TD du chapitre 5 : Séries entières

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ et étudier la convergence au bord du disque de convergence pour :

a. $a_n = \dfrac{i^n n^2}{(n^2+1)2^n}$.

b. $a_n = \dfrac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{sh}^2 n}$.

c. a_n est le $n^{\text{ième}}$ chiffre après la virgule de $\sqrt{2}$ (avec $a_0 = 1$).

d. $a_n = \ln\left(\dfrac{(-1)^n + \sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\right)$.

e. a_n est l'unique solution réelle de $x^3 + nx - 1 = 0$.

f. $a_n = \ln n$ (en considérant $(1-x)f(x)$, on donnera un équivalent en 1 de la somme $f(x) = \sum_{n\geq 1} a_n x^n$).

On étudiera les trois dernières sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

1) Déterminer le rayon de convergence, le domaine de convergence et calculer la somme f de $\sum a_n x^n$ pour :

a. $a_n = \dfrac{n^3+n+3}{n+1}$ b. $a_n = \dfrac{(n+1)^2}{n!}$ c. $a_n = \dfrac{1}{n-(-1)^n}$ d. $a_n = \dfrac{(-1)^n}{2n-1}\dbinom{2n}{n}$ (*établir :* $2f = (1+4x)f'$).

2) Déterminer la somme de la série $\sum a_n$ pour :

a. $a_n = \dfrac{2^n + 3^n n}{5^n n(n-1)}$. b. $a_n = \dfrac{1}{(3n)!}$.

Exercice 3

1) Développer les fonctions suivantes en série entière au voisinage de 0 et donner le rayon de convergence.

a. $f : x \mapsto \dfrac{\sin 4x}{\sin x}$.

b. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^4 - 3x^2 + 2}$.

c. $f : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-x}\tan\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right)$ ($\alpha \in \,]0;\pi[$). ☺ *On pourra commencer par* f'.

2) Montrer que $f : x \mapsto \dfrac{2}{x^2} - \dfrac{1}{\operatorname{ch} x - 1}$ est prolongeable par continuité en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $(b,c)\in\mathbb{C}^2$. On note (E) l'équation différentielle $y''+by'+cy=0$.

1) On suppose que l'équation (E) admet une solution développable en série entière au voisinage de 0, que l'on note $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$. Etablir une relation de récurrence sur les a_n.
2) Déterminer alors toutes les suites vérifiant la relation de récurrence établie ci-dessus pour $c=-b-1$.

Exercice 5

Soit une série entière $\sum a_nx^n$ de rayon de convergence $R>0$. On note f la somme de la série.

1) Dans cette question, on suppose que les a_n sont des réels positifs, que $R=1$ et que f est bornée sur $[0;1[$.
   a. Montrer que la série numérique $\sum a_n$ converge et que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\sum_{n\geq 0}a_n$.
   b. Ce résultat subsiste-t-il quand les a_n sont de signe quelconque ?
2) Dans cette question, on veut prouver le <u>Théorème d'Abel</u> qui dit que :

   Si la série numérique $\sum a_nR^n$ converge, alors $\lim\limits_{x\to R^-} f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nR^n$.

   a. Montrer que l'on peut se ramener au cas où $R=1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n=0$.

   Dans la suite, on suppose que les deux conditions ci-dessus sont réalisées.

   b. On pose $S_{-1}=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$. Montrer que pour tout $x\in\,]0;1[$ et tout $N\in\mathbb{N}$:
   $$\sum_{n=0}^{N}(S_n-S_{n-1})x^n=\sum_{n=0}^{N}S_n(x^n-x^{n+1})+S_Nx^{N+1}.$$
   c. En déduire que pour tout $x\in\,]0;1[$, $f(x)=(1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}S_nx^n$ et conclure.

Exercice 6

Soit $\sum a_nx^n$ une série entière réelle de rayon de convergence $R>0$ et de somme $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$.

1) On suppose que $a_0=1$.
   a. Prouver qu'il existe une unique suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $c_0=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n}a_kc_{n-k}=0$.
   b. Soit $r\in\,]0;R[$. Justifier qu'il existe un réel $M>0$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|a_nr^n|\leq M$.

