TD du chapitre 9 : Calcul différentiel

Exercice 1

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable et telle que $f'(a) < f'(b)$.

Prouver le théorème de Darboux : f' vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, c'est-à-dire que :

$$\forall\, k \in \left[f'(a), f'(b)\right],\ \exists\, c \in [a,b] \ \backslash\ f'(c) = k.$$

☺ *On pourra commencer par le cas où* $k = 0$ *et montrer qu'alors f admet un minimum sur* $[a,b]$.

Exercice 2

Soit $f \in C^1(]0,1], \mathbb{R})$ telle que f' est bornée sur $]0,1]$. On veut prouver que *f* admet une limite à droite en 0.

On pose $M = \sup\limits_{x \in]0,1]} |f'(x)|$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \dfrac{1}{2^n}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(x_{n+1}) - f(x_n)| \leq M\,|x_{n+1} - x_n|$, puis que pour tous $n, p \in \mathbb{N}$:

$$|f(x_{n+p}) - f(x_p)| \leq \frac{M}{2^p}.$$

2) Justifier alors que la suite $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sup\limits_{k \geq n} f(x_k)$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie *L*.

4) Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - f(x_n)| \leq \dfrac{M}{2^n}$ puis que $\left(f(x_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5) Démontrer alors que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = L$. ☺ *On pourra utiliser la technique de la question 1.*

Exercice 3

Soient *I* un intervalle de $\mathbb{R}$, *E* un espace euclidien et $f : I \to E$

1) On suppose que *f* est deux fois dérivable et que $\|f\|$ est constante.
   Montrer que $(f \mid f'')$ est à valeurs négatives. Interprétation cinématique ?

2) On suppose que *f* est dérivable et qu'il existe un réel $k > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $\|f'(x)\| \leq k\,\|f(x)\|$.
   Montrer que si la fonction *f* s'annule en un point de *I*, alors elle est nulle sur *I*.
   ☺ *On pourra utiliser la fonction* $g : x \mapsto \|f(x)\|^2 e^{-2kx}$.

Exercice 4

Soient *E* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et $f : \mathbb{R} \to E$, continue en 0 et telle qu'il existe $k \in]0,1[$ et $\ell \in E$ tels que $\lim\limits_{t \to 0}\left(\dfrac{1}{t}\left[f(t) - f(kt)\right]\right) = \ell$.

1) Montrer que : $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, t \in [-\alpha, \alpha] \backslash \{0\},\ \forall\, i \in \mathbb{N},\ \left\| \dfrac{1}{k^i t}\left[f(k^i t) - f(k^{i+1} t)\right] - \ell \right\| \leq \varepsilon.$

2) En déduire que *f* est dérivable en 0 et exprimer $f'(0)$ en fonction de *k* et ℓ.

Exercice 5

1) Soit $f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\left(\dfrac{x}{y}\right) & \text{si } y\neq 0 \\ 0 & \text{si } y=0 \end{cases}$.

   Déterminer le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ sur lequel *f* est de classe C^1.

   Les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$ existent-elles ? Si oui, sont-elles égales ?

2) Montrer que $f:(x,y)\mapsto \dfrac{\sin x-\sin y}{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh} y}$ admet un prolongement de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6

Dans les cas suivants, montrer que *f* ou *g* est différentiable sur son ensemble de définition et déterminer sa différentielle.

1) $f:\ \mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}\ ;\ P\ \mapsto\ \int_0^1 P^2$.

2) $f:\ GL_n(\mathbb{R})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{R})\ ;\ A\ \mapsto\ A^{-1}$.

3) $f:\ E\to\mathbb{R}\ ;\ x\ \mapsto\ \left(x\,|\,u(x)\right)$ où *E* est un espace euclidien et *u* un endomorphisme symétrique de *E*.

   Puis $g:\ E\setminus\{0\}\to\mathbb{R}\ ;\ x\ \mapsto\ \dfrac{\left(x\,|\,u(x)\right)}{\left(x\,|\,x\right)}$.

   On montrera que $dg(a)=0$ si et seulement si *a* est un vecteur propre de *u*.

Exercice 7

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue en *a*, $v:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue en *b* et $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application admettant un maximum local en $\left(u(a),v(b)\right)$.

