Résumé du chapitre 1 : Séries numériques

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On considère $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite de $\mathbb{K}$.

Définitions fondamentales

- La série de terme général u_n est la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ avec $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$, appelé somme partielle de la série. On note souvent la série $\sum u_n$.
- La série converge si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ converge.
- Une série qui ne converge pas est dite divergente.
- En cas de convergence, on appelle somme de la série la limite de la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$, notée indifféremment $\sum_{n=n_o}^{+\infty} u_n$ ou $\sum_{n\geq n_o} u_n$.
- Si $\sum u_n$ converge et a pour somme S, le reste d'ordre n est $R_n = S - S_n = \sum_{k\geq n+1} u_k$.

Remarque : La suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ converge si et seulement si la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge avec $u_n = u_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$ pour tout $n > n_0$ *(c'est le télescopage).*

Propriétés générales

- *Condition nécessaire de convergence* : Si $\sum u_n$ converge alors la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers 0.
- Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série diverge grossièrement.
- Toute combinaison linéaire de séries convergentes est convergente.

  ***Attention** : la réciproque est fausse.*

  En particulier, ce n'est pas parce que $\sum (u_n + v_n)$ converge que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent.
- Une série de nombres complexes converge si et seulement si les séries des parties réelles et imaginaires convergent.

Absolue convergence

- On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ converge.

  Attention : *$|.|$ désigne la valeur absolue pour une suite réelle et le module pour une suite complexe*).
- La série Σu_n est semi-convergente si elle est convergente, mais pas absolument convergente.
- *Théorème fondamental* :

  Si $\sum u_n$ est absolument convergente alors $\sum u_n$ est convergente et $\left|\sum_{n=n_o}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=n_o}^{+\infty} |u_n|$.

  La réciproque est fausse !

Séries à termes positifs

On suppose ici que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 0$ (la série est donc réelle).

- Pour que la série $\sum u_n$ à termes positifs converge, il faut et il suffit que la suite de ses sommes partielles soit majorée (et alors $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n = \sup\limits_{n \geq n_0} S_n$).
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries à termes positifs telles que $\sum v_n$ converge, alors :

$$u_n = O(v_n) \text{ ou } u_n = o(v_n) \text{ ou } u_n \sim v_n \Rightarrow \sum u_n \text{ converge.}$$

Remarque : Ces propriétés se généralisent au cas des séries à termes de signe constant.

Règle de d'Alembert

On suppose que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \ell$. Alors :

$$\begin{cases} \ell < 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ \ell > 1 \Rightarrow \sum u_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Séries alternées (réelles)

- La série réelle $\sum u_n$ est <u>alternée</u> si pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1}u_n \leq 0$ (u_n et u_{n+1} sont de signes contraires et on a alors $u_n = (-1)^n |u_n|$ ou $u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$).
- <u>*Critère spéciale de convergence des séries alternées*</u> :

  Si $\sum u_n$ est alternée et $(|u_n|)_{n \geq n_0}$ décroit vers 0, alors :
  - $\sum u_n$ converge ;
  - pour tout $n \geq n_0$, $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ et R_n et $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ sont de même signe.

Comparaison avec une intégrale : ***Attention, méthode à connaitre***

Si $u_n = f(n)$, avec f à valeurs réelles, continue par morceaux et décroissante sur $[n_0 ; +\infty[$ alors :

$$\forall n \geq p \geq n_0, \int_{p+1}^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=p+1}^{n} u_k \leq \int_p^n f(t)\,dt.$$

La série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, avec $I_n = \int_0^n f(t)\,dt$.

- En cas de convergence, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq (I - I_n) - R_n \leq u_n$ avec $I = \lim I_n$.
- En cas de divergence, on a $S_n \sim I_n$.

Formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Séries de référence

- Séries géométriques : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum z^n$ converge vers $\dfrac{1}{1-z}$ si et seulement si $|z| < 1$.
- Séries de Riemann : $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

  En cas de convergence : $S_n \sim \dfrac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}}$; en cas de divergence : $R_n \sim \dfrac{1}{\alpha-1}\dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.
- Série exponentielle : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge vers e^z.

Produit de Cauchy

- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries, leur produit de Cauchy est la suite de terme général w_n défini par $w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q$.
- Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, alors la série $\sum w_n$ l'est aussi et sa somme est le produit des sommes de $\sum u_n$ et de $\sum v_n$.