 & b-1 & \cdots & b-1 & b-a \\ 0 & a-1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-1 & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 & b-a \end{vmatrix}_n$$

avec $u_1 = 1$ et établir que $u_n - u_{n-1} = \left(\dfrac{a-1}{a-b}\right)^{n-1}$.

On obtient alors u_n par télescopage. Attention, il faut considérer à part le cas où $b = 1$ et ne pas oublier de traitre le cas $b = a$.

Exercice 4 *Déterminants d'endomorphismes*

Dans chaque cas, déterminer les images par u des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_c$ de l'espace considéré, puis la matrice $M_{\mathcal{B}_c}(u)$. Le déterminant de u est alors celui e $M_{\mathcal{B}_c}(u)$.

Réponses

Exercice 1 *Calculs*

a. $$\begin{vmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2\leftarrow C_2-C_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -16$$

b. $$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3\leftarrow C_3-C_1 \\ C_4\leftarrow C_4-C_2}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$ (car les colonnes 3 et 4 sont égales).

c. $$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} \underset{\substack{L_i\leftarrow L_i-L_1 \\ \text{pour } i=2,3,4,5}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 & -2 \\ -3 & -5 & 0 & 5 \\ 0 & -5 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} \underset{C_2\leftarrow C_2+C_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -2 \\ -3 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & -3 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3\left(-2\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}\right) + 2\times 5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 1$$

Exercice 2 *Inversibilité de matrice*

a. On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & -a+b-c & 2b \\ 2c & 2c & -a-b+c \end{vmatrix} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & -a+b-c & 2b \\ 2c & 2c & -a-b+c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & -a+b-c & 2b \\ 2c & 2c & -a-b+c \end{vmatrix} \underset{\substack{C_2\leftarrow C_2-C_1 \\ C_3\leftarrow C_3-C_1}}{=} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)^3$$

La matrice A est inversible si et seulement si $a+b+c \neq 0$.

b. On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & b & b & -a \\ a & -b & b & a \\ b & a & a & -b \\ b & -a & a & b \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3\leftarrow C_3-C_2 \\ C_4\leftarrow C_4+C_1}}{=} \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & -b & 2b & 2a \\ b & a & 0 & 0 \\ b & -a & 2a & 2b \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ a & -b & b & a \\ b & a & 0 & 0 \\ b & -a & a & b \end{vmatrix} \underset{\substack{C_1\leftarrow C_1-C_4 \\ C_2\leftarrow C_2+C_3}}{=} 4\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{C_1\leftarrow C_1+C_2 \\ C_3\leftarrow C_3+C_4}}{=} 4\begin{vmatrix} a+b & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b & a \\ a+b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a+b & b \end{vmatrix} = 4(a+b)^2\begin{vmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b \end{vmatrix} \underset{\substack{L_4\leftarrow L_4-L_2 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} 4(a+b)^2\begin{vmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-a \end{vmatrix}$$

$$= 4(a+b)^2(a-b)^2\begin{vmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4(a+b)^2(a-b)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4(a+b)^2(a-b)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 4(a+b)^2(a-b)^2$$

La matrice A est inversible si et seulement si $b \neq \pm a$.

c. On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \sin 2a \\ 1 & \sin 2a & \sin 3a \\ 1 & \sin 3a & \sin 4a \end{vmatrix} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \sin 2a \\ 1 & \sin 2a & \sin 3a \\ 0 & \sin 3a-\sin 2a & \sin 4a-\sin 3a \end{vmatrix} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & \sin a & \sin 2a \\ 0 & \sin 2a-\sin a & \sin 3a-\sin 2a \\ 0 & \sin 3a-\sin 2a & \sin 4a-\sin 3a \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sin 2a-\sin a & \sin 3a-\sin 2a \\ \sin 3a-\sin 2a & \sin 4a-\sin 3a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\cos\frac{3a}{2}\sin\frac{a}{2} & 2\cos\frac{5a}{2}\sin\frac{a}{2} \\ 2\cos\frac{5a}{2}\sin\frac{a}{2} & 2\cos\frac{7a}{2}\sin\frac{a}{2} \end{vmatrix} = 4\sin^2\frac{a}{2}\begin{vmatrix} \cos\frac{3a}{2} & \cos\frac{5a}{2} \\ \cos\frac{5a}{2} & \cos\frac{7a}{2} \end{vmatrix}$$

$$= 2\sin^2\frac{a}{2}\left(2\cos\frac{3a}{2}\cos\frac{7a}{2} - 2\cos^2\frac{5a}{2}\right) = 2\sin^2\frac{a}{2}\left(\cos 5a + \cos 2a - \cos 5a - 1\right) = -4\sin^2\frac{a}{2}\sin^2 a$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\sin\frac{a}{2} \neq 0$ et $\sin a \neq 0$, c'est-à-dire $a \neq 0\ [\pi]$.

d. On a :

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{vmatrix} \underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3+C_4}{=} \begin{vmatrix} a+b & 0 & b & 0 \\ a+b & a & 0 & b \\ a+b & 0 & a & 0 \\ a+b & b & 0 & a \end{vmatrix} = (a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & a & 0 & b \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & b & 0 & a \end{vmatrix} \underset{\substack{L_i\leftarrow L_i-L_1 \\ \text{pour } i=2,3,4}}{=} (a+b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -b & b \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & b & -b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a-b)\begin{vmatrix} 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & a & -b & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & -b & a \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)\begin{vmatrix} a & -b & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & -b & a \end{vmatrix} = (a+b)(a-b)\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+b)(a-b)(a^2-b^2) = (a+b)^2(a-b)^2$$

La matrice A est inversible si et seulement si $b \neq \pm a$.

Exercice 3 *Déterminants d'ordre n*

a. En retranchant chaque colonne à la suivante, on obtient :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \ddots & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-3 & -1 & \ddots & \ddots & -1 & 1 & 1 \\ n-2 & -1 & -1 & \ddots & -1 & -1 & 1 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

Puis en faisant $L_i \leftarrow L_i + L_n$ pour $i = 1, 2, 3, ..., n-1$, on obtient :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} n-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ n & -2 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ n+1 & -2 & -2 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2n-4 & -2 & \ddots & \ddots & -2 & 0 & 0 \\ 2n-3 & -2 & -2 & \ddots & -2 & -2 & 0 \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Soit :

$$\boxed{\Delta_1 = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}}$$

b. En développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\Delta_2(n) = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & & \vdots \\ 0 & 1 & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & ab & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_n = (a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & ab & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} ab & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & ab & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1}$$

Puis, En développant le second déterminant par rapport à la première ligne, on obtient :

$$\Delta_2(n) = (a+b)\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & ab & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-1} - ab\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & a+b & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & ab & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & a+b & ab \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a+b \end{vmatrix}_{n-2}$$

Donc :

$$\Delta_2(n) = (a+b)\Delta_2(n-1) - ab\Delta_2(n-2).$$

La suite $\left(\Delta_2(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie donc une relation de récurrence linéaire double.

L'équation caractéristique associée est $r^2 - (a+b)r + ab = 0$ dont les racines sont a et b.

Considérons alors deux cas.

<u>1^er cas</u> : $a \neq b$. Alors, $\Delta_2(n) = \lambda a^n + \mu b^n$ avec :

$$\begin{aligned} &\Delta_2(1) = \lambda a + \mu b = a + b \\ &\Delta_2(2) = \lambda a^2 + \mu b^2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = (a+b)^2 - ab = a^2 + ab + b^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{a}{a-b} \\ \mu = -\dfrac{b}{a-b} \end{cases}$$

Donc :

$$\Delta_2(n) = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}.$$

<u>2^nd cas</u> : $a = b$. Alors, $\Delta_2(n) = (\lambda n + \mu)a^n$ avec :

$$\begin{aligned} &\Delta_2(1) = (\lambda + \mu)a = 2a \\ &\Delta_2(2) = (2\lambda + \mu)a^2 = \begin{vmatrix} 2a & a^2 \\ 1 & 2a \end{vmatrix} = 3a^2 \end{aligned} \Rightarrow \lambda = \mu = 1.$$

Donc :

$$\Delta_2(n) = (n+1)a^n.$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta_2 = \begin{cases} \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b} & \text{quand } a \neq b \\ (n+1)a^n & \text{quand } a = b \end{cases}}$$

c. Posons $n = 2p$. En faisant $L_1 \leftarrow L_1 - aL_2$ et $L_i \leftarrow L_i - L_2$ pour $i = 4, 6, 8, ..., 2p$, on obtient :

$$\Delta_3 = \Delta_3(p) = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{2p} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{2p}$$

En échangeant les deux premières colonnes, on obtient :

$$\Delta_3 = \Delta_3(p) = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{2p}$$

En développant deux fois de suite par rapport à la première colonne :

$$\Delta_3=\Delta_3(p)=-\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a & 1 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}_{2p-2} = -\Delta_3(p-1)$$

La suite $(\Delta_3(p))_{p\in\mathbb{N}^*}$ est donc géométrique de raison – 1, donc :

$$\Delta_3(p)=(-1)^{p-1}\Delta_3(1)=(-1)^{p-1}\begin{vmatrix} a & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=(-1)^{p-1}(-1).$$

Ainsi :

$$\boxed{\Delta_3=(-1)^p}$$

d. On retranche la première colonne à toutes les autres :

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} a & b-a & b-a & \cdots & \cdots & b-a\\ 1 & a-1 & b-1 & b-1 & \cdots & b-1\\ 1 & 0 & a-1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & b-1 & b-1\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & a-1 & b-1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

On retranche la dernière ligne à toutes les autres sauf la première :

$$\Delta_4=\begin{vmatrix} a & b-a & b-a & \cdots & b-a & b-a\\ 0 & a-1 & b-1 & \cdots & b-1 & b-a\\ 0 & 0 & a-1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & b-1 & b-a\\ 0 & 0 & \ddots & 0 & a-1 & b-a\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$$

On développe par rapport à la première colonne :

$$\Delta_4=a\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & \cdots & b-1 & b-a\\ 0 & a-1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b-1 & b-a\\ \vdots & & \ddots & a-1 & b-a\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a-1 \end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} b-a & b-a & \cdots & b-a & b-a\\ a-1 & b-1 & \cdots & b-1 & b-a\\ 0 & a-1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b-1 & b-a\\ 0 & \cdots & 0 & a-1 & b-a \end{vmatrix}_{n-1}=a(a-1)^{n-1}+(-1)^{n+1}d_{n-1}$$

avec $d_n=\begin{vmatrix} b-a & b-a & \cdots & b-a & b-a\\ a-1 & b-1 & \cdots & b-1 & b-a\\ 0 & a-1 & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & b-1 & b-a\\ 0 & \cdots & 0 & a-1 & b-a \end{vmatrix}_n$ et $d_1=b-a$.

Dans d_n, on retranche la première colonne aux autres, sauf la dernière :

$$d_n = \begin{vmatrix} b-a & 0 & \cdots & 0 & b-a \\ a-1 & b-a & \cdots & b-a & b-a \\ 0 & a-1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-1 & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 & b-a \end{vmatrix}_n$$

On développe par rapport à la première ligne :

$$d_n = (b-a)\begin{vmatrix} b-a & b-a & \cdots & b-a & b-a \\ a-1 & b-1 & \cdots & b-1 & b-a \\ 0 & a-1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b-1 & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & a-1 & b-a \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+1}(b-a)\begin{vmatrix} a-1 & b-a & \cdots & b-a & b-a \\ 0 & a-1 & \cdots & b-1 & b-a \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a-1 & b-a \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Soit :

$$d_n = (b-a)d_{n-1} + (-1)^{n+1}(b-a)(a-1)^{n-1}.$$

Si $b \neq a$, posons $u_n = \dfrac{d_n}{(b-a)^n}$. On a $d_1 = b-a$, donc $u_1 = 1$ et :

$$u_n - u_{n-1} = \left(\frac{a-1}{a-b}\right)^{n-1}.$$

Donc :

$$\sum_{k=2}^{n}(u_k - u_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{a-1}{a-b}\right)^{k-1} \quad \Leftrightarrow \quad u_n = \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{a-1}{a-b}\right)^{k} + u_1.$$

Et :

- si $b \neq 1$, $u_n = \dfrac{a-1}{b-1}\left[\left(\dfrac{a-1}{a-b}\right)^{n-1} - 1\right] + 1$, soit :

$$d_n = u_n(b-a)^n = \frac{b-a}{b-1}\left[(b-a)^n - (1-a)^n\right].$$

- si $b = 1$, $u_n = n$, soit :

$$d_n = u_n(b-a)^n = n(1-a)^n.$$

Enfin, si $b = a$, la première ligne de d_n est nulle, donc $d_n = 0$ et les formules ci-dessus restent valables.

