TD du chapitre 8 : Réduction d'endomorphisme

Dans tout le TD, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n est un entier naturel non nul.

Eléments propres

Exercice 1

Soient $E = C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et $h \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}_+^*)$.

Déterminer les éléments propres de $u : E \to E\,;\, f \mapsto g$ où $g : x \mapsto \dfrac{1}{h(x)}\displaystyle\int_0^x h(t)f(t)dt$.

Exercice 2

Soit $A \in \mathbb{C}[X]$, non nul de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X]\,; P \mapsto R$, où R est le reste de la division euclidienne de P par A, est un endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ et déterminer ses éléments propres.

Exercice 3

Dans l'espace vectoriel E des suites réelles, on considère l'application f qui à toute suite u associe la suite $v = f(u)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$ (la moyenne de Césaro).

1) Justifier que f est un endomorphisme de E.
2) Soit u un vecteur propre de f. Justifier l'existence de $p = \min\{n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0\}$ et déterminer alors la valeur propre associée à u.
3) Prouver que pour tous m et p entiers naturels, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{p+k}{k} = \binom{p+m+1}{m}$.
4) La suite u étant toujours un élément propre de f, conjecturer u_{p+m} pour tout $m \in \mathbb{N}$ et où p est la valeur définie à la question 2, puis prouver votre conjecture.
5) En déduire les éléments propres de f.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que A est nilpotente si et seulement si sa seule valeur propre (réelle ou complexe) est 0.
2) Montrer que A est nilpotente si et seulement si pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $Tr(A^k) = 0$.

Exercice 5

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$, $0 \le a_{i,j} \le 1$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

1) Montrer que 1 est valeur propre de A.
2) Soit λ une valeur propre réelle ou complexe de A. Montrer que $|\lambda| \le 1$.
3) Dans cette question, on suppose que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $a_{i,i} \neq 0$.
   a. Prouver qu'il existe un réel $\omega \in \,]0,1]$ tel que pour tout $\lambda \in Sp(A)$, $|\lambda - \omega| \le 1 - \omega$.
   b. Interprétez ce résultat dans le plan complexe.
   c. En déduire que la seule valeur propre de module 1 est 1.

Réduction

Exercice 6

Soit m un nombre réel et la matrice $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ½ \\ -1 & 1 & ½ \\ 4 & 0 & m \end{pmatrix}$.

1) Déterminer les réels m pour lesquels A_m est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2) Existe-t-il un réel m_0 tel que A_{m_0} soit semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$? Si oui, calculer $A_{m_0}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3) <u>*Application*</u> : Dans un clapier, il y a des Mesdames Lapin, des Messieurs Lapin et des Bébés Lapin. Au cours d'une année, chaque Madame Lapin met au monde 4 Bébés Lapins (moitié de mâles et moitié de femelles) mais cela étant stressant, elle étripe un Monsieur Lapin pour passer ses nerfs. On sait que les Bébés Lapins deviennent adultes à la fin de l'année suivante et que les lapins vivent éternellement (disons très longtemps !) sauf quand ils se font étriper.

   Soit a_k, b_k et c_k les nombres respectifs de Mesdames Lapin, Messieurs Lapin et Bébés Lapin (les deux sexes confondus) à la fin de l'année k.

   a. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = AX_k$ où $X_k = \begin{pmatrix} a_k \\ b_k \\ c_k \end{pmatrix}$.

   b. Prouver que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = A^k X_0$.

   c. Sachant qu'initialement, il n'y avait qu'un couple adulte Monsieur et Madame Lapin, montrer que le nombre de Mesdames Lapin croît indéfiniment alors qu'il n'y jamais plus de un Monsieur Lapin en fin d'année.

Exercice 7

On prend ici $n \geq 2$. Pour chaque matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ci-dessous, déterminer si elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et/ou dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si c'est le cas, donner ses valeurs propres et les sous-espaces propres associés.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & \ddots & 4 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 & \cdots & a_2 & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-1} & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & a_n & \cdots & a_n & a_n \end{pmatrix}.$$

Les a_i étant des réels non tous nuls pour la dernière.

Exercice 8

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

1) On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer qu'elles sont simultanément diagonalisables.
2) Montrer que A et B sont simultanément trigonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (trigonalisables dans une même base).

