

TD du chapitre 1 : Séries numériques
Exercice 1

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec :

- a. $u_n = \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$. b. $u_n = \ln \left(1 + \sin \left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right) \right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. c. $u_n = \frac{j^n}{\sqrt{n}}$ ($j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$).
- d. $u_n = \frac{\ln n}{n}$. On donnera un équivalent de la somme partielle S_n en $+\infty$.
- e. $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$. On donnera un développement asymptotique de R_n , le reste d'ordre n , en $+\infty$.

Exercice 2

Convergence et somme de $\sum u_n$ avec :

a. $u_n = \frac{1}{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}$. (Mines)

b. $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$. (Centrale)

☺ On pourra commencer par déterminer le développement asymptotique à deux termes de $\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k}$.

On rappelle que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ où γ est la constante d'Euler.

Exercice 3 (Mines)

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \prod_{k=1}^n (3k-1)^{1/n}$.

Exercice 4 (Centrale)

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

- 1) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
- 2) Etablir une relation entre u_{n+1} et $\sum u_n^2$, puis déterminer un équivalent de u_n .

Exercice 5 (Centrale)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note (E_n) l'équation $e^x = x^n$.

- 1) Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, (E_n) admet exactement deux solutions strictement positives que l'on notera x_n et y_n , avec $0 < x_n < y_n$.
- 2) Montrer que $(x_n)_{n \geq 3}$ converge vers 1.
- 3) Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = \frac{x_n - 1}{y_n}$.

Exercice 6

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ avec $\alpha > 0$.

On pose $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$. En étudiant la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$, montrer que v converge, puis étudier la convergence de $\sum u_n$ suivant la valeur de α .

Exercice 7

1) Soit la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ et σ la permutation de \mathbb{N}^* telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \sigma(3k) = 2k \\ \sigma(3k-1) = 4k-1 \\ \sigma(3k-2) = 4k-3 \end{cases}$$

- Prouver que σ est bien une permutation de \mathbb{N}^* .
- Donner la nature de la série $\sum u_n$, puis déterminer celle de $\sum u_{\sigma(n)}$.

☺ Faire une sommation par paquets de 3.

2) Soit la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et σ la permutation de \mathbb{N}^* telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{cases} \sigma(3k) = 4k \\ \sigma(3k-1) = 4k-2 \\ \sigma(3k-2) = 2k-1 \end{cases}$$

Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum u_{\sigma(n)}$ convergent, mais $\sum_{n=1}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{\sin n}{n}$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 t \cos(nt) dt + v_n$ avec $v_n = \frac{1 - \cos n}{n^2}$.
- On pose $f(t) = \frac{t}{\sin t}$. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.
- Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0; 1]$, $\sum_{k=1}^n t \cos(kt) = f\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) - \frac{1}{2}t$.
- En déduire que la série $\sum u_n$ converge.
- Déterminer la nature de la série $\sum \frac{e^{in}}{n}$.

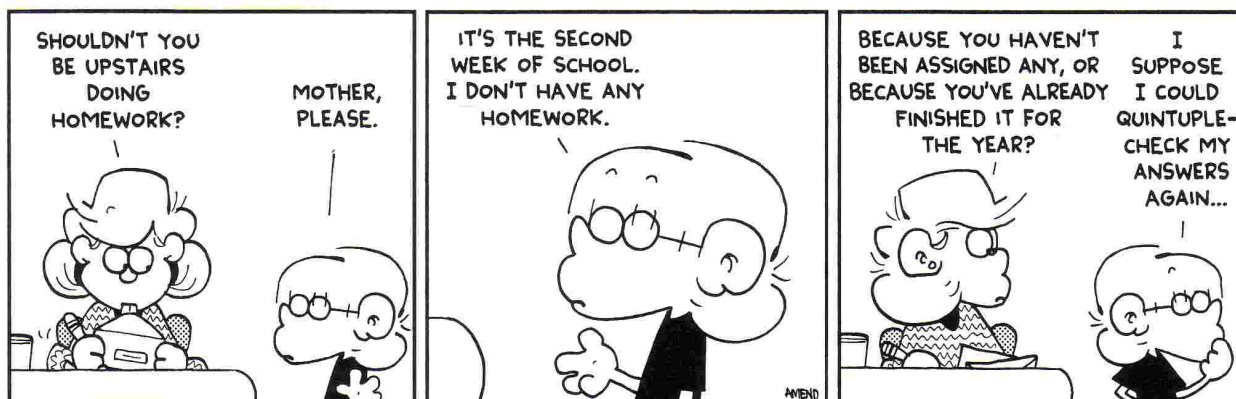
Exercice 9

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante à termes positifs telle que $\sum u_n$ converge. On note R_n le reste d'ordre n .

Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, puis que si $\sum R_n$ converge alors $\sum n u_n$ converge vers la même somme.

Exercice 10

Soit $x \in]-1; 1[$. En étudiant $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right)^2$, montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$.



Exercice 11 (Centrale)

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{\cos(\ln n)}{n}$ et $I_n = \int_1^n \frac{\cos(\ln t)}{t} dt$.

La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle? En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

☺ On pourra considérer la fonction $f : x \mapsto \int_1^x \frac{\cos(\ln t)}{t} dt$ et écrire une formule de Taylor adéquate.

Exercice 12 (X-ENS)

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de réels strictement positifs. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta a_n = a_n - a_{n+1}$ et $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_n - \Delta a_{n+1}$, et on suppose que $\Delta^2 a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. Qu'en déduire?
- 2) Montrer que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$, on a $n\Delta a_n \leq (p-1)\Delta a_n + a_p - a_{n+1}$.
- 3) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\Delta a_n = 0$.
- 4) Montrer que la série $\sum (n+1)\Delta^2 a_n$ converge et donner sa somme.
- 5) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle quelconque. On note $v_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $w_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n v_k$.

On suppose que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n v_n = 0$. Montrer que la série $\sum a_n u_n$ converge.