Alors, avec $\Delta_4 = a(a-1)^{n-1} + (-1)^{n+1}d_{n-1}$, on a :

$$\Delta_4 = \begin{cases} a(a-1)^{n-1} + (-1)^{n+1}\dfrac{b-a}{b-1}\left[(b-a)^{n-1} - (1-a)^{n-1}\right] & \text{quand } b \neq 1 \\ a(a-1)^{n-1} + (-1)^{n+1}(n-1)(1-a)^{n-1} & \text{quand } b = 1 \end{cases}$$

Soit :

$$\boxed{\Delta_4 = \begin{cases} \dfrac{b(a-1)^n - (a-b)^n}{b-1} & \text{quand } b \neq 1 \\ (a+n-1)(a-1)^{n-1} & \text{quand } b = 1 \end{cases}}$$

Exercice 4 *Déterminants d'endomorphismes*

a. Notons $\mathcal{B}_c=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a :

$$\begin{cases} u(\varepsilon_1)=(1,0,1,1)=\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_4 \\ u(\varepsilon_2)=(1,1,0,1)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_4 \\ u(\varepsilon_3)=(1,1,1,0)=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \\ u(\varepsilon_4)=(0,1,1,1)=\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad M_{\mathcal{B}_c}(u)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}.$$

Et :

$$\det u=\det\left(M_{\mathcal{B}_c}(u)\right)=\begin{vmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\end{vmatrix}\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3+C_4}{=}\begin{vmatrix}3&1&1&0\\3&1&1&1\\3&0&1&1\\3&1&0&1\end{vmatrix}\underset{\substack{L_i\leftarrow L_i-L_1\\ \text{pour } i=2,3,4}}{=}\begin{vmatrix}3&1&1&0\\0&0&0&1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la première colonne puis par rapport à la première ligne :

$$\det u=3\begin{vmatrix}0&0&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}.$$

Finalement :

$$\boxed{\det u=3}$$

b. Notons $\mathcal{B}_c=(1,X,X^2,X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a alors :

$$\begin{cases} u(1)=6X+2 \\ u(X)=4X^2-2X-2 \\ u(X^2)=4X^3+2X+2 \\ u(X^3)=8X^3+12X^2+6X \end{cases} \quad\Rightarrow\quad M_{\mathcal{B}_c}(u)=\begin{pmatrix}2&-2&2&0\\6&-2&2&6\\0&4&0&12\\0&0&4&8\end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\det u=\det\left(M_{\mathcal{B}_c}(u)\right)=\begin{vmatrix}2&-2&2&0\\6&-2&2&6\\0&4&0&12\\0&0&4&8\end{vmatrix}\underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{=}\begin{vmatrix}2&-2&2&0\\0&4&-4&6\\0&4&0&12\\0&0&4&8\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}4&-4&6\\4&0&12\\0&4&8\end{vmatrix}.$$

$$=2\times4\times4\times2\begin{vmatrix}1&-1&3\\1&0&6\\0&1&4\end{vmatrix}\underset{L_3\leftarrow L_3+L_1}{=}64\begin{vmatrix}1&-1&3\\1&0&6\\1&0&7\end{vmatrix}=64\begin{vmatrix}1&6\\1&7\end{vmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{\det u=64}$$

c. Notons $\mathcal{B}_c = \left(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2}\right)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a alors :

$$\begin{cases} u(E_{1,1}) = E_{1,1} \\ u(E_{1,2}) = E_{2,1} \\ u(E_{2,1}) = E_{1,2} \\ u(E_{2,2}) = E_{2,2} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad M_{\mathcal{B}_c}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$\det u = \det\left(M_{\mathcal{B}_c}(u)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Soit :

$$\boxed{\det u = -1}$$

Exercice 5 *Systèmes*

a. La matrice associée au système est $\begin{pmatrix} m & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ et :

$$\begin{vmatrix} m & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} m-1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ m & 1 \end{vmatrix} = (m-1)(m+2).$$

Il y a trois cas.

<u>1$^{\text{er}}$ cas</u> : $m = 1$. Le système se récrit :

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+2y-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=1 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=1 \\ y-2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1-3y}{2} \\ z = \dfrac{y-1}{2} \end{cases}$$

Les solutions sont :

$$\boxed{\left(\frac{1-3y}{2}, y, \frac{y-1}{2}\right) \text{ avec } y \in \mathbb{R}}$$

<u>2$^{\text{ème}}$ cas</u> : $m = -2$. Le système se récrit :

$$\begin{cases} -2x+2y-z=1 \\ x+2y-z=-2 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z=-2 \\ 2x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2y+1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Les solutions sont :

$$\boxed{\left(-1, y, 2y+1\right) \text{ avec } y \in \mathbb{R}}$$

<u>$3^{\text{ème}}$ cas</u> : $m \neq 1$ et $m \neq -2$. Alors, le système est de Cramer et :

$$\begin{cases} mx+2y-z=1 \\ x+2y-z=m \\ x+my+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)x=1-m \\ x+2y-z=m \\ 2x+(m+2)y=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ z=2y-m-1 \\ (m+2)y=m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ z=1-m \\ y=1 \end{cases}$$

La solution est :

$$\boxed{(-1,1,1-m)}$$

b. La matrice associée au système est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{pmatrix}$ et :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} \underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 0 & 0 & m+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = (m+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (m+1)(m-1).$$

Il y a trois cas.

<u>1^{er} cas</u> : $m=1$. Le système se récrit :

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+y-z=1 \\ x+y-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } m=1, \text{ les solutions sont } (x,1-x,0) \text{ avec } x\in\mathbb{R}}$$

<u>$2^{\text{ème}}$ cas</u> : $m=-1$. Le système se récrit :

$$\begin{cases} x+y-z=-1 \\ x+y-z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$$

Les deux premières équations permettent de conclure que le système est incompatible donc :

$$\boxed{\text{Si } m=-1, \text{ le système n'a pas de solution.}}$$

<u>$3^{\text{ème}}$ cas</u> : $m \neq 1$ et $m \neq -1$. Alors, le système est de Cramer et :

$$\begin{cases} x+y+mz=m \\ x+y-z=1 \\ x+my-z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+mz=m \\ -z-mz=1-m \\ my-z-y-mz=1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+mz=m \\ (m+1)z=m-1 \\ (m-1)y-(m+1)z=1-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=m(1-z) \\ z=\dfrac{m-1}{m+1} \\ y=0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } m\neq 1 \text{ et } m\neq -1, \text{ la solution est } \left(\frac{2m}{m+1},0,\frac{m-1}{m+1}\right).}$$

c. b. La matrice associée au système est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Le déterminant de cette matrice est nul car les deux dernières colonnes sont opposées.

La somme des deux premières équations du système donne $2x = m+1$ et celle des deux dernières donne $2x = m^2(m+1)$. Donc, si $m^2(m+1) \neq m+1$, le système est incompatible. Et :

$$m^2(m+1) = m+1 \iff (m^2-1)(m+1) = 0 \iff m = 1 \text{ ou } m = -1 .$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } m^2 \neq 1 \text{, le système n'a pas de solution.}}$$

Si $m = 1$, le système se récrit :

$$\begin{cases} x+y+z-t=1 \\ x-y-z+t=1 \\ x-y+z-t=1 \\ x+y-z+t=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z-t=1 \\ 2x=2 \\ -2y=0 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \iff \begin{cases} z=t \\ x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } m=1 \text{, les solutions sont } (1,0,t,t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}.}$$

Si $m = -1$, le système se récrit :

$$\begin{cases} x+y+z-t=1 \\ x-y-z+t=-1 \\ x-y+z-t=1 \\ x+y-z+t=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z-t=1 \\ 2x=0 \\ -2y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=t+1 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } m=-1 \text{, les solutions sont } (0,0,t+1,t) \text{ avec } t \in \mathbb{R}.}$$

Chapitre 19 - Espaces Préhilbertiens et Euclidiens - Entrainement

Exercice 1 *Produits scalaires*

Dans chaque cas suivant, montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur l'espace E donné.

a. $E=\mathbb{R}^3$ et $\forall (x,y)\in E^2$ avec $x=(x_1,x_2,x_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$:

$$(x|y)=2x_1y_1+3x_2y_2+2x_3y_3+2x_3y_2+2x_2y_3.$$

b. $E=\mathbb{R}_2[X]$ et $\forall (P,Q)\in E^2$, $(P|Q)=P(1)Q(1)+P'(1)Q'(1)+P''(1)Q''(1)$.

c. $E=\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $\forall (u,v)\in E^2$, $(u|v)=\sum_{i=1}^{n} < u(e_i)|v(e_i) >$ où $(e_1,e_2,...,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $<\cdot|\cdot>$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 2 *Inégalités*

Dans chaque cas, prouver les inégalités données.

1) $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\geq n^2$ avec $(a_1,a_2,...,a_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.
2) $\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x}\leq\sqrt{6(x+y+z)}$ avec $(x,y,z)\in(\mathbb{R}_+)^3$.
3) $\sum_{k=1}^{n}k^5\geq\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3$.
4) $\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}}\leq\sqrt{(n+1)2^n}$.

Exercice 3 *Orthogonalité*

1) Soit $E=\mathbb{R}^3$, D la droite dirigée par $x_0=(1,-1,1)$ et $F=\mathrm{Vect}(x_1,x_2)$ avec $x_1=(1,1,1)$ et $x_2=(1,0,1)$.
   a. Déterminer $F\cap D^\perp$ pour le produit scalaire canonique.
   b. Déterminer $F\cap D^\perp$ pour le produit scalaire défini dans la question a de l'exercice 1.
   c. Déterminer les vecteurs orthogonaux à x_0 à la fois pour le produit scalaire canonique et pour le produit scalaire défini dans la question a de l'exercice 1.
2) Dans chaque cas suivant, déterminer l'orthogonal du sous-espace F de l'espace E donnés pour le produit scalaire $(\cdot|\cdot)$ mentionné.
   a. $E=\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $F=\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$, le sous-espace des matrices matrice symétriques de E et $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire canonique de E.
   b. $E=\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, $F=\mathrm{Vect}(id_{\mathbb{R}^n})$ et $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire de la question c de l'exercice 1.
   c. $E=\mathbb{R}_2[X]$, $F=\{P\in\mathbb{R}_2[X], P(0)=0\}$ et $(\cdot|\cdot)$ est le produit scalaire de la question b de l'exercice 1.
   d. $E=\mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$, $(f|g)=\int_0^1 fg$ et $F=\mathcal{C}^1([0;1],\mathbb{R})$.
3) Soit $E=\mathcal{C}([-1;1],\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(f|g)=\int_{-1}^{1}fg$. Soit $(f,g)\in E^2$. Montrer que si f est paire et g est impaire (ou le contraire), alors elles sont orthogonales. Etudier la réciproque.

Exercice 4 *Orthonormalisation*

1) Soit $E=\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel. On note $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de E et on considère la famille $\mathcal{B}=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ avec $f_1=(0,1,1,1)$, $f_2=(1,0,1,1)$, $f_3=(1,1,0,1)$ et $f_4=(1,1,1,0)$. Vérifier que $\mathcal{B}$ est une base de E, puis orthonormaliser $\mathcal{B}$ par la méthode de Gram-Schmidt.
2) Orthonormaliser la base canonique $\mathcal{B}_c=(1,X,X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$ pour le produit scalaire de la question b de l'exercice 1.
3) Donner une base de $\mathbb{R}^3$, orthonormée pour le produit scalaire défini dans la question a de l'exercice 1.

Exercice 5 *Projections orthogonales, distances*

1) On reprend les notations de la question 1 de l'exercice 3 et on appelle p_F la projection orthogonale sur F.
   a. Déterminer la matrice de p_F dans $\mathcal{B}_c$.
   b. Calculer $d(x_0+x_1,F)$.
2) Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire canonique, calculer la distance de X^2+1 à $\mathrm{Vect}(X^2-X,X^3-1)$.
3) Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1(t^2-at-b)^2\,dt$.

Indications

Exercice 1 *Produits scalaires*

Dans les trois cas, revenir à la définition, c'est-à-dire montrer que $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique définie et positive.

Exercice 2 *Inégalités*

Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique. Pour deux vecteurs $(x_1, x_2, ..., x_n)$ et $(y_1, y_2, ..., y_n)$, on a $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$.

