

Résumé du chapitre 3 : Limites et continuité

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} ; on considère deux \mathbb{K} -EVN : $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$, A une partie de E et f une application de A dans F .

I – Limites

I-1. Généralités

Définition :

Soit a un point adhérent à A et $b \in F$. On dit que f admet b pour limite en a si :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in A \setminus \{a\}, \|x - a\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \varepsilon.$$

Propriétés :

- Si une f admet une limite en un point adhérent à A alors cette limite est unique.
- Toute fonction admettant une limite en $a \in \bar{A}$ est bornée au voisinage de a .

Propriété :

Soient $a \in \bar{A}$ et $b \in F$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \neq 0_F$, alors $f(x) \neq 0_F$ au voisinage de a .

Propriété :

Soient $a \in \bar{A}$ et $b \in F$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ pour $\|\cdot\|_E$ de E (resp. $\|\cdot\|_F$ de F), alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ pour toute norme de E (resp. de F) équivalente à $\|\cdot\|_E$ (resp. $\|\cdot\|_F$).

Propriété :

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, alors pour tout vecteur u non nul de E , on a $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + tu) = b$.

I-2. Caractérisation séquentielle de la limite

Propriété :

Soient $a \in \bar{A}$ et $b \in F$.

On a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = b$ pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A telle que $x_n \rightarrow a$.

I-3. Cas de la dimension finie

Propriété :

On suppose que F est de dimension finie $p > 0$.

Soient $a \in \bar{A}$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base F et $b \in F$ de coordonnées (b_1, b_2, \dots, b_p) dans \mathcal{B} .

Si $f_k(x)$ est la $k^{\text{ième}}$ coordonnée de $f(x)$ dans \mathcal{B} , on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = b_k$ pour tout entier k compris entre 1 et p .

I-4. Opérations

Propriété :

Soient $a \in \bar{A}$, et f_1 et f_2 deux applications de A dans F telles que $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = b_1$ et $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = b_2$ avec $(b_1, b_2) \in F^2$.

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f_1(x) + \mu f_2(x)) = \lambda b_1 + \mu b_2$.
- Soit $g : A \rightarrow \mathbb{K}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lambda \in \mathbb{K}$. On a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) f_1(x) = \lambda b_1$.

Propriété :

Soient $(G, \|\cdot\|_G)$ un troisième EVN, g une application de $B \subset F$ dans G et $a \in \bar{A}$.

Si $f(A) \subset B \subset F$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \in \bar{B}$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c \in G$, alors $g \circ f$ est définie sur A et $\lim_{x \rightarrow a} g \circ f(x) = c$.

II – Continuité sur une partie

II-1. Définitions

Définitions :

Soit $a \in A$. On dit que f est continue en a si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Soit $B \subset A$. On dit que f est continue sur B si f est continue en tout point de B .

II-2. Continuité et topologie

Propriétés :

Soit f une application continue de E dans F .

L'image réciproque d'un fermé de F est un fermé de E .

L'image réciproque d'un ouvert de F est un ouvert de E .

Corollaires :

Soit f une application continue de E dans \mathbb{R} .

- L'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) \geq 0$ (resp. $f(x) = 0$ ou $f(x) \leq 0$) est un fermé de E .
- l'ensemble des vecteurs x de E tels que $f(x) > 0$ (resp. $f(x) \neq 0$ ou $f(x) < 0$) est un ouvert de E .

II-3. Opérations

Propriétés :

Soient f_1 et f_2 deux applications de A dans F continues en $a \in A$ (resp. sur $B \subset A$).

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda f_1 + \mu f_2$ est continue en $a \in A$ (resp. sur B).
- Si $g : A \rightarrow \mathbb{K}$ est continue en $a \in A$ (resp. sur B), alors $g f_1$ est continue en a (resp. sur B).
- Soient $(G, \|\cdot\|_G)$ un EVN et g une application d'une partie C de F dans G .

Si g est continue en $f(a) \in C$ (resp. sur $f(B) \subset C$), alors $g \circ f$ est continue en a (resp. sur B).

II-4. Cas de la dimension finie

Propriété :

On suppose que F est de dimension finie $p > 0$ et on considère une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ de F .

Pour tout $x \in A$ et tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $f_k(x)$ la $k^{\text{ième}}$ coordonnée de $f(x)$ dans \mathcal{B} .

L'application f est continue en $a \in A$ (resp. sur $B \subset A$) si et seulement si f_k l'est pour tout $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$.

Définition :

On suppose que E est de dimension finie $n > 0$. Soit une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ de E .

Une application polynomiale sur E est une application de E dans \mathbb{K} de la forme :

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 \dots + x_n e_n \mapsto \sum_{i=0}^N a_i \left(\prod_{1 \leq k \leq n} x_k^{\alpha_{i,k}} \right)$$

où les a_i sont des scalaires, et N et les $\alpha_{i,k}$ sont des entiers naturels.

Propriété :

Les applications polynomiales de E (de dimension finie) dans \mathbb{K} sont continues sur E .

Exemples :

- L'application déterminant $A = (a_{i,j}) \mapsto \det A$ est polynomiale sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donc continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'application $(A, B) \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. En effet, les coefficients de AB sont polynomiaux en ceux de A et B .
- Il en découle immédiatement que à A fixée, $B \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et à B fixée, $B \mapsto AB$ est continue sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Propriété :

Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est continue.

Définition : (hors programme)

En dimension finie, une partie fermée et bornée est appelée partie compacte.

Théorème :

On suppose que E est de dimension finie.

Toute application continue sur une partie non vide compacte de E et à valeurs dans \mathbb{R} , est bornée et atteint ses bornes.

II-5. Fonctions lipschitziennesDéfinition :

Une application $f : A \rightarrow F$ est lipschitzienne sur A s'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x, y) \in A^2$:

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k \|x - y\|_E.$$

Dans ce cas, on dit que f est k -lipschitzienne sur A .

Propriété :

Toute application lipschitzienne est continue.

Théorème :

Toute application linéaire sur un espace de dimension finie est lipschitzienne.

Propriété :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_1, \|\cdot\|_1), \dots, (E_n, \|\cdot\|_n)$ des espaces vectoriels normés de dimension finie et f une application multilinéaire de $E_1 \times \dots \times E_n$ dans F .

- Il existe $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$, $\|f(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_F \leq K \|x_1\|_1 \cdot \|x_2\|_2 \dots \|x_n\|_n$.
- f est continue.