

**TD du chapitre 10 : Intégration sur un intervalle**
**Exercice 1**

1) Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\text{a. } \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt \quad \text{b. } \int_0^1 \frac{dx}{\arccos x} \quad \text{c. } \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^a (\ln t)^b} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

$$\text{d. } \int_1^{+\infty} \left[ \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{1 + \frac{1}{x}} - a - \frac{b}{x} \right] dx \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{e. } \int_0^{+\infty} \sin^2 x dx$$

$$\text{f. } \int_0^{+\infty} e^{it^2} dt \quad \text{g. } \int_0^{+\infty} \cos(e^x) dx \quad \text{h. } \int_0^{+\infty} x^3 \sin(x^8) dx$$

2) Montrer que  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$  et retrouver la convergence de l'intégrale de Dirichlet.

**Exercice 2**

Convergence, éventuellement suivant la valeur du ou des paramètre(s), et calcul de :

$$\text{a. } \int_1^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^2} dt \quad \text{b. } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3} \quad \text{c. } \int_0^1 \frac{x \ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad \text{d. } \int_0^{\pi/2} \sqrt{\tan x} dx$$

$$\text{e. } \int_0^{+\infty} (\sqrt{t} + a\sqrt{t+1} + b\sqrt{t+2}) dt \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{f. } \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t)(1+at)}} \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$\text{g. } \int_0^1 t \left[ \frac{1}{t} \right] dt \quad \text{h. } \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+t^\lambda)} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \quad \text{i. } \int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{E(x)}}{x} dx$$

$$\text{j. } \int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx \quad \text{où } 0 < a < b \text{ et } f \text{ est continue et intégrable sur } \mathbb{R}_+.$$

$$\text{k. } \int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt. \quad \odot \text{ Montrer que } \int_0^x \frac{t-1}{\ln t} dt = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln t} dt, \text{ puis justifier que } \frac{x}{t \ln t} \leq \frac{1}{\ln t} \leq \frac{x^2}{t \ln t} \text{ pour } t \in [x^2, x].$$

**Exercice 3**

Dans chaque cas suivant, justifier que  $F$  est définie sur  $D$  et déterminer un équivalent simple de  $F$  en  $a$ .

$$1) F : x \mapsto \int_0^1 \frac{dt}{t^3 + x^2}, \quad D = \mathbb{R}_+^* \text{ et } a = +\infty.$$

$$2) F : x \mapsto \int_x^1 \frac{dt}{(\arctan t)^2}, \quad D = \mathbb{R}_+^* \text{ et } a = 0.$$

$$\odot \text{ On pourra montrer que } f : t \mapsto \frac{1}{t^2} - \frac{1}{(\arctan t)^2} \text{ est intégrable sur } ]0, 1].$$

$$3) F : x \mapsto e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad D = \mathbb{R} \text{ et } a = +\infty.$$

$$4) F : x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt, \quad D = \mathbb{R}_+^* \text{ et } a = 0.$$

**Exercice 4**

Soit  $f$  une fonction continue par morceaux sur  $\mathbb{R}_+$  et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} f(t) dt = 0$ .

2) On suppose ici que  $f$  est continue en 0. Montrer  $\lim_{x \rightarrow 0} x \int_x^1 \frac{f(t)}{t^2} dt = f(0)$ .

3) On suppose ici que  $f$  est à images dans  $\mathbb{R}$  et décroissante. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) = 0$ .

☺ On pourra utiliser  $g(x) = \int_x^{2x} f(t) dt$ .

4) On suppose ici que  $f$  est continue sur  $[1, +\infty[$ . On pose  $u(x) = \frac{1}{x^2} \int_1^x f(t) dt$  et  $v(x) = \frac{f(x)}{x}$ .

Montrer que  $u$  et  $v$  sont intégrables sur  $[1, +\infty[$  et que  $\int_1^{+\infty} u = \int_1^{+\infty} v$ .

**Exercice 5**

Soit l'équation différentielle (E) :  $y' - y = \ln x$ .

1) Résoudre (E) sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2) Existe-t-il des solutions bornées ?

