TD du chapitre 3 : Limites et continuité

Sauf mention contraire, on se place dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ (où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Exercice 1

Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\|x\|}x$ est continue sur *E*, bijective de *E* dans la boule ouverte $B(0,1)$ et que sa réciproque est continue. On dit que *f* définit un *homéomorphisme* de *E* dans $B(0,1)$.

Exercice 2

On prend ici $E = C([0,1],\mathbb{R})$ et $\|f\| = \|f\|_1 = \int_0^1 |f|$. Montrer que $\phi : E \to \mathbb{R}$; $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ est continue.

Exercice 3

Soient $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto \ln(x^2+y^2)$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$; $(x,y) \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$.

1) Montrer que *f* est *g* sont continues sur Ω.
2) Ces fonctions sont-elles prolongeables par continuité en $(0,0)$?

Exercice 4

Ici, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et *E* de dimension finie $p > 0$.

Soient *F* est une partie fermée de *E* et *f* une application de *F* dans *F*, lipschitzienne de rapport $\lambda \in]0,1[$ pour la norme infinie dans une base $\mathcal{B}$ fixée de *E* (on dit que *f* est *contractante* pour la norme infinie).

On cherche à prouver que *f* possède un unique point fixe dans *F* (c'est un théorème de point fixe).

1) Montrer que si *f* possède un point fixe alors il est unique.
2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de *E* définie par $x_0 \in F$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.
   Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F$ et que $\|x_{n+1} - x_n\|_\infty \le \lambda^n \|x_1 - x_0\|_\infty$.
3) Pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, on appelle $x_{i,n}$ la $i^{ième}$ coordonnée de x_n dans $\mathcal{B}$.
   Montrer que la série $\sum\left(x_{i,n+1} - x_{i,n}\right)$ est absolument convergente.
4) En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur *a* de *E* tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\|x_n - a\|_\infty \le \frac{\|x_1 - x_0\|_\infty}{1-\lambda}\lambda^n .$$
5) Montrer que $f(a) = a$. Conclure.

Exercice 5

Soit une application $f : E \to F$ où $(F, \|\cdot\|)$ est un EVN (on note la norme comme celle de *E*).

1) Montrer que *f* est continue sur *E* si et seulement si l'image réciproque de toute partie ouverte de *F* est une partie ouverte de *E*.
2) Montrer que *f* est continue sur *E* si et seulement si l'image réciproque de toute partie fermée de *F* est une partie fermée de *E*.
3) On suppose que *f* est continue sur *E*. L'image d'une partie ouverte est-elle ouverte ? L'image d'une partie fermée est-elle fermée ?

Exercice 6

Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 7 (*Centrale*)

Soient $\mathcal{Y}_n(\mathbb{R}) = \left\{ A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \in [0,1] \right\}$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.

Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in \mathcal{Y}_n(\mathbb{R})$, $\|A - B\| \le \|M - B\|$ où $\|.\|$ est une norme euclidienne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 8 (*Mines*)

Soient $f, g \in C([0,1],[0,1])$ telles que $f \circ g = g \circ f$.

1) On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) > g(x)$.

   Montrer qu'alors, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, $f^n(x) \ge g^n(x) + n\alpha$ où f^n représente $f \circ f \circ ... \circ f$ où *f* apparait *n* fois. En déduire une contradiction.

2) Prouver alors qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 9 (*ENS*)

Soit $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ (on a vu dans le TD du chapitre précédent que la série converge). Enfin, pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$T_n = \exp\left(\frac{1}{n} A\right) \exp\left(\frac{1}{n} B\right) \quad \text{et} \quad S_n = \exp\left(\frac{1}{n}(A+B)\right).$$

1) Pour $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on pose $\|A\| = \max_{i \in [\![1,p]\!]} \left(\sum_{j=1}^{p} |a_{i,j}| \right)$. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et que pour toutes $A, B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$. Que vaut $\|I_p\|$?

2) Montrer que $\|T_n - S_n\| = \underset{n \to +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

3) Déterminer la limite de $\left((T_n)^n\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.