Exercice 9

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

Montrer que A peut s'écrire sous la forme $D + N$ où D est diagonalisable et N est nilpotente.

Exercice 10

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $M^m = I_n$.

1) Montrer que M est inversible et diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
2) On appelle ordre de M l'entier $p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* \setminus M^k = I_n\right\}$.
   Montrer que, pour $k \in \mathbb{Z}$, $M^k = I_n$ si et seulement si p divise k.
3) On appelle O_n l'ensemble des ordres des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ dont l'une des puissances est I_n.
   Montrer que O_n n'est pas vide et est fini.
4) Déterminer O_2.

Exercice 11

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que si f est diagonalisable, alors f^2 l'est aussi. Justifier que la réciproque est fausse.
2) On suppose que f^2 est diagonalisable.
   Prouver que f est diagonalisable si et seulement si $\ker f = \ker f^2$.
   ☺ *On pourra utiliser les polynômes annulateurs.*

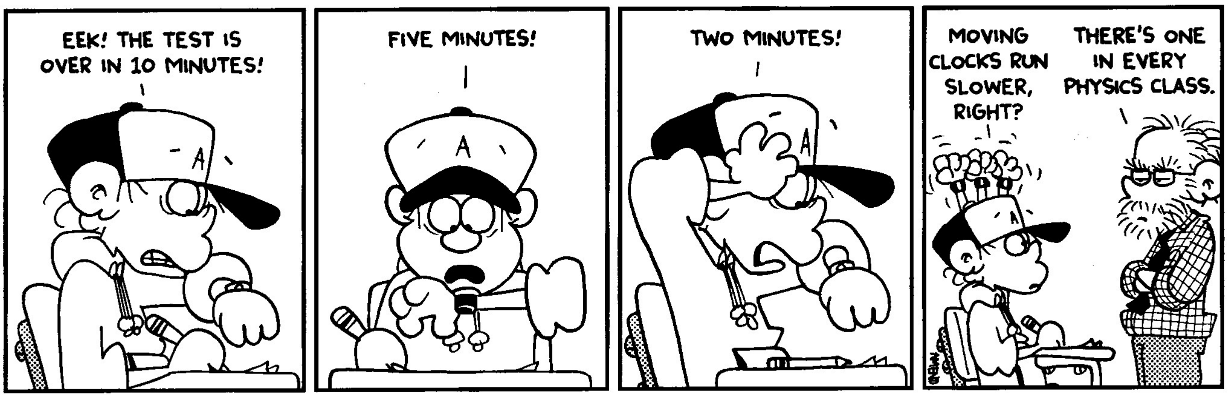
Exercice 12

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes annulateurs de u, soit $\mathcal{A} = \left\{P \in \mathbb{K}[X] \setminus P(u) = 0\right\}$.

On veut prouver qu'il existe un unique polynôme unitaire L tel que $\mathcal{A} = L.\mathbb{K}[X] = \left\{LP \setminus P \in \mathbb{K}[X]\right\}$.

1) On pose $\mathcal{D} = \left\{\deg P \setminus P \in \mathcal{A}, P \neq 0\right\}$. Justifier que $\mathcal{D}$ admet un minimum $p \geq 1$.
2) Soit $L \in \mathcal{A}$, unitaire et tel que $\deg L = p$. Prouver que $\mathcal{A} = L.\mathbb{K}[X]$.
3) Montrer que L est unique.

Le polynôme L s'appelle *polynôme minimal* de u.



Exercice 13 (*Mines*)

1) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P est scindé sur $\mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\mathrm{Im}(z)|^n$.
2) Montrer que l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices trigonalisables.

Exercice 14 (*X*)

1) La matrice $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

2) Trouver les plans stables par A.

3) Trouver les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(A)$ soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$.

Exercice 15 (*Mines*)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si tout polynôme dont une puissance est annulatrice de A est annulateur de A.

Exercice 16 (*Centrale*)

1) Déterminer une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont exactement les racines troisièmes de l'unité.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = I_n$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2) On suppose dans cette question que 1 n'est pas valeur propre de A.
   a. Montrer que n est pair.
   b. Exprimer A^2 en fonction de A et I_n.
   c. Résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3) On suppose maintenant que 1 est valeur propre de A.
   Résoudre l'équation $AX = X - B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.