1) Appliquer le résultat ci-dessus à $(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, ..., \sqrt{a_n})$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, ..., \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$.

2) Poser $x_1 = x + y,\ x_2 = y + z,\ x_3 = z + x$.

3) Poser $x_k = k^2\sqrt{k}$ et $y_k = \sqrt{k}$, et se rappeler de $\sum_{k=1}^{n} k$ et $\sum_{k=1}^{n} k^3$.

4) Poser $x_k = \sqrt{\binom{n}{k}}$ et $y_k = 1$.

Exercice 3 *Orthogonalité*

1) a. Commencer par traduire l'appartenance d'un vecteur (x, y, z) à F, puis à $D^{\perp}$ (avec le produit scalaire canonique).

b. Comme ci-dessus (mais avec le produit scalaire défini dans la question a de l'exercice 1 pour l'appartenance à $D^{\perp}$). Remarquer que la condition d'appartenance à F est la même car ne met pas en jeu le produit scalaire.

c. Traduire l'orthogonalité x_0 à d'un vecteur (x, y, z) pour chaque produit scalaire. Les vecteurs recherchés doivent remplir les deux conditions.

2) a. Rappeler le produit scalaire canonique dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et considérer une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$. Une matrice appartient à $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})^{\perp}$ si et seulement si elle est orthogonale à tous les vecteurs de cette base.

b. Traduire l'appartenance à $F^{\perp}$ d'un élément u de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ par $(u \,|\, id_{\mathbb{R}^n}) = 0$ et considérer la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

c. Remarquer que $F = \mathrm{Vect}(X^2, X)$ et donc que $P \in F^{\perp}$ si et seulement si $(P \,|\, X^2) = (P \,|\, X) = 0$, puis évaluer ces deux produits scalaires.

d. Pour $f \in F^{\perp}$, considérer Φ la primitive de f qui s'annule en 0, puis pour tout $g \in \mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$, évaluer $(f \,|\, g)$ à l'aide d'une intégration par parties. Remarquer aussi que quand g décrit $\mathcal{C}^1([0;1], \mathbb{R})$, g' décrit $\mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$.

3) Très simple en se rappelant que l'intégrale d'une fonction impaire sur $[-1;1]$ est nulle. Pour la réciproque éventuelle, chercher un contre-exemple.

Exercice 4 *Orthonormalisation*

Dans tous les cas, utiliser Gram-Schmidt en deux étapes : construire d'abord une base orthogonale, puis normaliser. Calculer préalablement les produits scalaires deux à deux des vecteurs de la base de départ permet de gagner du temps après et de minimiser les risques d'erreur.

1) Pour montrer que $\mathcal{B}=(f_1,f_2,f_3,f_4)$ est bien une base, on peut calculer $\det_{\mathcal{B}_c}(f_1,f_2,f_3,f_4)$.

2) Voir plus haut.

3) Orthonormaliser la base canonique.

Exercice 5 *Projections orthogonales, distances*

1) a. Déterminer $F^{\perp}$ (quelle est sa dimension ?), évaluer $p_F(x_1)$, $p_F(x_2)$ et $p_F(x_3)$ où x_3 est un mystérieux vecteur bien choisi, puis remarquer que $x_1=e_1+e_2+e_3$, $x_2=e_1+e_3$ et $x_3=\ldots$ pour calculer $p_F(e_1)$, $p_F(e_2)$ et $p_F(e_3)$ en fonction de e_1, e_2 et e_3.

b. On a $d(x_0+x_1,F)=\| x_0+x_1-p_F(x_0+x_1)\|$ avec $x_0=e_1-e_2+e_3$. Utiliser la question précédente.

2) En posant $F=\mathrm{Vect}(X^2-X,X^3-1)$ et $P=X^2+1$, on cherche $d(P,F)=\| P-p_F(P)\|$ où p_F est la projection orthogonale sur F. On a $p_F(P)=a(X^3-1)+b(X^2-X)$ et $P-p_F(P)\in F^{\perp}\ldots$

3) Se placer dans $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(f\mid g)=\int_0^1 fg$.

En notant $h:t\mapsto t^2$ et F l'ensemble des fonctions affines sur $[0,1]$, on a $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (t^2-at-b)^2\,dt=d(h,F)^2$.

On peut alors utiliser la même méthode que dans la question précédente.

Réponses

Exercice 1 *Produits scalaires*

a. Ici, $(\cdot|\cdot)$ est bien à images dans $\mathbb{R}$ et est clairement symétrique (le résultat ne change pas si on intervertit les x et y). De plus, $\forall\,(x,x',y)\in E^2$ avec $x=(x_1,x_2,x_3)$, $x'=(x'_1,x'_2,x'_3)$ et $y=(y_1,y_2,y_3)$ et $\forall\,(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}(\lambda x+\mu x'|y)&=2(\lambda x_1+\mu x'_1)y_1+3(\lambda x_2+\mu x'_2)y_2+2(\lambda x_3+\mu x'_3)y_3+2(\lambda x_3+\mu x'_3)y_2+2(\lambda x_2+\mu x'_2)y_3\\&=\lambda(2x_1y_1+3x_2y_2+2x_3y_3+2x_3y_2+2x_2y_3)+\mu(2x'_1y_1+3x'_2y_2+2x'_3y_3+2x'_3y_2+2x'_2y_3)\\&=\lambda(x|y)+\mu(x'|y)\end{aligned}$$

Donc, $(\cdot|\cdot)$ est linéaire à gauche, donc bilinéaire par symétrie.

Enfin, $\forall\,x=(x_1,x_2,x_3)\in E$, on a $(x|x)=2x_1^2+3x_2^2+2x_3^2+4x_2x_3=2x_1^2+x_2^2+2(x_2+x_3)^2$.

Donc, $(x|x)\geq 0$ et :

$$(x|x)=0\iff 2x_1^2=x_2^2=2(x_2+x_3)^2=0\iff x_1=x_2=x_2+x_3=0\iff x_1=x_2=x_3=0\iff x=0.$$

Ainsi, $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique définie, positive, donc c'est un produit scalaire.

b. Ici, $(\cdot|\cdot)$ est clairement symétrique et bilinéaire (par linéarité de la dérivation).

$\forall\,P\in E$, $(P|P)=P(1)^2+P'(1)^2+P''(1)^2\geq 0$ et :

$$(P|P)=0\iff P(1)^2+P'(1)^2+P''(1)^2=0\iff P(1)=P'(1)=P''(1)=0\iff P=0$$

car 1 est racine d'ordre au moins 3 et P est de degré au plus 2.

Ainsi, $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique définie, positive, donc c'est un produit scalaire.

c. Ici, $(\cdot|\cdot)$ est clairement symétrique (par symétrie de $<\cdot|\cdot>$) et bilinéaire (par bilinéarité de $<\cdot|\cdot>$).

$\forall\,u\in E$, $(u|u)=\sum_{i=1}^{n}<u(e_i)|u(e_i)>=\sum_{i=1}^{n}\|u(e_i)\|^2\geq 0$ et :

$$(u|u)=0\iff\sum_{i=1}^{n}\|u(e_i)\|^2=0\iff\|u(e_1)\|=\ldots=\|u(e_n)\|=0\iff u(e_1)=\ldots=u(e_n)=0\iff u=0$$

car $(e_1,e_2,\ldots,e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Ainsi, $(\cdot|\cdot)$ est une forme bilinéaire, symétrique définie, positive, donc c'est un produit scalaire.

Exercice 2 *Inégalités*

Rappelons que dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée aux vecteurs $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$, s'écrit :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right).$$

1) On applique le résultat ci-dessus à $(\sqrt{a_1},\sqrt{a_2},...,\sqrt{a_n})$ et $\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}},\frac{1}{\sqrt{a_2}},...,\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$, ce qui donne :

$$\left(\sum_{i=1}^{n}1\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

Soit, avec $\sum_{i=1}^{n}a_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \geq n^2$.

2) Posons $x_1 = x+y, x_2 = y+z, x_3 = z+x$. On a $x_1+x_2+x_3 = 2(x+y+z)$. D'après le résultat donné plus haut, on a :

$$\sum_{i=1}^{3}\sqrt{x_i} = \sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3} \leq \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{3}\sqrt{x_i}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{3}1^2\right)} = \sqrt{3(x_1+x_2+x_3)}\,.$$

Soit :

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{y+z}+\sqrt{z+x} \leq \sqrt{6(x+y+z)}\,.$$

3) En posant $x_k = k^2\sqrt{k}$ et $y_k = \sqrt{k}$, dans le résultat donné en préambule, on obtient :

$$\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\sqrt{k}\sqrt{k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}k^3\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}(k^2\sqrt{k})^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k})^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n}k^5\right)\left(\sum_{k=1}^{n}k\right).$$

Soit, avec $\sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n}k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$:

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^4 \leq \left(\sum_{k=1}^{n}k^5\right)\frac{n(n+1)}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n}k^5 \geq \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^3.$$

4) D'après le résultat rappelé plus haut, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}}^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n}1^2\right)} = \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\right)(n+1)}\,.$$

Or, $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$, donc $\sum_{k=0}^{n}\sqrt{\binom{n}{k}} \leq \sqrt{(n+1)2^n}$.

Exercice 3 *Orthogonalité*

1) a. On a $(x,y,z)\in F\cap D^{\perp}$ si et seulement si $(x,y,z)\in F$ et $(x,y,z)\perp x_0$, soit $\big((x,y,z)\,|\,(1,-1,1)\big)=0$.

Or :

$$(x,y,z)\in F \quad\Leftrightarrow\quad \left|\begin{array}{l} x \\ y = a \\ z \end{array}\right|\begin{array}{l} 1 \\ 1+b \\ 1 \end{array}\left|\begin{array}{l} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array}\right. \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x = a+b \\ y = a \\ z = a+b \end{cases} \text{avec } (a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad\Leftrightarrow\quad x = z\,.$$

Remarquons que $x = z$ est une équation cartésienne du plan F.

Alors :

$$(x,y,z)\in F\cap D^{\perp} \iff \begin{cases} x=z \\ \big((x,y,z)\,|\,(1,-1,1)\big)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ x-y+z=0 \end{cases} \iff \left|\begin{array}{l} x \\ y=x \\ z \end{array}\right|\begin{array}{l} 1 \\ 2. \\ 1 \end{array}$$

Donc :

$$\boxed{F\cap D^{\perp}=\mathrm{Vect}\big((1,2,1)\big)}$$

b. On a toujours ici :

- $(x,y,z)\in F$ si et seulement si $x=z$;
- $(x,y,z)\in D^{\perp}$ si et seulement si $\big((x,y,z)\,|\,(1,-1,1)\big)=0$, mais avec le produit scalaire défini dans la question a de l'exercice 1, ceci donne $\big((x,y,z)\,|\,(1,-1,1)\big)=2x-3y+2z-2z+2y=2x-y=0$.

Ainsi, le résultat est le même que dans la question précédente :

$$\boxed{F\cap D^{\perp}=\mathrm{Vect}\big((1,2,1)\big)}$$

c. Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. D'après la question a, (x,y,z) est orthogonal à x_0 pour le produit scalaire canonique quand $x-y+z=0$ et, d'après la question b, (x,y,z) est orthogonal à x_0 pour le produit scalaire de la question a de l'exercice 1 quand $2x-y=0$.

Ainsi, (x,y,z) est orthogonal à x_0 pour les deux produits scalaires quand $x-y+z=0$ et $2x-y=0$, soit $(x,y,z)=(x,2x,x)$ et donc :

$$\boxed{\text{L'ensemble des vecteurs orthogonaux à } x_0 \text{ pour les deux produits scalaires est } \mathrm{Vect}\big((1,2,1)\big).}$$

2) a. Rappelons que pour tout $(A,B)\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ avec $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, le produit scalaire canonique est $(A\,|\,B)=aa'+bb'+cc'+dd'$.