Montrer que $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ ;\ (x,y)\mapsto f(x,y)=\varphi\left(u(x),v(y)\right)$ admet un maximum local en (a,b).

Exercice 8

Déterminer le maximum du produit des distances d'un point *M* intérieur à un triangle *ABC* aux cotés de ce triangle.

Exercice 9

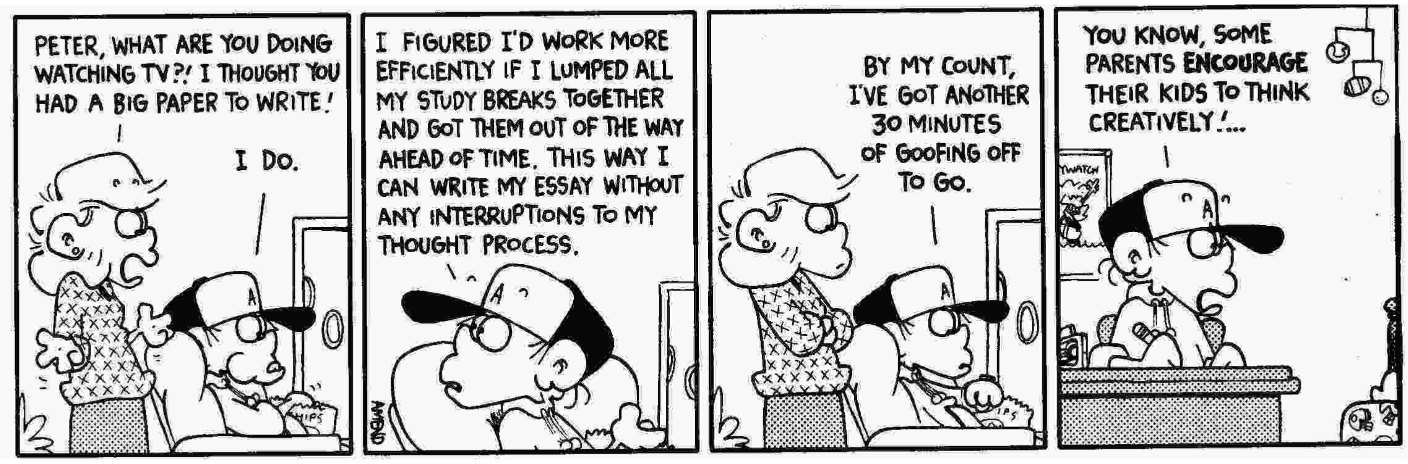
Soit $f\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ telle que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

1) Soit $g:\ (x,y)\ \mapsto\ \int_0^y \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt-\int_0^x \dfrac{\partial f}{\partial y}(t,0)dt$. Montrer que $g\in C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et vérifie :

$$\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}\quad\text{et}\quad\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial y}.$$

2) On définit sur $\mathbb{R}_+$ l'application $\Phi:r\mapsto\int_0^{2\pi} f\left(r\cos\theta\,,r\sin\theta\right)d\theta$. Montrer que Φ est de classe C^1 et calculer sa dérivée.

3) En déduire que si *f* possède un extremum local en $(0,0)$, alors *f* est constante au voisinage de $(0,0)$.



Exercice 10 (*X adapté*)

Existe-t-il des fonctions $\vec{f}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et vérifiant $\|\vec{f}\| \leq 2$ et $\vec{f}.\vec{f}\,' \geq \sin$?

Exercice 11 (*Centrale*)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $(x, y) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{-n(x^2+y^2)}}{n^2}$.

1) Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.
2) Donner une expression de *f* à l'aide d'une intégrale, mais sans signe somme.
3) Déterminer les extrema de *f*.

Exercice 12 (*ENS - Mines*)

Soient $C \in \mathbb{R}^n$ et une matrice $S \in S_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur *C* et *S* pour que l'application $f : X \in \mathbb{R}^n \mapsto C^\top X + X^\top SX$ présente un extremum.

Exercice 13 (*Mines*)

Soient $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et *g* la fonction définie sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $g(x, y) = f\left(\dfrac{x^2 + y^2}{y}\right)$.

Déterminer les fonctions *f* telles que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$.