Résumé du chapitre 7 : Compléments sur les déterminants

Dans tout le chapitre, n est un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et on considère E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

I - Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs

Propriété :

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $D \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{q,p} & D \end{pmatrix} = \det A \times \det D.$$

Corollaire 1 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire par blocs. Si $A_1, A_2, ..., A_p$ sont les blocs diagonaux de A, alors :

$$\det A = \det A_1 \times \det A_2 \times ... \times \det A_p.$$

Corollaire 2 :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire de coefficients diagonaux $a_1, a_2, \dots, a_n$. On a $\det A = a_1 \times a_2 \times ... \times a_n$.

Corollaire 3 :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $E = E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_p$ où les E_i sont des sous-espaces de E, tous stables par u.

Si u_i est l'endomorphisme induit par u sur E_i, alors :

$$\det u = \det u_1 \times \det u_2 \times ... \times \det u_p.$$

II - Déterminant de Vandermonde

Définition et propriété :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Le déterminant :

$$V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \cdots & a_{n-1}^3 & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

est appelé <u>déterminant de Vandermonde</u> et on a :

$$V_n(a_1, a_2, ..., a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

III - Interpolation de Lagrange

Dans toute cette partie, on considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $2n$ scalaires $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{K}$ tels que les a_i sont deux à deux distincts.

III-1. Position du problème

On cherche à construire une fonction polynomiale dont la courbe passe par les n points (a_i, b_i) du plan. C'est ce que l'on appelle le *problème d'interpolation de Lagrange*.

III-2. Polynômes de Lagrange

Définition :

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$L_i = \frac{\prod_{k=1, k\neq i}^{n} (X - a_k)}{\prod_{k=1, k\neq i}^{n} (a_i - a_k)}.$$

Ces polynômes L_i sont appelés polynôme de Lagrange, associés aux a_i.

Propriétés :

Avec les notations ci-dessus, on a les propriétés suivantes.

- La famille $(L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
- Pour tout $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, $P = \sum_{i=1}^{n} P(a_i) L_i$. Autrement dit, les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans la base de L_i sont les $P(a_i)$.
- $L_1 + \dots + L_n = 1$.

III-3. Polynôme interpolateur de Lagrange

Théorème et définition :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \dots, a_n$ des scalaires distinctes deux à deux et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$.

Le polynôme $P = \sum_{i=1}^{n} b_i L_i$ est l'unique polynôme de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ qui vérifie $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Ce polynôme est appelé polynôme interpolateur de Lagrange associé aux scalaires a_i et b_i.

III-4. Lien avec les matrices de Vandermonde

En posant $P = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$, les relations $P(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ s'écrivent matriciellement :

$$VZ = B \quad \text{avec } Z = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ et } V = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ce système est de Cramer car $\det V = V_n(a_1, a_2, \dots, a_n) \neq 0$ (car les a_i sont deux à deux distincts).
Alors, $Z = V^{-1}B$, donc P existe bien et est unique.

IV - Polynôme caractéristique

IV-1. Définition

Propriété et définition :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

La quantité $\det(xI_n - A)$ est polynomiale en $x \in \mathbb{K}$. Le polynôme $\det(X I_n - A)$, noté χ_A, est unitaire et de degré *n*. Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique de *A*.

Propriété et définition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec *E* de dimension finie *n*. La quantité $\det(X\, id_E - u)$ est un polynôme (en X), unitaire et de degré *n*, appelé polynôme caractéristique de *u*, noté χ_u.

IV-2. Eléments propres

Définitions :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de *u* s'il existe un vecteur *x non nul* de *E* tel que $u(x) = \lambda x$.

Un tel vecteur *x* est appelé vecteur propre de *u* associé à la valeur propre λ.

L'ensemble des valeurs propres de *u* est appelé spectre de *u*, noté $Sp(u)$.

Les valeurs et vecteurs propres de *u* sont appelés éléments propres de *u*.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de *A* s'il est valeur propre de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à la matrice *A*.

Le vocabulaire vecteur propre, spectre de *A*, $Sp(A)$, éléments propres de *A* est le même que pour un endomorphisme.

Propriété et définition :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de *u*.

L'ensemble des vecteurs propres de *u* associés à la valeur propre λ est $\ker(u - \lambda id_E)$. C'est un sous-espace vectoriel de *E* appelé sous-espace propre associé à λ.

Théorème :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ avec *E* de dimension finie *n* (*resp.* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) et $\lambda \in \mathbb{K}$.

λ est valeur propre de *u* (*resp.*de *A*) si et seulement s'il est racine du polynôme caractéristique de *u* (*resp.*de *A*), soit $\chi_u(\lambda) = 0$ (*resp.* $\chi_A(\lambda) = 0$).