Rappelons de plus que $F=\mathcal{S}_2(\mathbb{R})=\mathrm{Vect}\big(E_{1,1},E_{2,2},E_{2,1}+E_{1,2}\big)$ est un sous-espace de dimension 3 de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc $F^{\perp}$ est de dimension 1 et :

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in F^{\perp} \iff (A\,|\,E_{1,1})=(A\,|\,E_{2,2})=(A\,|\,E_{2,1}+E_{1,2})=0 \iff a=d=b+c=0 \iff A=\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, $A\in F^{\perp}$ si et seulement si $A\in\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices matrice antisymétriques de E), donc :

$$\boxed{F^{\perp}=\mathcal{A}_2(\mathbb{R})}$$

b. Si $\mathcal{B}=(e_1,e_2,...,e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a ici :

$$u\in F^{\perp} \iff (u\,|\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})=\sum_{j=1}^{n}<u(e_j)\,|\,e_j>=0.$$

En posant $M_{\mathcal{B}}(u)=(a_{i,j})$, on a alors pour tout j entre 1 et n, $u(e_j)=a_{1,j}e_1+a_{1,j}e_2+...+a_{1,j}e_n$ et comme la base canonique est orthonormée pour le produit scalaire canonique, on a $<u(e_j)\mid e_j>=a_{j,j}$.

Ainsi, $u\in F^{\perp}$ si et seulement si $\sum_{j=1}^{n}a_{j,j}=0$, soit $\mathrm{Tr}\left(M_{\mathcal{B}}(u)\right)=\mathrm{Tr}(u)=0$ (Tr est la trace). Donc :

$$\boxed{F^{\perp}=\left\{u\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)\setminus \mathrm{Tr}(u)=0\right\}}$$

c. On a ici $\forall\,(P,Q)\in E^2$, $(P\mid Q)=P(0)Q(0)+P'(0)Q'(0)+P''(0)Q''(0)$ et :

$$F=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X],P(0)=0\right\}=\mathrm{Vect}(X^2,X).$$

Donc :

$$F^{\perp}=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X],(P\mid X^2)=(P\mid X)=0\right\}=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X],2P''(0)=P'(0)=0\right\}=\left\{P\in\mathbb{R}_2[X],P''(0)=P'(0)=0\right\}.$$

Or, pour $P\in\mathbb{R}_2[X]$, $P''(0)=P'(0)=0$ si et seulement si P est constant, donc :

$$\boxed{F^{\perp}\text{ est l'ensemble des polynômes constants.}}$$

d. Ici, on a :

$$F^{\perp}=\left\{f\in E\setminus\forall\,g\in F,(f\mid g)=0\right\}=\left\{f\in E\setminus\forall\,g\in C^1([0;1],\mathbb{R}),\int_0^1 fg=0\right\}.$$

Soit $f\in F^{\perp}$. Notons Φ la primitive de f qui s'annule en 0. On a alors $\forall\,g\in C^1([0;1],\mathbb{R})$:

$$\int_0^1 fg=\Phi(1)g(1)-\int_0^1\Phi g'=0.$$

Pour $g:x\mapsto 1$, ceci donne $\Phi(1)=0$, donc $\forall\,g\in C^1([0;1],\mathbb{R})$, $\int_0^1\Phi g'=0$, autrement dit, $\forall\,h\in C([0;1],\mathbb{R})$, $\int_0^1\Phi h=(\Phi\mid h)=0$, soit $\Phi\in E^{\perp}=\{0\}$. Ainsi, $\Phi=0$, donc $f=0$. Comme la fonction nulle est dans $F^{\perp}$, on a :

$$\boxed{F^{\perp}=\{0\}}$$

3) Soit $(f,g)\in E^2$ tel que f est paire et g est impaire (ou le contraire). Alors, $fg\in E$ et fg est impaire, donc $\int_{-1}^1 fg=0$, soit $(f\mid g)=0$. Ainsi, les fonctions f et g sont orthogonales.

Réciproquement, considérons :

$$f:x\mapsto\begin{cases}0 & \text{sur } [-1,0[\\ x & \text{sur } [0,1]\end{cases}\quad\text{et}\quad g:x\mapsto\begin{cases}x & \text{sur } [-1,0[\\ 0 & \text{sur } [0,1]\end{cases}$$

On a $(f,g)\in E^2$ et $fg=0$, donc $(f\mid g)=\int_{-1}^1 fg=0$ et f et g sont orthogonales. Par contre, f et g ne sont ni paires ni impaires. Donc, la réciproque est fausse.

Exercice 4 *Orthonormalisation*

Dans tous les cas, on utilise Gram-Schmidt en deux étapes : d'abord on construit une base orthogonale, puis on orthonormalise.

1) En posant $f = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, on a, pour tout i entre 1 et 4, $f_i = f - e_i$ et :

$$\begin{aligned}\det_{\mathcal{B}_c}(f_1,f_2,f_3,f_4) &= \det_{\mathcal{B}_c}(f-e_1,f-e_2,f-e_3,f-e_4) = \det_{\mathcal{B}_c}(3f,f-e_2,f-e_3,f-e_4)\\ &= 3\det_{\mathcal{B}_c}(f,f-e_2,f-e_3,f-e_4) = 3\det_{\mathcal{B}_c}(f,-e_2,-e_3,-e_4)\\ &= 3\det_{\mathcal{B}_c}(e_1,-e_2,-e_3,-e_4) = -3\det_{\mathcal{B}_c}(e_1,e_2,e_3,e_4) = -3\end{aligned}$$

Le déterminant n'étant pas nul, $\mathcal{B} = (f_1,f_2,f_3,f_4)$ est bien une base de E.

Remarquons que pour tous i et j distincts entre 1 et 4, on a $(f_i \mid f_j) = 2$ et $\| f_i \| = \sqrt{3}$.

- On pose $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{\| f_1 \|} f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} f_1$.
- On cherche $g_2 = af_1 + bf_2$ tel que $(g_2 \mid f_1) = 0$, soit $3a + 2b = 0$.

  On prend $g_2 = 2f_1 - 3f_2$. On a $\| g_2 \| = \sqrt{15}$ et on pose $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{15}} g_2$.
- On cherche $g_3 = af_1 + bf_2 + cf_3$ tel que $(g_3 \mid f_1) = (g_3 \mid f_2) = 0$, soit $3a + 2b + 2c = 2a + 3b + 2c = 0$.

  On prend $g_3 = 2f_1 + 2f_2 - 5f_3$. On a $\| g_3 \| = \sqrt{35}$ et on pose $\varepsilon_3 = \dfrac{1}{\sqrt{35}} g_3$.
- On cherche $g_4 = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4$ tel que $(g_4 \mid f_1) = (g_4 \mid f_2) = (g_4 \mid f_3) = 0$, soit

  $$3a + 2b + 2c + 2d = 2a + 3b + 2c + 2d = 2a + 2b + 3c + 2d = 0.$$

  On prend $g_4 = 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 - 7f_4$. On a $\| g_3 \| = \sqrt{63}$ et on pose $\varepsilon_4 = \dfrac{1}{\sqrt{63}} g_4$.

On obtient finalement la base orthonormée :

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} f_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_2 + e_3 + e_4) \\ \varepsilon_2 = \dfrac{1}{\sqrt{15}}(2f_1 - 3f_2) = \dfrac{1}{\sqrt{15}}(-3e_1 + 2e_2 - e_3 - e_4) \\ \varepsilon_3 = \dfrac{1}{\sqrt{35}}(2f_1 + 2f_2 - 5f_3) = \dfrac{1}{\sqrt{35}}(-3e_1 - 3e_2 + 4e_3 - e_4) \\ \varepsilon_4 = \dfrac{1}{\sqrt{63}}(2f_1 + 2f_2 + 2f_3 - 7f_4) = \dfrac{1}{\sqrt{63}}(-3e_1 - 3e_2 - 3e_3 + 6e_4) \end{cases}$$

2) On a ici $\forall (P,Q) \in E^2$, $(P \mid Q) = P(1)Q(1) + P'(1)Q'(1) + P''(1)Q''(1)$, donc :

$$(1 \mid 1) = (1 \mid X) = (1 \mid X^2) = 1,\ (X \mid X) = 2,\ (X \mid X^2) = 3 \text{ et } (X^2 \mid X^2) = 9.$$

- On pose $P_1 = \dfrac{1}{\| 1 \|} 1 = 1$.
- On cherche $P_2 = a + bX$ tel que $(P_2 \mid 1) = 0$, soit $a + b = 0$.

  On prend $P_2 = X - 1$. On a $\| P_2 \| = 1$.
- On cherche $P_3 = a + bX + cX^2$ tel que $(P_3 \mid 1) = (P_3 \mid X) = 0$, soit $a + b + c = a + 2b + 3c = 0$.

  On prend $P_3 = X^2 - 2X + 1$. On a $\| P_3 \| = 2$.

On obtient finalement la base orthonormée :

$$\left(1, X-1, \frac{1}{2}(X-1)^2\right)$$

3) $\forall\big((x,y,z),(x',y',z')\big)\in \mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$, on a $\big((x,y,z)\,|\,(x',y',z')\big)=2xx'+3yy'+2zz'+2zy'+2yz'$.

Si $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2,e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a :

$$(e_1\,|\,e_1)=(e_2\,|\,e_3)=(e_3\,|\,e_3)=2,\ (e_1\,|\,e_2)=(e_1\,|\,e_3)=0 \text{ et } (e_2\,|\,e_2)=3.$$

On orthonormalise la base canonique.

- On pose $\varepsilon_1=\frac{1}{\|e_1\|}e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}e_1$.
- Comme $(e_1\,|\,e_3)=0$, on pose $\varepsilon_2=\frac{1}{\|e_2\|}e_2=\frac{1}{\sqrt{3}}e_2$.
- On cherche $e'_3=ae_1+be_2+ce_3$ tel que $(e'_3\,|\,e_1)=(e'_3\,|\,e_2)=0$, soit $2a=3b+2c=0$.

  On prend $e'_3=2e_2-3e_3$. On a $\|e'_3\|=\sqrt{6}$ et on pose $\varepsilon_3=\frac{1}{\sqrt{6}}e'_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(2e_2-3e_3)$.

On obtient finalement la base orthonormée :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e_1, \frac{1}{\sqrt{3}}e_2, \frac{1}{\sqrt{6}}(2e_2-3e_3)\right)$$

Exercice 5	*Projections orthogonales, distances*

1) a. Rappelons que si $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2,e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, on a $x_1=e_1+e_2+e_3$, $x_2=e_1+e_3$ et $F=\mathrm{Vect}(x_1,x_2)$. p_F est la projection orthogonale sur F, donc parallèlement à $F^\perp$ (qui est une droite car F est un plan). On a $x=(a,b,c)\in F^\perp$ si et seulement si $(x_1\,|\,x)=(x_2\,|\,x)=0$, soit $a+b+c=a+c=0$. Donc, $F^\perp=\mathrm{Vect}(x_3)$ avec $x_3=e_1-e_3$.

Pour construire la matrice de p_F dans $\mathcal{B}_c=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, il faut calculer les images de e_1, e_2 et e_3 par p_F. On a $p_F(x_1)=x_1$, $p_F(x_2)=x_2$ et $p_F(x_3)=0$, soit :

$$\begin{cases} p_F(e_1+e_2+e_3)=e_1+e_2+e_3 \\ p_F(e_1+e_3)=e_1+e_3 \\ p_F(e_1-e_3)=0 \end{cases} \iff \begin{cases} p_F(e_1)=p_F(e_3)=\frac{1}{2}(e_1+e_3) \\ p_F(e_2)=e_2 \end{cases}$$

Alors :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}_c}(p_F)=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}}$$

b. On a $x_0=e_1-e_2+e_3$ et :

$$d(x_0+x_1,F)=\|x_0+x_1-p_F(x_0+x_1)\|=\|x_0+x_1-p_F(x_0)-p_F(x_1)\|=\|x_0-p_F(x_0)\|.$$

Avec les résultats de la question précédente, on obtient :

$$p_F(x_0)=p_F(e_1)-p_F(e_2)+p_F(e_3)=\frac{1}{2}(e_1+e_3)-e_2+\frac{1}{2}(e_1+e_3)=e_1-e_2+e_3=x_0.$$

Donc :

$$\boxed{d(x_0+x_1,F)=0}$$

Remarquons que ceci veut dire que $x_0\in F$, ce que l'on aurait pu voir immédiatement en remarquant que $x_0=2x_2-x_1$.

2) Posons $F=\mathrm{Vect}(X^2-X,X^3-1)$ et $P=X^2+1$.

On cherche alors $d(P,F)=\|P-p_F(P)\|$ où p_F est la projection orthogonale sur F.

Comme $\mathbb{R}_3[X]$ est de dimension 4 et F de dimension 2, $F^\perp$ est de dimension 2.

On a $p_F(P)=a(X^3-1)+b(X^2-X)$ et $P-p_F(P)\in F^\perp$, donc $\left(p_F(P)-P\,|\,X^2-X\right)=0$ et $\left(p_F(P)-P\,|\,X^3-1\right)=0$.

