Résumé du chapitre 11 : Intégrales à paramètre

Dans tout ce qui suit, sauf mention contraire, I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Suites et séries de fonctions intégrables

<u>*Théorème*</u> : (*de convergence dominée*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur *I*.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur *I*.
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur *I* vers une fonction *f* continue par morceaux sur *I*.
- Il existe une fonction φ, continue par morceaux et intégrable sur *I*, telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in I$, on a $|f_n(t)|\le\varphi(t)$.

Alors :

$$f_n \text{ et } f \text{ sont intégrables sur } I \quad \text{et} \quad \int_I f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)dt.$$

<u>*Théorème*</u> : (*d'intégration terme à terme*)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur *I*.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux et intégrable sur *I*.
- La série $\sum f_n$ converge simplement vers une fonction *f*, continue par morceaux sur *I*.
- La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors :

$$f \text{ est intégrable sur } I \quad \text{et} \quad \int_I f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)dt.$$

Intégrales à paramètre

<u>*Théorème*</u> : (*de convergence dominée à paramètre continu*)

Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$, où *I* et *J* sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $a\in I$ ou *a* est une extrémité, éventuellement infinie, de *I*.

- pour tout $t\in J$, $f(x,t)\xrightarrow[x\to a]{}\ell(t)$;
- pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ et $t\mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur *J* ;
- il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur *J*, telle que pour tout $(x,t)\in I\times J$, on ait $|f(x,t)|\le\varphi(t)$.

Alors, ℓ est intégrable sur *J* et $\int_J f(x,t)\,dt \xrightarrow[x\to a]{} \int_J \ell(t)\,dt$.

<u>Théorème</u> : (*continuité*)

Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$.

- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur *J*.
- Pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est continue sur *I*.
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur *J*, telle que pour tout $(x,t)\in I\times J$, on ait $\left|f(x,t)\right|\le \varphi(t)$.

Alors :

Pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ est intégrable sur *J* et $x\mapsto \int_J f(x,t)dt$ est continue sur *I*.

<u>Théorème</u> : (*de dérivation sous le signe somme*)

Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$.

- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur *J*.
- Pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur *I*.
- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur *J*.
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur *J*, telle que pour tout $(x,t)\in I\times J$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|\le \varphi(t)$.

Alors :

La fonction $x\mapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe C^1 sur *I*, de dérivée $x\mapsto \int_J \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$.

<u>Théorème</u> : (*extension aux fonctions de classe* C^k)

Soient $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$ et $k\in\mathbb{N}^*$.

- Pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur *I*.
- Pour tout $x\in I$ et tout $i\in [\![0,k-1]\!]$, $t\mapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur *J*.
- Pour tout $x\in I$, $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur *J*.
- Il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrable sur *J*, telle que pour tout $(x,t)\in I\times J$, on ait $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\le \varphi(t)$.

Alors :

La fonction $x\mapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe C^k sur *I*, de dérivées successives $x\mapsto \int_J \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$.

<u>*Corollaire*</u> : (*classe* C^∞)

Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $I\times J$ telle que pour tout $k\in\mathbb{N}$:

- pour tout $t\in J$, $x\mapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur I ;
- pour tout $x\in I$, $t\mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J ;
- il existe une fonction φ_k positive, continue par morceaux et intégrable sur J, telle que pour tout $(x,t)\in I\times J$, on ait $\left|\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leq \varphi_k(t)$.

Alors :

La fonction $x\mapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe C^∞ sur I, de dérivées successives $x\mapsto \int_J \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$.