Stage de pré-rentrée

Exercice 1 : Symboles Σ et Π

On note :

- $\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + a_{p+1} + ... + a_n$ avec toujours $p \le n$.
- $\prod_{k=p}^{n} a_k = a_p \times a_{p+1} \times ... \times a_n$ avec toujours $p \le n$.
- $n! = 1\times2\times3\times...\times(n-1)\times n = \prod_{k=1}^{n} k$ ($n!$ se lit « n factoriel » ou « factoriel n »).

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes et produits suivants.

1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ en remarquant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ en cherchant trois réels a, b et c tels que $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
3) Avec $u_n = (-2)^n$:

   a. $\sum_{k=0}^{n} u_k$ b. $\sum_{k=1}^{n} u_k$ c. $\sum_{k=0}^{2n} u_k$ d. $\sum_{k=n}^{2n} u_k$ e. $\sum_{k=0}^{n} u_{2k}$

   f. $\sum_{k=0}^{n} (u_k + n)$ g. $\sum_{k=0}^{n} u_k + n$ h. $\sum_{k=0}^{n} (u_k + k)$ i. $\sum_{k=0}^{n} u_{k+n}$ j. $\sum_{k=0}^{n} u_{nk}$

4) $P_n = \prod_{k=1}^{n} (1 + v_k)$ avec :

   a. $v_n = -\frac{1}{n+1}$ b. $v_n = -\frac{1}{(n+1)^2}$ c. $v_n = -\frac{2}{(n+1)(n+2)}$

5) $\sum_{k=0}^{n} k x^k$. ☺ *On pourra dériver la fonction polynomiale* $x \mapsto f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + ... + x^n$.

Problème 1 : Un problème d'analyse

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$f(x) = \frac{x e^x}{e^x - 1}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe de *f* dans un repère orthonormé.

Partie A : *Etude de fonction*

1) Prouver que *f* est continue sur $\mathbb{R}$.

2) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)e^{-x} - 1 + \dfrac{1}{2}\int_0^x t^2 e^{-t} dt$.

   a. Montrer que h est la fonction nulle et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2} e^x \int_0^x t^2 e^{-t} dt.$$

   b. En déduire que :

   - $\forall\, x \in \mathbb{R}_+$, $0 \le e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} \le \dfrac{x^3}{6} e^x$ (☺ $\forall\, t \in \mathbb{R}_+$, $0 \le e^{-t} \le 1$) ;
   - $\forall\, x \in \mathbb{R}_-$, $\dfrac{x^3}{6} \le e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2} \le 0$ (☺ $\forall\, x \in \mathbb{R}_-$, $\forall\, t \in [x, 0]$, $0 \le e^{-t} \le e^{-x}$).

   c. En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, puis que $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^{-x} - 1 + x}{x^2} e^x\right) = \dfrac{1}{2}$.

   d. Montrer alors que *f* est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

   e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

3) Justifier que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$.

4) A l'aide de la question 2.c, montrer que f' est continue sur $\mathbb{R}$. *On dit que f est de classe C^1 sur* $\mathbb{R}$.

5) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x - 1 - x \ge 0$, avec égalité seulement en 0.
   En déduire le sens de variation de *f*.

6) Construire le tableau de variations complet de *f* (limites incluses).

7) Que peut-on déduire pour $\mathscr{C}$ de la limite de *f* en $-\infty$?

8) On pose $g(x) = f(x) - x$. Déterminer la limite de g en $+\infty$. En déduire que $\mathscr{C}$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique Δ que l'on précisera.

9) Déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ et Δ.

10) Tracer $\mathscr{C}$ en représentant tous les éléments graphiques obtenus plus haut.

Partie B : *Etude d'une suite récurrente*

Dans cette partie, on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) A l'aide de la partie A, déterminer le sens de variation de *u*.
2) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Justifier.
3) Déterminer la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie C : *Etude d'une suite implicite*

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que l'équation $f(nx) = n$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note cette solution x_n. Que vaut x_1 ?
2) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = 1 - e^{-n x_n}$. En déduire que $x_n \in [0, 1[$.
3) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(n+1)x_{n+1} > n x_n$.
4) Déduire des deux questions précédentes que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.
5) Prouver que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

Exercice 2 : La série harmonique

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. En remarquant que pour tout réel $t \in [k, k+1]$, on a $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{k}$, montrer que :
$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$
2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - 1 \leq \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$
Puis que :
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq 1 + \ln n.$$
3) En déduire la limite de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et celle de $\left(\frac{H_n}{\ln n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
4) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.
   a. Déterminer le sens de variation de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
   b. Par un raisonnement analogue à celui des questions précédentes, montrer que $\lim_{n \to +\infty} S_n = \ln 2$.
5) On pose $u_n = H_n - \ln n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante, puis qu'elle converge.
   La limite de u est appelée constante d'Euler et notée γ.