Avec $p_F(P)-P=aX^3+(b-1)X^2-bX-a-1$, ceci donne $\begin{cases}2b-1=0\\2a+1=0\end{cases}$, soit $b=-a=\dfrac{1}{2}$.

Alors, $p_F(P)-P=-\dfrac{1}{2}(X^3+X^2+X+1)$, donc $d(P,F)=\|P-p_F(P)\|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+1+1+1}$, soit :

$$\boxed{d(P,F)=1}$$

3) Plaçons-nous dans $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, muni du produit scalaire $(f\,|\,g)=\int_0^1 fg$.

Notons $h:t\mapsto t^2$ et F l'ensemble des fonctions affines sur $[0,1]$. F est un sous-espace de E et on a :

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1(t^2-at-b)^2\,dt=d(h,F)^2.$$

Procédons comme dans la question précédente. On cherche $d(h,F)^2=\|h-p_F(h)\|^2$ où p_F est la projection orthogonale sur F, avec $p_F(h):t\mapsto\alpha t+\beta$ et $h-p_F(h)\in F^\perp$, donc $h-p_F(h)$ est orthogonale à $t\mapsto 1$ et $t\mapsto t$, soit :

$$\begin{cases}\int_0^1(t^2-\alpha t-\beta)\,dt=0\\\int_0^1(t^2-\alpha t-\beta)t\,dt=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\alpha-\beta=0\\\frac{1}{4}-\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{2}\beta=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=-\frac{1}{6}\end{cases}$$

Ainsi, $h-p_F(h):t\mapsto t^2-t+\dfrac{1}{6}$ et :

$$d(h,F)^2=\|h-p_F(h)\|^2=\int_0^1\left(t^2-t+\frac{1}{6}\right)^2dt=\int_0^1\left(t^4+t^2+\frac{1}{36}-2t^3+\frac{1}{3}t^2-\frac{1}{3}t\right)dt=\frac{1}{180}.$$

Finalement :

$$\boxed{\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1(t^2-at-b)^2\,dt=\frac{1}{180}}$$

Chapitre 20 - Probabilités - Entrainement

Exercice 1 *Lois de probabilité*

1) Soit $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un univers probabilisé fini. Déterminer la loi de probabilité sur Ω sachant que :
   a. $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $p(\{x_k\})$ est proportionnel à k.
   b. $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $p(\{x_k, x_{k+1}\})$ est proportionnel à k et n est pair.
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $p(\{k\}) = \dfrac{1}{\ln(n+1)} \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$ définit une loi de probabilité sur $\Omega = [\![1, n]\!]$.

Exercice 2 *Calculs de probabilité - Lois usuelles*

1) Dans un magasin, on trouve cycliquement des guimauves 1 jours sur 2 et de la réglisse 1 jour sur 3.
   Par une belle journée d'été, Marcel est pris d'une folle envie de guimauve et de réglisse. Il se rend dans le magasin susmentionné. Quelle est la probabilité qu'il trouve les deux ? qu'il en trouve un seul des deux ? qu'il reparte bredouille, n'ayant rien trouvé ?
2) Lors d'un colloque européen, 10 intervenants vont prendre la parole : 3 Allemands, 3 Britanniques, 2 Français, 1 Suédois et 1 Italien. Le colloque dure deux jours avec 5 orateurs par jour. Si les horaires des 10 interventions sont choisis au hasard, déterminer la probabilité des évènements suivants.
   - Les pays représentés une seule fois passent les premiers.
   - Les deux Français parlent le même jour.
   - Un Allemand prend toujours la parole juste avant un Britannique.
   - Le Suédois parle avant les deux Français.
3) Un couple a trois enfants : est-il plus probable qu'il ait 3 garçons, ou un garçon et deux filles ?
4) Un QCM comporte dix questions pour chacune desquelles quatre réponses sont proposées, dont une seule est exacte. On ne doit proposer qu'une réponse à chaque question.
   a. Combien y-a-t-il de grilles-réponses possibles ?
   b. Marcel remplit la grille au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait au moins 6 bonnes réponses ?

Exercice 3 *Conditionnement et indépendance*

1) Chaque soir, Marcel va au bistrot avec une probabilité de 1/4. S'il y va, il aura mal à la tête le lendemain avec une probabilité de 1/3. S'il n'y va pas, il aura mal à la tête le lendemain avec une probabilité de 1/50. Un jour donné :
   a. quelle est la probabilité que Marcel ait mal à la tête ?
   b. sachant que Marcel a mal à la tête, quelle est la probabilité qu'il soit allé au bistrot la veille ?
2) Dans un étang il y a des gardons et des brochets. Paul pêche à la mouche et prend deux fois plus de gardons que de brochets, alors qu'Alex, avec sa canne à lancer, attrape autant de gardons que de brochets. Alex est un pêcheur expérimenté : il pêche trois fois plus de poissons que Paul. Les poissons pêchés sont conservés dans le même vivier. On observe au hasard un des poissons pêchés, c'est un brochet. Calculer la probabilité pour que ce soit Alex qui l'ait pêché.

3) On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 0,5.

   a. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

   b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?

   c. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

4) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard et on considère les évènements :

   A = « la boule obtenue porte un numéro pair »

   B = « la boule obtenue porte un numéro multiple de 3 ».

   a. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

   b. Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

Indications

Exercice 1 *Lois de probabilité*

1) Dans les deux cas, écrire ce que veut dire la proportionnalité donnée et utiliser la somme de toutes les probabilités élémentaires (= 1). Attention dans le second cas, on a le n probabilités à déterminer et le coefficient de proportionnalité , donc $n+1$ inconnues, mais seulement n équations. On pourra exprimer le résultat à l'aide de $p(\{x_1\})$.

2) Revenir à la définition !

Exercice 2 *Calculs de probabilité - Lois usuelles*

1) Définir deux évènements, puis ce que l'on cherche en fonction de ces deux évènements. Attention, il faut bien interpréter le mot « cycliquement ».

2) Cinq pays sont représentés, mais les 10 intervenants sont distincts et à placer dans 10 créneaux horaires distincts. Les emplois du temps sont équiprobables. Préciser le modèle. Commencer par dénombrer les cas possibles (le nombre d'emplois du temps possibles), puis dans chaque cas, construire un emploi du temps tenant compte de la contrainte en dénombrant le nombre de possibilités à chaque étape de cette construction (par exemple, placer les Français, puis les Allemands si nécessaire, etc…)

3) Le sexe de chaque enfant est indépendant de celui des autres et à chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille est $\frac{1}{2}$.

4) a. Quel est le modèle simple ?

   b. Si Marcel remplit la grille au hasard, chaque réponse est indépendante des autres et il a 1 chance sur 4 de répondre juste. Quelle est la loi pour 10 réponses ?... Attention : « au moins »…

Exercice 3 *Conditionnement et indépendance*

1) Définir des évènements, traduire l'énoncé, puis pour a. appliquer loi des probabilités totales et pour b. appliquer la formule de Bayes.

2) Même principe que l'exercice ci-dessus. Attention, la traduction des hypothèses est un peu délicate.

3) Toujours le même principe. Attention, à la question b, remarquer qu'une fois que le dé est choisi, les lancers sont indépendants les uns des autres.

4) Calculer $P(A)$, $P(B)$ et $P(A\cap B)$, puis revenir à la définition.

Réponses

Exercice 1 *Lois de probabilité*

1) a. On a $\forall\, k \in [\![1,n]\!],\ p(\{\, x_k \}) = ak$ avec a fixé. Alors :

$$\sum_{k=1}^{n} p(\{\, x_k \}) = a\sum_{k=1}^{n} k = a\frac{n(n+1)}{2} = 1 \ \Rightarrow\ a = \frac{2}{n(n+1)}.$$

Ainsi, $\forall\, k \in [\![1,n]\!],\ p(\{\, x_k \}) = \dfrac{2k}{n(n+1)}$.

b. On a $\forall\, k \in [\![1,n-1]\!],\ p(\{\, x_k, x_{k+1} \}) = ak$ avec a fixé. Alors, $\forall\, k \in [\![1,n-1]\!]$:

$$p(\{\, x_{k+1} \}) = p(\{\, x_k, x_{k+1} \}) - p(\{\, x_k \}) = ak - p(\{\, x_k \}).$$

Une récurrence simple permet alors de prouver que $\forall\, k \in [\![2,n]\!]$:

$$p(\{\, x_k \}) = E\left(\frac{k}{2}\right)a - (-1)^k p(\{\, x_1 \}).$$

Avec n pair, soit $n = 2p$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} p(\{\, x_k \}) = \sum_{i=1}^{p} p(\{\, x_{2i} \}) + \sum_{i=0}^{p-1} p(\{\, x_{2i+1} \}) = \sum_{i=1}^{p}\big[ia - p(\{\, x_1 \})\big] + \sum_{i=0}^{p-1}\big[ia + p(\{\, x_1 \})\big] = a\left(\sum_{i=1}^{p} i + \sum_{i=0}^{p-1} i\right) = ap^2.$$

Donc $\sum_{k=1}^{n} p(\{\, x_k \}) = 1$ donne $a = \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{4}{n^2}$. Ainsi, $\forall\, k \in [\![2,n]\!]$:

$$p(\{\, x_k \}) = \frac{4}{n^2} E\left(\frac{k}{2}\right) - (-1)^k p(\{\, x_1 \}).$$

2) $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$, on a $1 < 1 + \dfrac{1}{k} \le 1 + n$ donc $0 < \ln\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) \le \ln(1+n)$, d'où $0 < p(\{k\}) \le 1$. Et :

$$\sum_{k=1}^{n} p(\{\, k \}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\ln(n+1)} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{\ln(n+1)} \sum_{k=1}^{n} \big[\ln(k+1) - \ln k\big] = \frac{\ln(n+1) - \ln 1}{\ln(n+1)} = 1.$$

Donc, on a bien une loi de probabilité sur $\Omega = [\![1,n]\!]$.

Exercice 2 *Calculs de probabilité - Lois usuelles*

1) Définissons les évènements :

A = « Marcel trouve de la guimauve » et B = « Marcel trouve de la réglisse ».

On cherche les probabilités $A \cap B$ (Marcel trouve les deux), $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (Marcel trouve un seul des deux) et $\overline{A \cup B}$ (Marcel n'en trouve aucune).

D'après l'énoncé, on a $p(A) = \dfrac{1}{2}$ et $p(B) = \dfrac{1}{3}$.

De plus, l'apparition de le guimauve et de la réglisse est cyclique. Donc, si un jour, les deux sont en magasin, l'occurrence suivante d'un tel évènement aura lieu après un nombre de jours multiple de 2 et de 3, soit de 6, donc :

$$p(A \cap B) = \frac{1}{6}.$$

On a alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$, donc :

- $p\big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) = p(A \cup B) - p(A \cap B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

- $p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

Remarquons que soit Marcel trouve les deux, soit un seul des deux, soit aucun des deux (et aucune de ces situations de peut être réalisé en même temps qu'une autre), donc $A \cap B$, $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et $\overline{A \cup B}$ forment une partition de l'univers associé à cette expérience.

On a bien $p(A \cap B) + p\big((A \cup B) \setminus (A \cap B)\big) + p(\overline{A \cup B}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 1$.

2) Cinq pays sont représentés : L'Allemagne (A), le Royaume-Uni (RU), la France (F), la Suède (S) et l'Italie (I). Seuls, la Suède et l'Italie n'ont qu'un intervenant.

Comme il y a 10 intervenants, il y a $10!$ emplois du temps possibles. Si les horaires des interventions sont choisis au hasard, ces emplois du temps sont équiprobables.

- Si les pays représentés une seule fois (Suède et Italie) passent les premiers, l'emploi du temps peut commencer par S-I-… ou I-S-… et il y a $8!$ façons de placer les 8 orateurs suivants. Il y a donc $2 \times 8!$ possibilités et la probabilité de cet évènement est :

$$p = \frac{2 \times 8!}{10!} = \frac{1}{45}.$$

- Si les deux Français parlent le même jour, il y a deux cas : ils parlent le 1er jour ou le 2nd.

  Comme il y a 5 interventions le premier jour, on a $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$ possibilités de placer les deux Français, puis à nouveau $8!$ façons de placer les 8 autres orateurs. Donc, il y a $20 \times 8!$ possibilités que les deux Français par le 1er jour. Il en va bien entendu de même pour le second cas (les deux Français par le 2nd jour), donc il y a $2 \times 20 \times 8!$ possibilités en tout et la probabilité est :

$$p = \frac{2 \times 20 \times 8!}{10!} = \frac{4}{9}.$$

- Si un Britannique passe systématiquement après un Allemand, le dernier intervenant allemand passera au plus tard en 9ème position.