      Les réels r et M ainsi fixés, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $|c_n|\leq\dfrac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$.
   c. En déduire que $\sum c_nx^n$ a un rayon de convergence non nul. Que conclure ?
2) Soit $\sum b_nx^n$ une autre série entière réelle de rayon de convergence 1 et de somme $g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_nx^n$.

   On suppose que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n>0$, que la série $\sum b_n$ diverge, et que $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\ell\in\mathbb{R}$.

   Montrer que $g(x)\to+\infty$ quand $x\to 1^-$, puis que $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\ell$.

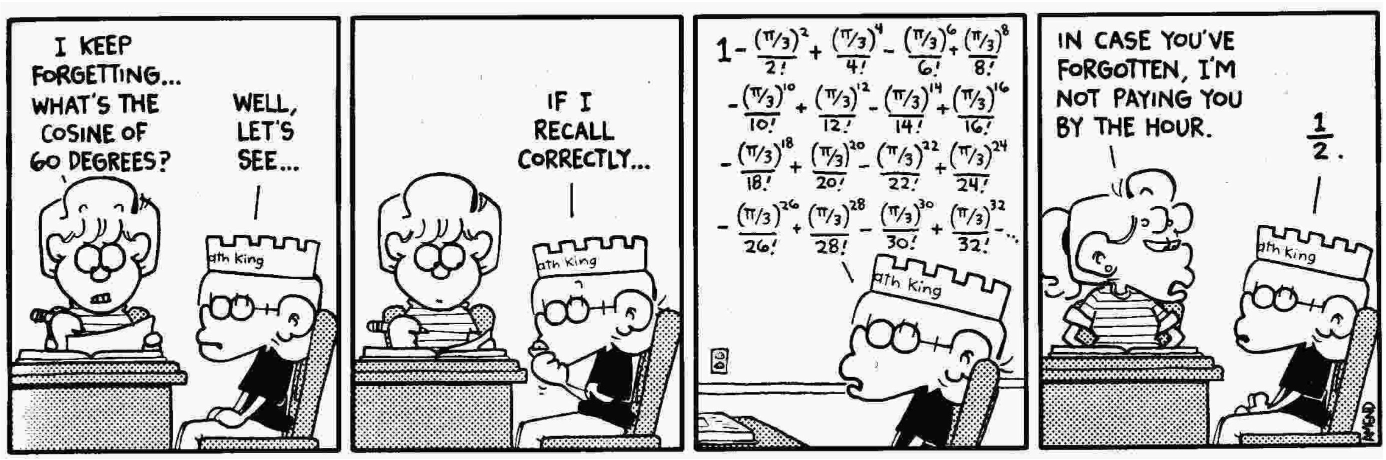
Exercice 7

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et vérifiant $f(0)=0$. On définit sur $\mathbb{R}^*$ la fonction :

$$\varphi : x \mapsto \frac{f(x)}{x}.$$

On cherche à prouver que φ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

1) Justifier que la fonction φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et qu'elle peut être prolongée en une fonction continue sur $\mathbb{R}$, notée $\tilde{\varphi}$.
2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En appliquant la formule de Taylor avec reste intégrale entre x et 0, ainsi que la formule de Leibniz, montrez que pour $x\in\mathbb{R}^*$:
$$x^{n+1}\varphi^{(n)}(x)=\int_0^x t^n f^{(n+1)}(t)\,dt.$$
3) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrez que la fonction $\varphi^{(n)}$ a pour limite $\dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$ en 0.
4) En déduire que $\tilde{\varphi}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
5) Reprendre l'exercice en supposant que *f* est développable en série entière au voisinage de 0.



Exercice 8 (*Mines et Centrale*)

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de sommes partielles de la série numérique de terme général a_n et on pose $f(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{a_n}{n!}x^n$ et $g(x)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\dfrac{S_n}{n!}x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence des séries entières f et g.
2) Déterminer une relation entre f', g' et g.
3) En déduire que $\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt=e^{-x}\left(g(x)-f(x)\right)$.
4) Déterminer la limite de $x\mapsto e^{-x}g(x)$ en $+\infty$ dans le cas où $a_n=(-1)^n$.
5) On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t}f(t)\,dt$.

Exercice 9 (*Mines*)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n\geq 1} \tan\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$.

1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière f, puis étudier la convergence en $\pm R$.
2) Déterminer la limite en 1 de $x \mapsto (1-x)f(x)$.

Exercice 10 (*Mines*)

Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. Calculer a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.