Exercice 3 : Equations différentielles

1) Soient h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et a un réel fixé. On considère l'équation différentielle :
$$(E): \; y' + ay = h.$$
   a. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{ax} f(x)$.
   Après avoir justifié que g est bien dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que f est solution de (E) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^{ax} h(x)$.
   b. Déterminer alors toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ (en faisant apparaitre $x \mapsto \int_0^x e^{at} h(t)\, dt$).

2) On considère maintenant l'équation différentielle :
$$(E'): \; y'' - 3y' + 2y = 0.$$
   a. Déterminer les solutions de l'équation $r^2 - 3r + 2 = 0$.
   b. Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On pose $g = f' - f$.
   Après avoir justifié que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que f est solution de (E') sur $\mathbb{R}$ si et seulement si g est solution de $(E''): \; z' - 2z = 0$ sur $\mathbb{R}$.
   c. Résoudre (E''), puis (E') à l'aide de la question 1.

Exercice 4 ***: Probabilités***

Le tarot se joue à quatre ou parfois à trois joueurs, avec un jeu de 78 cartes : les 52 cartes usuelles, plus quatre cavaliers (un de chaque couleur), plus 21 atouts (numérotés de 1 à 21), plus une carte spéciale appelée « excuse ». On appelle « bouts », les trois cartes suivantes : le 1 et le 21 d'atout et l'excuse.

Réaliser une donne consiste à distribuer toutes les cartes aux trois ou quatre joueurs, sauf quelques cartes (6 quand on joue à quatre et 3 quand on joue à trois) que l'on laisse initialement au milieu. Ces cartes forment ce que l'on nomme le « chien ».

1) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un bout dans le chien quand on joue à quatre joueurs.
2) Même question quand on joue à trois joueurs. Que constate-on ?
3) Que se passe-t-il si on joue à cinq joueurs avec un chien de 6 cartes ?
4) On joue 10 parties d'affilées à quatre joueurs. Les donnes sont supposées indépendantes les unes des autres (on mélange les cartes à l'issue de chaque parties).
   a. Quelle est la probabilité qu'il n'y ait jamais de bout dans le chien lors des 10 tours ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une fois un bout dans le chien ?
   c. Quelle est la probabilité qu'il y ait cinq fois un bout dans le chien ?
   d. En moyenne, pour combien de parties sur 10 y aura-t-il au moins un bout dans le chien ?

Problème 2 ***: Intégrales de Wallis et formule de Stirling***

Partie A : ***Les intégrales de Wallis***

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt$.

1) Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Calculer I_0 et I_1.
3) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.
4) Prouver par récurrence sur *p* que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p} > 0$ et $I_{2p+1} > 0$.
5) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Evaluer $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1} \frac{I_{2(k+1)}}{I_{2k}}$. En déduire que $I_{2p} = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}$.
6) Déterminer, pour tout $p \in \mathbb{N}$, I_{2p+1} en fonction de *p*.
7) Prouver que pour tout entier naturel *n*, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$.
8) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \le \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \le 1$.
9) Prouver que la suite $(I_n\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

   ☺ *On pourra poser* $v_n = I_n\sqrt{n}$*, commencer par prouver que* $(v_{2p})_{p \in \mathbb{N}}$ *et* $(v_{2p+1})_{p \in \mathbb{N}}$ *sont croissantes, puis montrer par l'absurde que ces deux suites convergent.*

Partie B : ***La formule de Stirling***

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln k - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln n + n$ et, pour $x \in [1, +\infty[$, $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = 1 - f(n)$.
2) En dérivant deux fois, montrer que *f* est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.
3) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire le sens de variation strict de la suite *u*.
4) On a admet que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive. Justifier alors qu'elle converge vers une limite ℓ.
5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = e^{u_n}$. Justifier que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite L en fonction de celle de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
6) Montrer que $n! = v_n \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ et en déduire, à l'aide de la partie A, que $\frac{{v_p}^2}{v_{2p}} \to \sqrt{2\pi}$, puis que :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n} = \sqrt{2\pi}.$$

Ce résultat s'appelle la formule de Stirling.