  Commençons par choisir la position des Allemands : ils sont 3 pour 9 créneaux horaires possibles, donc il y a $A_9^3 = 9 \times 8 \times 7$ possibilités.

  Les 3 Britanniques prenant la parole juste après les Allemands, ils doivent occuper les 3 créneaux horaires juste après les Allemands : il y a $3!$ possibilités.

  Enfin, il reste à placer les 4 derniers orateurs dans les 4 positions restantes : il y a $4!$ possibilités.

  Finalement, on a en tout $9 \times 8 \times 7 \times 3! \times 4!$ possibilités et la probabilité est :

$$p = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 3! \times 4!}{10!} = \frac{1}{50}.$$

- Plaçons d'un coup le Suédois et les deux Français. Pour cela, choisissons 3 postions parmi les 10 possibles (sans tenir compte de l'ordre) : il y a $\binom{10}{3}=120$ possibilités. Pour chacune de ces possibilités, le Suédois doit être en 1er et les 2 français ensuite : il y a donc 2 possibilités (un Français d'abord et l'autre ensuite ou vice-versa), donc 120×2 possibilités pour placer le Suédois et les deux Français.

  Enfin, il reste 7 créneaux horaires dans lesquels placer les 7 orateurs restants : il y a $7!$ possibilités.

  Finalement, on a en tout $9\times 8\times 7\times 3!\times 4!$ possibilités et la probabilité est :

$$p=\frac{120\times 2\times 7!}{10!}=\frac{1}{3}.$$

3) A chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille est $\frac{1}{2}$ et le sexe de chaque enfant est indépendant de celui des autres. Une naissance est donc une expérience de Bernoulli et la succession de 3 naissances un schéma de Bernoulli. Le nombre de filles suit alors une loi binomiale de paramètres $\frac{1}{2}$ et 3. Alors :

   - La probabilité d'avoir deux filles et un garçon est $p=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$.
   - La probabilité d'avoir trois garçons (soit 0 fille) est $p=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

   Ainsi, il est plus probable d'avoir un garçon et deux filles.

4) a. Il y a 10 questions et pour chaque question, il y a 4 réponses possibles. Il y a donc 4^{10} grilles-réponses possibles.

   b. Marcel remplit la grille au hasard, chaque réponse est indépendante des autres. Comme une seule réponse est correcte sur les 4 proposées, il a, à chaque question, 1 chance sur 4 de répondre juste.

   Nous avons à nouveau un schéma de Bernoulli et le nombre de bonnes réponses suit une loi binomiale de paramètres $\frac{1}{4}$ et 10. La probabilité que Marcel ait au moins 6 bonnes réponses est la somme des probabilités qu'il ait exactement 6 bonnes réponses, ou exactement 7, ou 8, ou 9 ou 10, soit :

$$p=\binom{10}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^4+\binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^7\left(\frac{3}{4}\right)^3+\binom{10}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^8\left(\frac{3}{4}\right)^2+\binom{10}{9}\left(\frac{1}{4}\right)^9\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{10343}{524288}\approx 0{,}02.$$

Exercice 3 *Conditionnement et indépendance*

1) Pour un jour donné, définissons les évènements :

   A = « Marcel est allé au bistrot la veille » et B = « Marcel à mal à la tête ».

   On a $p(A)=\frac{1}{4}$, $p_A(B)=\frac{1}{3}$ et $p_{\bar{A}}(B)=\frac{1}{50}$.

   a. On cherche $p(B)$. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(B)=P(A)P_A(B)+P(\bar{A})p_{\bar{A}}(B)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{50}=\frac{59}{600}\approx 0{,}1.$$

b. On cherche $p_B(A)$. D'après la formule de Bayes :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} = \frac{50}{59} \approx 0{,}85.$$

2) Pour un poisson pêché donné, définissons les évènements :

- A = « Alex a pêché le poisson » (donc $\overline{A}$ = « Paul a pêché le poisson »).
- B = « le poisson est un brochet » (donc $\overline{B}$ = « le poisson est un gardon »).

Comme Paul prend deux fois plus de gardons que de brochets, sur 3 poissons pêchés, 2 sont des gardons et 1 est un brochet. Ainsi, si Paul est le pêcheur, la probabilité qu'un brochet soit pêché est 1/3, d'où :

$$P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{3}.$$

Comme Alex attrape autant de gardons que de brochets, on a de même :

$$P_A(B) = \frac{1}{2}.$$

Alex pêche trois fois plus de poissons que Paul, donc sur 4 poissons pêchés, 3 le sont par Alex. D'où :

$$P(A) = \frac{3}{4}.$$

On cherche, la probabilité Alex qui ait pêché un poisson, sachant que c'est un brochet, soit $P_B(A)$.

On a :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)} = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A})p_{\overline{A}}(B)} = \frac{\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}} = \frac{9}{11} \approx 0{,}81.$$

3) a. Définissons les évènements :

- A = « le dé est pipé » avec $P(A) = \frac{1}{4}$.
- B = « le 6 sort » avec $P_A(B) = \frac{1}{2}$ et $P_{\overline{A}}(B) = \frac{1}{6}$.

On cherche $P_B(A)$:

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(A)P_A(B) + P(\overline{A})p_{\overline{A}}(B)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}.$$

b. Notons B_n = « le 6 sort n fois ». Les lancers étant indépendants, on a $P_A(B_n) = \frac{1}{2^n}$ et $P_{\overline{A}}(B_n) = \frac{1}{6^n}$.

Alors, comme ci-dessus :

$$p_n = P_{B_n}(A) = \frac{P(A)P_A(B_n)}{P(A)P_A(B_n) + P(\overline{A})p_{\overline{A}}(B_n)} = \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^n}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{6^n}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}}.$$

c. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{3^{n-1}}} = 1$.

Ceci est dû au fait qu'il est beaucoup probable d'obtenir 6 avec un dé pipé qu'avec un dé standard.

4) a. Sur les 12 boules, 6 portent un numéro pair, donc $P(A)=\dfrac{1}{2}$.

Sur les 12 boules, 4 portent un numéro pair, donc $P(B)=\dfrac{1}{3}$.

Sur les 12 boules, 2 portent un numéro pair (6 et 12), donc $P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$.

On a $P(A)\times P(B)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}=P(A\cap B)$, donc A et B sont indépendants.

b. De la même façon, $P(A)=\dfrac{6}{13}$, $P(B)=\dfrac{4}{13}$ et $P(A\cap B)=\dfrac{2}{13}$.

On a $P(A)\times P(B)=\dfrac{6}{13}\times\dfrac{4}{13}\neq\dfrac{2}{13}=P(A\cap B)$, donc A et B ne sont pas indépendants.

Chapitre 20 - Variables Aléatoires - Entrainement

Exercice 1 *Lois de probabilité*

1) On dispose d'un dé à six faces (numérotées de 1 à 6) pipé, tel que la probabilité d'apparition d'un chiffre entre 1 et 6 est proportionnelle à ce chiffre. On lance ce dé trois fois de suite et on appelle X le nombre de valeurs distinctes obtenues à l'issue des trois tirages. Déterminer la loi de X.
2) Jouer au loto consiste à cocher 6 numéros dans une grille en comportant 49 (version simplifiée). Une grille est gagnante dès que l'on a coché 2 bons numéros parmi les 6 numéros gagnants. Un joueur remplit une grille sept jours de suite. Donner la loi de probabilité du nombre de grilles gagnantes.
3) On choisit simultanément 4 ampoules dans un lot de 20 ampoules dont 3 sont défectueuses. Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le nombre d'ampoules défectueuses obtenues.
4) Soit X une variable aléatoire réelle telle que $X(\Omega)=[\![-n,n]\!]$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, suivant une loi uniforme. Déterminer les lois de $Y=\dfrac{X+n}{2n}$ et $Z=X^2$.

Exercice 2 *Espérance, variance, écart-type*

1) Calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires introduites des exercices précédents.
2) Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega)=\{-2,-1,0,1,2\}$, $E(X)=E(X^3)=0$, $E(X^2)=1$ et $E(X^4)=4$. Déterminer la loi de X et sa variance.
3) On lance une pièce truquée telle que pile apparait deux fois plus souvent que face.
   - Si pile sort, on lance un dé standard non pipé. On obtient un chiffre n compris entre 1 et 6. On choisit alors au hasard, n nombres entiers distincts compris entre 1 et 20. On gagne 3 € par multiple de 3 obtenu et on perd 1 € pour les non multiples de 3 obtenus.
   - Si face sort, on choisit 3 cartes au hasard dans un jeu standard de 32 cartes. On note c le nombre de carreaux obtenus. On choisit alors au hasard c nombres entiers distincts compris entre 1 et 15. On gagne 3 € par entier pair obtenu et on perd 1 € pour les entiers impairs obtenus.

   Quel gain peut-on espérer à l'issue de l'expérience ?
4) a. On tire simultanément 5 cartes d'un jeu standard de 52 cartes. On note H le nombre d'honneurs (valets, dames, rois, as) obtenus. Calculer l'espérance et l'écart-type de H.

   b. Même question mais si on tire les 5 cartes successivement et avec remise.
5) Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et p. On pose $Y=\left|\dfrac{X}{n}-p\right|$.

   a. Justifier que $E(Y)\le\sqrt{E(Y^2)}$.

   b. En déduire que pour tout réel $\varepsilon>0$, $P\left(\left|\dfrac{X}{n}-p\right|\ge\varepsilon\right)\le\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}$.
6) Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2.

   Prouver que pour tout réel $\alpha>0$, $P(\mu-\alpha\sigma<X<\mu+\alpha\sigma)\ge 1-\dfrac{1}{\alpha^2}$.

Exercice 3 *Couples de variables aléatoires*

1) Soient $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, et X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, à valeurs dans $[\![1, n]\!]$ suivant toutes deux une loi uniforme.
   a. Déterminer la loi de $X+Y$.
   b. Déterminer la loi de XY pour $n=4$.
2) On considère deux variables aléatoires réelles X et Y telles que $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1, n]\!]$ et pour tous i et j compris entre 1 et n, on a $P(X=i, Y=j)=a \times i \times j$ où a est une constante.
   a. Déterminer la valeur de a.
   b. Déterminer la loi de Y.
   c. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
   d. Calculer $P(X=Y)$.
3) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes telles que X suit une loi binomiale de paramètres n et p (avec $n \geq 2$), et Y suit une loi uniformes avec $Y(\Omega)=[\![0, n]\!]$.
   Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $Z=X+Y^2$.

Indications

Exercice 1 *Lois de probabilité*

Dans tous les cas, calculer toutes les probabilités et vérifier à la fin que la somme vaut bien 1.

1) Commencer par calculer la probabilité d'apparition de chaque face (la somme des 6 probabilités fait 1).

Déterminer les valeurs possibles de X, puis lister les façons d'obtenir chacune de ces valeurs.

2) Commencer par calculer la probabilité d'avoir une grille perdante (0 ou 1 bon numéro), puis gagnante par différence. Remarquer alors que les grilles des différents jours sont indépendantes les unes des autres et que l'on a donc une loi de probabilité classique.

3) Déterminer les valeurs possibles du nombre d'ampoules défectueuses obtenues. Pour calculer la probabilité de chacune de ces valeurs, remarquer que le modèle est ici celui d'un tirage simultané (donc sans ordre et sans remise) et que les issues sont équiprobables.

4) Déterminer la probabilité de chaque valeur de X, puis les valeurs possibles de Y et Z. Attention pour Z, la fonction carrée n'est pas injective.

Exercice 2 *Espérance, variance, écart-type*

1) Reprendre les résultats obtenus dans l'exercice 1 et utiliser les formules de cours.
Pour calculer la variance, il est en général plus rapide d'utiliser la formule $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$.
Pour les dernières variables Y et Z, utiliser les formules de transfert.

2) Les données fournissent un système de quatre équations à quatre inconnues $P(X=-2)$, $P(X=-1)$, $P(X=1)$ et $P(X=2)$. Pour calculer, $P(X=0)$, ne pas oublier que la somme des probabilités vaut 1. Pour la variance, $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ donne le résultat immédiatement.

3) On a $P(\text{pile})=\dfrac{2}{3}$ et $P(\text{face})=\dfrac{1}{3}$. Introduire des variables aléatoires.