**Exercice 6**

Soit  $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telle que  $f''$  et  $(f'')^2$  soient intégrables sur  $\mathbb{R}$ .

Montrer que  $(f')^2$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et que  $\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2\right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2\right) \left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2\right)$ .

☺ On pourra prouver que  $\lim_{-\infty} f' f = \lim_{+\infty} f' f = 0$ .

**Exercice 7**

Soit  $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $R_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ .

1) On prend ici  $f(x) = \ln x$ . A-t-on  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t) dt$  ?

2) On suppose ici que  $f$  est monotone, que  $\int_0^1 f(t) dt$  converge et  $\lim_{x \rightarrow 0} x f(x) = 0$ .

Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n(f) = \int_0^1 f(t) dt$ .

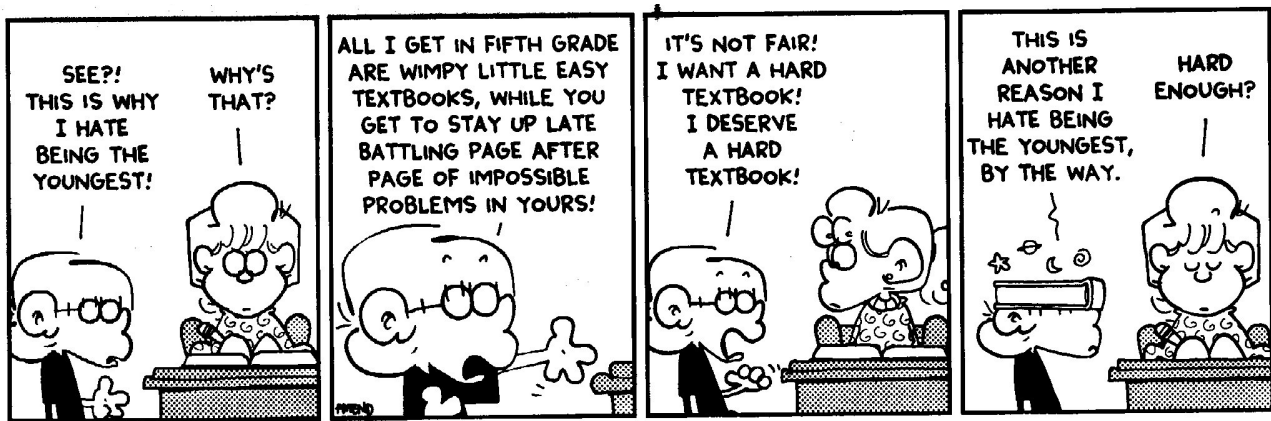
**Exercice 8**

On note  $L^2(I, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions définies sur  $I$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , continues par morceaux et de carré intégrable sur  $I$ , autrement dit telles que  $\int_I f^2$  converge.

1) Justifier que pour tous  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a  $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ .

2) Montrer que, uni des lois usuelles,  $L^2(I, \mathbb{R})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

3) Prouver que l'application  $(f, g) \mapsto \int_I fg$  est un produit scalaire sur  $L^2(I, \mathbb{R}) \cap C^0(I, \mathbb{R})$ .



### Exercice 9 (Mines - augmenté)

Pour tout réel  $x > 0$ , on pose  $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ .

- 1) Montrer que  $f$  est définie et se prolonge en une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}_+$ .
- 2) Prouver la convergence de  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  et calculer cette intégrale.

### Exercice 10

Soit  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  continue et telle que  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  converge. Montrer que  $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$  converge.

### Exercice 11 (XPC)

On pose  $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t) dt$  et  $J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t) dt$ .

- 1) Montrer que les fonctions  $t \mapsto \ln(\cos t)$  et  $t \mapsto \ln(\sin t)$  sont intégrables sur  $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ , donc que les intégrales  $I$  et  $J$  sont bien définies.
- 2) Montrer que  $I = J$ .
- 3) Trouver une relation entre  $I + J$  et  $I$ , puis en déduire la valeur de  $I$  et  $J$ .