- G = gain en euros à l'issue de l'expérience. On cherche E(G).
- N = chiffre obtenu sur le dé quand on a tiré pile (N prend ses valeurs dans $[\![1,6]\!]$) ; quand $N=n$, on pourra noter k le nombre de multiples de 3 obtenus après le choix des n nombres entre 1 et 20 (quelles sont les valeurs possibles de k, à n fixé ?).
- C = nombre de carreaux obtenus quand on a tiré face (C prend ses valeurs dans $[\![0,3]\!]$) ; quand $C=c$, on pourra noter p le nombre d'entiers pairs obtenus après le choix des c nombres entre 1 et 15 (quelles sont les valeurs possibles de p, à c fixé ?).

Calculer alors la valeur $g_{n,k}$ ou $g_{c,p}$ de G pour (n,k) ou (c,p) fixé, puis les probabilités :

$$P_{\text{pile}}(N=n),\ P_{(\text{pile})\cup(N=n)}(G=g_{n,k}),\ P_{\text{face}}(C=c)\ \text{et}\ P_{(\text{face})\cup(C=c)}(G=g_{c,p}).$$

Alors :

$$E(G)=P(\text{pile})\times\sum_{n=1}^{6}\left[P_{\text{pile}}(N=n)\sum_{k=0}^{n}g_{n,k}P_{(\text{pile})\cup(N=n)}(G=g_{n,k})\right]+P(\text{face})\times\sum_{c=0}^{3}\left[P_{\text{face}}(C=c)\sum_{p=0}^{c}g_{c,p}P_{(\text{face})\cup(C=c)}(G=g_{c,p})\right]$$

4) Noter H = le nombre d'honneurs obtenus. Evaluer $H(\Omega)$. On cherche E(H) et $\sigma(H)$.

a. Etablir la loi de H et utiliser les formules connues (le calcul peut s'avérer long).

b. Reconnaitre une loi connue.

5) a. Penser à $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$!

b. Utiliser l'inégalité de Markov sur Y.

6) Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev en posant $a=\alpha\sigma>0$.

Exercice 3 *Couples de variables aléatoires*

1) a. Evaluer $P(X=i)$, $P(Y=j)$ et $P(X=i,Y=j)$ pour les valeurs adéquates de i et j.
Si $Z=X+Y$, évaluer $Z(\Omega)$ et pour calculer $P(Z=k)=\sum\limits_{\substack{i+j=k\\1\leq i,j\leq n}} P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)$.

Attention, il faudra distinguer deux cas : $k\leq n+1$ et $k\geq n+2$.

b. Comme $n=4$, on peut passer en revue tous les couples (i, j) possibles pour obtenir $XY(\Omega)$. Le calcul des probabilités correspondantes se faut comme dans la question précédente.

2) a. On doit avoir $\sum\limits_{1\leq i,j\leq n} P(X=i,Y=j)=1$.

b. Pour tout $j\in[\![1,n]\!]$, on a $P(Y=j)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(X=i,Y=j)$.

c. Remarquer que X suit la même loi que Y, puis évaluer $P(X=i)\times P(Y=j)$.

d. $P(X=Y)=\sum\limits_{i=1}^{n} P(X=i,Y=i)$.

3) Pour $E(Z)$, exploiter la linéarité de l'espérance.
Pour $V(Z)$, utiliser $V(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2$ avec $Z^2=X^2+2XY^2+Y^4$, exploiter à nouveau la linéarité de l'espérance pour simplifier l'expression. Pour le calcul de $E(Y^4)$, reprendre la formule de $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$ vue dans les TD du chapitre 15.

Réponses

Exercice 1 *Lois de probabilité*

1) Comme on lance le dé trois fois, les valeurs possibles de X sont 1, 2 et 3.

Les faces du dé sont numérotées de 1 à 6, et pour tout k entre 1 et 6, la probabilité d'apparition de k quand on lance le dé est $p_k = ak$. Comme $p_1 + p_2 + ... + p_6 = 1$, on a $a(1+2+3+4+5+6) = 1$, soit $a = \frac{1}{21}$ et $p_k = \frac{k}{21}$.

La probabilité que le chiffre k sorte 3 fois de suite est alors $\left(\frac{k}{21}\right)^3$ et donc :

$$P(X=1) = \sum_{k=1}^{6}\left(\frac{k}{21}\right)^3 = \frac{1}{21}.$$

On obtient $X = 2$ si un même chiffre, i, sort 2 fois et un autre chiffre j, sort 1 fois. De plus, il y a 3 ordres possibles d'apparition : iij, iji, jii. Les lancers du dé étant successifs, ces trois ordres ont la même probabilité : $\left(\frac{i}{21}\right)^2 \times \frac{j}{21}$, donc :

$$P(X=2) = 3\sum_{i=1}^{6}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{6}\left[\left(\frac{i}{21}\right)^2 \times \frac{j}{21}\right] = 3\sum_{i=1}^{6}\left[\left(\frac{i^2}{21^3}\right)\left(\sum_{j=1}^{6} j - i\right)\right] = \frac{10}{21}.$$

On obtient $X = 3$ si 3 chiffres distincts, i, j et k, sortent chacun 1 fois, de probabilité $\frac{i}{21}\times\frac{j}{21}\times\frac{k}{21}$, donc :

$$P(X=3) = \sum_{i=1}^{6}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{6}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{6}\left[\frac{i}{21}\times\frac{j}{21}\times\frac{k}{21}\right] = \frac{1}{21^3}\sum_{i=1}^{6}\left[i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{6}\left(j\sum_{\substack{k=1\\ k\neq i,j}}^{6} k\right)\right] = \frac{1}{21^3}\sum_{i=1}^{6}\left[i\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{6}\big(j(21-i-j)\big)\right]$$

$$= \frac{1}{21^3}\sum_{i=1}^{6}\left[i\left[\sum_{j=1}^{6}\left((21-i)j - j^2\right) - (21i - 2i^2)\right]\right] = \frac{1}{21^3}\sum_{i=1}^{6}\left[i\left((21-i)\frac{6\times 7}{2} - \frac{6\times 7\times 13}{6} - (21i - 2i^2)\right)\right].$$

$$= \frac{1}{21^3}\sum_{i=1}^{6}\left(350i - 42i^2 + 2i^3\right) = \frac{10}{21}$$

Remarquons que l'on a bien $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$.

Finalement, la loi de probabilité de X est :

X	1	2	3
p	$\frac{1}{21}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{10}{21}$

2) Le nombre total de grilles possibles est $\binom{49}{6}$.

Le nombre de grilles ne contenant aucun des 6 numéros gagnants est $\binom{49-6}{6} = \binom{43}{6}$ et le nombre de grilles contenant exactement un des 6 numéros gagnants est $6\binom{49-6}{5} = 6\binom{43}{5}$.

Alors, la probabilité de ne pas avoir une grille gagnante est $\dfrac{\binom{43}{6}+6\binom{43}{5}}{\binom{49}{6}}=\dfrac{13\times37\times41\times43}{6\times7\times11\times46\times47}=\dfrac{848003}{998844}$, donc

la probabilité d'avoir une grille gagnante est :

$$p=1-\frac{7\times13\times37\times41\times43}{6\times11\times46\times47\times49}=\frac{150841}{998844}.$$

Si on joue 7 jours de suite :

$$\boxed{\text{Le nombre de grilles gagnantes suit une loi binomiale de paramètres } n=7 \text{ et } p=\frac{150841}{998844}.}$$

3) Si on note X la variable aléatoire donnant le nombre d'ampoules défectueuses obtenues parmi les 4 choisies, on a $X(\Omega)=[\![0,3]\!]$.

Le nombre total de choix de 4 ampoules parmi les 20 est $\binom{20}{4}$ et ces choix sont équiprobables.

Pour tout entier k compris entre 0 et 3, le nombre de façons d'obtenir exactement k ampoules défectueuses (parmi les 3 en tout) et donc $4-k$ ampoules non défectueuses (parmi les 17 en tout) est $\binom{3}{k}\binom{17}{4-k}$.

La probabilité est alors $P(X=k)=\dfrac{\binom{3}{k}\binom{17}{4-k}}{\binom{20}{4}}=\dfrac{2\times16!}{95\times k!(3-k)!(4-k)!(13+k)!}$. On obtient la loi :

X	0	1	2	3
p	$\frac{28}{57}$	$\frac{8}{19}$	$\frac{8}{95}$	$\frac{1}{285}$

Remarque : On vérifie que l'on a bien $\dfrac{28}{57}+\dfrac{8}{19}+\dfrac{8}{95}+\dfrac{1}{285}=1$.

4) La variable X peut prendre $2n+1$ toutes équiprobables (car la loi est uniforme), donc pour tout $k\in[\![-n,n]\!]$, on a $P(X=k)=\dfrac{1}{2n+1}$.

On a $Y(\Omega)=\left\{0,\dfrac{1}{2n},\dfrac{2}{2n},\dfrac{3}{2n},...,\dfrac{2n-1}{2n},1\right\}$ et toutes ces valeurs sont équiprobables, donc :

$$\boxed{\text{Pour tout } k\in[\![0,2n]\!],\ P\left(Y=\frac{k}{2n}\right)=\frac{1}{2n+1}.}$$

On a $Z(\Omega)=\{0,1,4,9,...,n^2\}$ et toutes les valeurs non nulles sont équiprobables (chaque k^2 étant obtenu quand X vaut $\pm k$)., donc :

$$\boxed{P(Z=0)=\frac{1}{2n+1} \text{ et, pour tout } k\in[\![1,n]\!],\ P(Z=k^2)=\frac{2}{2n+1}.}$$

Exercice 2 *Espérance, variance, écart-type*

1) En reprenant les résultats obtenus dans l'exercice 1, on a :

- Pour la première variable, X = nombre de valeurs distinctes obtenues à l'issue des trois tirages.

$$E(X)=\frac{1}{21}+2\frac{10}{21}+3\frac{10}{21}=\frac{51}{21}=\frac{17}{7}$$
$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{21}+4\frac{10}{21}+9\frac{10}{21}-\frac{289}{49}=\frac{50}{147}$$

- Pour la deuxième variable, N = nombre de grilles gagnantes (qui suit une loi binomiale de paramètres $n=7$ et $p=\frac{150841}{998844}$).

$$E(N)=np=7\times\frac{150841}{998844}=\frac{150841}{142692}\approx 1{,}06$$
$$V(N)=np(1-p)=7\times\frac{150841}{998844}\times\frac{848003}{998844}\approx 0{,}90$$

- Pour la troisième variable, X = nombre d'ampoules défectueuses obtenues.

$$E(X)=\frac{8}{19}+2\frac{8}{95}+3\frac{1}{285}=\frac{3}{5}$$
$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{8}{19}+4\frac{8}{95}+9\frac{1}{285}-\frac{9}{25}=\frac{204}{475}$$

- Pour les trois dernières variables, X, Y et Z.

$$E(X)=0$$
$$E(Y)=E\left(\frac{X+n}{2n}\right)=\frac{1}{2n}E(X)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$
$$E(Z)=\sum_{k=0}^{n}k^2P(Z=k^2)=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)}{3}$$
$$V(X)=E(X^2)-E(X)^2=E(Z)=\frac{n(n+1)}{3}$$
$$V(Y)=V\left(\frac{X+n}{2n}\right)=\frac{1}{4n^2}V(X)=\frac{n+1}{12n}$$
$$V(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=1}^{n}k^4-\frac{n^2(n+1)^2}{9}=\frac{n(n+1)(4n^2+4n-3)}{45}$$

(On a vu la formule $\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$ dans l'exercice 24 du TD 15).

2) On a :

$$E(X)=-2P(X=-2)-P(X=-1)+P(X=1)+2P(X=2)=0$$
$$E(X^2)=4P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=1)+4P(X=2)=1$$
$$E(X^3)=-8P(X=-2)-P(X=-1)+P(X=1)+8P(X=2)=0$$
$$E(X^4)=16P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=1)+16P(X=2)=4$$

Ceci donne $P(X=-1)=P(X=1)=0$ et $P(X=-2)=P(X=2)=\frac{1}{8}$.

Alors, $P(X=0)=1-\left[P(X=-2)+P(X=-1)+P(X=1)+P(X=2)\right]=\frac{3}{4}$ et on a la loi :

X	-2	-1	0	1	2
p	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{8}$

Enfin $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$, soit :

$$\boxed{V(X)=1}$$

3) Si pile apparait deux fois plus souvent que face, on a $P(\text{pile})=\frac{2}{3}$ et $P(\text{face})=\frac{1}{3}$.

Appelons G le gain en euros à l'issue de l'expérience. On lance la pièce.

- Si pile sort, on lance un dé standard non pipé. Notons N la variable aléatoire donnant le chiffre obtenu.

  On a $N(\Omega)=[\![1,6]\!]$ et pour tout $n\in[\![1,6]\!]$, on a $P_{\text{pile}}(N=n)=\frac{1}{6}$.

  Ayant obtenu $N=n$, on choisit n nombres entiers distincts compris entre 1 et 20. Notons k le nombre de multiples de 3 obtenus. Il y a 6 multiples de 3 entre 1 et 20 et $n\leq 6$, donc $k\in[\![0,n]\!]$.

  Le gain algébrique en euros est alors $G=3k-(n-k)=4k-n$.

  Les tirages des n nombres étant équiprobables, la probabilité d'obtenir k multiples de 3 quand on tire n nombres parmi les 20 nombres entre 1 et 20 est :

$$P_{(\text{pile})\cup(N=n)}(G=4k-n)=\frac{\binom{6}{k}\binom{14}{n-k}}{\binom{20}{n}}.$$

- Si face sort, on lance choisit 3 cartes au hasard dans un jeu standard de 32 cartes. Notons C la variable aléatoire donnant le nombre de carreaux obtenus. Il y a 8 carreaux dans le jeu et on tire 3 cartes, donc $C(\Omega)=[\![0,3]\!]$ et pour tout $c\in[\![0,3]\!]$, on a $P_{\text{face}}(C=c)=\frac{\binom{8}{c}\binom{24}{3-c}}{\binom{32}{3}}$.

  Ayant obtenu $C=c$, on choisit c nombres entiers distincts compris entre 1 et 15. Notons p le nombre d'entiers pairs obtenus. Il y a 7 nombres pairs entre 1 et 15 et $c\leq 3$, donc $p\in[\![0,c]\!]$.

  Le gain algébrique en euros est alors $G=3p-(C-p)=4p-C$.

  Les tirages des c nombres étant équiprobables, la probabilité d'obtenir p entiers pairs quand on tire c nombres parmi les 15 nombres entre 1 et 15 est :

$$P_{(\text{face})\cup(C=c)}(G=4p-c)=\frac{\binom{7}{p}\binom{8}{c-p}}{\binom{15}{c}}.$$

On a alors :

$$E(G)=P(\text{pile})\times\sum_{n=1}^{6}\left[P_{\text{pile}}(N=n)\sum_{k=0}^{n}(4k-n)\times P_{(\text{pile})\cup(N=n)}(G=4k-n)\right]$$
$$+P(\text{face})\times\sum_{c=0}^{3}\left[P_{\text{face}}(C=c)\sum_{p=0}^{c}(4p-c)\times P_{(\text{face})\cup(C=c)}(G=4p-c)\right]$$

Après moult calculs (que l'on peut faire à l'aide d'un tableur), on obtient :

$$\boxed{E(G)=\frac{41}{60}\approx 0{,}68\text{ €}}$$

4) Notons H la variable aléatoire donnant le nombre d'honneurs obtenus. On cherche $E(H)$ et $\sigma(H)$.

Il y a 16 honneurs dans le jeu et on tire 5 cartes, donc $H(\Omega)=[\![0,5]\!]$.

a. Les tirages de 5 cartes sont équiprobables et il y en a en tout $\binom{52}{5}$. On a alors :

$$p(H=k)=\frac{\binom{16}{k}\binom{36}{5-k}}{\binom{52}{5}}.$$

Ainsi :

$$E(H)=\sum_{k=0}^{5}p(H=k)\times k=\sum_{k=0}^{5}\frac{\binom{16}{k}\binom{36}{5-k}}{\binom{52}{5}}\times k.$$

On obtient :

$$\boxed{E(H)=\frac{20}{13}\approx 1{,}54}$$

On a par ailleurs $\sigma(H)=\sqrt{E(H^2)-E(H)^2}$ et :

$$E(H^2)=\sum_{k=0}^{5}p(H=k)\times k^2=\frac{740}{221}.$$

Donc :

$$\boxed{\sigma(H)=\sqrt{\frac{2820}{2873}}\approx 0{,}99}$$

b. Si on tire avec remise, on effectue la même expérience aléatoire (choix d'une carte parmi 52) cinq fois de suite et de manière indépendante. A chaque fois, on obtient un honneur ou pas. La probabilité d'obtenir un honneur à chaque fois est $p=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}$. On est en présence d'un schéma de Bernoulli et H suit une loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=\frac{4}{13}$. Alors, $E(H)=np$ et $\sigma(H)=\sqrt{np(1-p)}$, soit :

$$\boxed{E(H)=\frac{20}{13}\approx 1{,}54\ \text{ et }\ \sigma(H)=\frac{6\sqrt{5}}{13}\approx 1{,}03}$$

5) a. On a $V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2\geq 0$ donc $E(Y)^2\leq E(Y^2)$. Comme les valeurs de Y sont positives, on a $E(Y)\geq 0$ et donc :

$$\boxed{E(Y)\leq\sqrt{E(Y^2)}}$$

b. Comme X suit une loi binomiale de paramètres n et p, on a $E(X)=np$ et $V(X)=np(1-p)$.

Alors, $E(Y^2)=E\left[\left(\frac{X}{n}-p\right)^2\right]=\frac{1}{n^2}E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=\frac{V(X)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}$, donc $E(Y)\leq\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Pour tout réel $\varepsilon>0$, l'inégalité de Markov appliquée à Y s'écrit $P(Y\geq\varepsilon)\leq\frac{E(Y)}{\varepsilon}$. Avec le résultat ci-dessus, ceci donne immédiatement :

$$\boxed{P\left(\left|\frac{X}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\varepsilon\sqrt{n}}}$$

6) D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\forall\, a\in\mathbb{R}_+^*$, $P\left(|X-E(X)|\geq a\right)\leq\frac{V(X)}{a^2}$, soit :

$$P\left(|X-\mu|\geq a\right)\leq\frac{\sigma^2}{a^2}.$$

Alors, pour tout réel $\alpha>0$, en posant $a=\alpha\sigma>0$, on obtient :

$$P\left(|X-\mu|\geq\alpha\sigma\right)\leq\frac{1}{\alpha^2}\quad\Leftrightarrow\quad 1-P\left(|X-\mu|\geq\alpha\sigma\right)\geq 1-\frac{1}{\alpha^2}.$$

Comme les évènements $|X-\mu|\geq\alpha\sigma$ et $|X-\mu|<\alpha\sigma$ sont contraires, on a :

$$1-P\left(|X-\mu|\geq\alpha\sigma\right)=P\left(|X-\mu|<\alpha\sigma\right)=P\left(\mu-\alpha\sigma<X<\mu+\alpha\sigma\right).$$

D'où :

$$\boxed{P\left(\mu-\alpha\sigma<X<\mu+\alpha\sigma\right)\geq 1-\frac{1}{\alpha^2}}$$

Exercice 3 *Couples de variables aléatoires*

1) a. On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,n]\!]$.

Comme X et Y suivent dans lois uniformes, on a $\forall\,(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $P(X=i)=P(Y=j)=\frac{1}{n}$.

Posons $Z=X+Y$, comme, on a $Z(\Omega)=[\![2,2n]\!]$. Soit $k\in[\![2,2n]\!]$. Comme X et Y sont indépendantes, on a :

$$P(Z=k)=\sum_{\substack{i+j=k\\1\leq i,j\leq n}}P\left((X=i)\cap(Y=j)\right)=\sum_{i=\max(1,k-n)}^{\min(k-1,n)}P\left((X=i)\cap(Y=k-i)\right)$$

$$=\sum_{i=\max(1,k-n)}^{\min(k-1,n)}P(X=i)\times P(Y=k-i)=\sum_{i=\max(1,k-n)}^{\min(k-1,n)}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\left[\min(k-1,n)-\max(1,k-n)+1\right]$$

Deux cas se présentent.

- Si $k \in [\![2, n+1]\!]$, alors $\max(1, k-n) = 1$ et $\min(k-1, n) = k-1$, donc $P(Z = k) = \dfrac{k-1}{n^2}$.
- Si $k \in [\![n+2, 2n]\!]$, alors $\max(1, k-n) = k-n$ et $\min(k-1, n) = n$, donc $P(Z = k) = \dfrac{2n+1-k}{n^2}$.

Vérifions :

$$\sum_{k=2}^{2n} P(Z=k) = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k-1}{n^2} + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{2n+1-k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n-1} k\right) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}\right) = 1.$$

b. Ici, $n = 4$, donc XY prend ses valeurs dans $[\![1,16]\!]$ (mais toute valeur de cet intervalle n'est pas prise).

Plus précisément, on peut faire un tableau donnant les valeurs de XY :

X\Y	**1**	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

On a alors $XY(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$ et la probabilité de chaque case du tableau ci-dessus est égale à $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{16}$ (car X et Y sont indépendantes). On obtient la loi :

k	1	2	3	4	6	8	9	12	16
$P(XY = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

On vérifie bien que la somme vaut 1.

2) a. On doit avoir $\displaystyle\sum_{1 \le i, j \le n} P(X = i, Y = j) = 1$. Or :

$$\sum_{1 \le i, j \le n} P(X = i, Y = j) = \sum_{1 \le i, j \le n} a \times i \times j = a \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij = a\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} j\right) = a\,\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Donc :

$$\boxed{a = \frac{4}{n^2(n+1)^2}}$$

b. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$P(Y = j) = \sum_{i=1}^{n} P(X = i, Y = j) = \sum_{i=1}^{n} a \times i \times j = a \times j \times \sum_{i=1}^{n} i = \frac{4}{n^2(n+1)^2} \times j \times \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soit :

$$\boxed{P(Y = j) = \frac{2j}{n(n+1)}}$$

c. On montre comme ci-dessus que X suit la même loi que Y. Alors, pour tout $(i,j)\in [\![1,n]\!]^2$, on a :

$$P(X=i)\times P(Y=j)=\frac{2i}{n(n+1)}\times\frac{2j}{n(n+1)}=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\times i\times j=a\times i\times j=P(X=i,Y=j).$$

Ainsi :

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$$

d. On a :

$$P(X=Y)=\sum_{i=1}^{n}P(X=i,Y=i)=\sum_{i=1}^{n}a\times i^2=a\times\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{4}{n^2(n+1)^2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Soit :

$$\boxed{P(X=Y)=\frac{2(2n+1)}{3n(n+1)}}$$

3) On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ et $P(Y=k)=\frac{1}{n+1}$.

On a :

$$E(Z)=E(X+Y^2)=E(X)+E(Y^2)=np+\sum_{k=0}^{n}k^2P(Y=k)=np+\sum_{k=0}^{n}\frac{k^2}{n+1}=np+\frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Donc :

$$\boxed{E(Z)=n\left(p+\frac{2n+1}{6}\right)}$$

Par ailleurs, $V(Z)=E(Z^2)-E(Z)^2$ avec :

$$E(Z^2)=E\left((X+Y^2)^2\right)=E(X^2+2XY^2+Y^4)=E(X^2)+2E(XY^2)+E(Y^4).$$

Comme X et Y sont indépendantes, X et Y^2 le sont aussi et $E(XY^2)=E(X)E(Y^2)$. Alors :

$$\begin{aligned}V(Z)&=\left(E(X^2)+2E(X)E(Y^2)+E(Y^4)\right)-\left(E(X)+E(Y^2)\right)^2\\&=E(X^2)+2E(X)E(Y^2)+E(Y^4)-E(X)^2-2E(X)E(Y^2)-E(Y^2)^2\\&=E(X^2)-E(X)^2+E(Y^4)-E(Y^2)^2=V(X)+E(Y^4)-E(Y^2)^2\end{aligned}$$

On a $V(X)=np(1-p)$, $E(Y^2)=\frac{n(2n+1)}{6}$ et :

$$E(Y^4)=\sum_{k=0}^{n}k^4P(Y=k)=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^4}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k^4=\frac{n(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

Donc :

$$V(Z)=np(1-p)+\frac{n(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}-\left(\frac{n(2n+1)}{6}\right)^2=np(1-p)+\frac{n(2n+1)}{6}\left(\frac{3n^2+3n-1}{5}-\frac{n(2n+1)}{6}\right).$$

Soit finalement :

$$\boxed{V(Z)=np(1-p)+\frac{n(2n+1)(n+2)(8n-3)}{180}}$$