Corrigé du DM n° 1

Partie III.B

Q 33. Soient $i, j \in [\![-n+1, n-1]\!]$, $A=(a_{r,s}) \in \Delta_i$ (avec $a_{r,s}=0$ pour $s \neq r+i$) et $B=(b_{r,s}) \in \Delta_j$ (avec $b_{r,s}=0$ pour $s \neq r+j$).

Posons $AB=(c_{r,s})$. On a alors pour tout $r, s \in [\![1, n]\!]$, $c_{r,s}=\sum_{\ell=1}^{n} a_{r,\ell} b_{\ell,s}$.

- Si $r+i \notin [\![1, n]\!]$, alors pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, $\ell \neq r+i$ et $c_{r,s}=0$.
- Si $r+i \in [\![1, n]\!]$, alors $c_{r,s}=\sum_{\ell=1}^{n} a_{r,\ell} b_{\ell,s}=a_{r,r+i} b_{r+i,s}$, donc $c_{r,s}=0$ quand $s-r \neq i+j$.

Ainsi, la seule possibilité pour que $c_{r,s}$ est $s-r=i+j$, donc :

$$\boxed{AB \in \Delta_{i+j}}$$

Remarquons tout de suite ici que si $A \in \Delta_k$, alors $A^0=I_n \in \Delta_0$, $A^2 \in \Delta_{k+k}=\Delta_{2k}$, $A^3=A^2 A \in \Delta_{3k+k}=\Delta_{3k}$ et si $A^p \in \Delta_{pk}$ alors $A^{p+1}=A^p A \in \Delta_{pk+k}=\Delta_{(p+1)k}$. Ceci prouve par récurrence que :

$$\boxed{\text{Si } A \in \Delta_k \text{, alors pour tout } p \in \mathbb{N},\ A^p \in \Delta_{pk}.}$$

Q 34. Soient $i, j \in [\![-n+1, n-1]\!]$, $A \in H_i=\Delta_i \oplus \Delta_{i+1} \oplus \ldots \oplus \Delta_{n-1}$ et $B \in H_j=\Delta_j \oplus \Delta_{j+1} \oplus \ldots \oplus \Delta_{n-1}$.

On peut alors écrire $A=\sum_{r=i}^{n-1} A_r$ avec $A_r \in \Delta_r$ pour tout $r \in [\![i, n-1]\!]$ et $B=\sum_{s=j}^{n-1} B_s$ avec $B_s \in \Delta_s$ pour tout $s \in [\![j, n-1]\!]$. Et :

$$AB=\left(\sum_{r=i}^{n-1} A_r\right)\left(\sum_{s=j}^{n-1} B_s\right)=\sum_{r=i}^{n-1} \sum_{s=j}^{n-1} A_r B_s=\sum_{r,s \in [\![i,n-1]\!] \times [\![j,n-1]\!]} A_r B_s \in \bigoplus_{r,s \in [\![i,n-1]\!] \times [\![j,n-1]\!]} \Delta_{r+s}=\bigoplus_{k=i+j}^{n-1} \Delta_k .$$

Soit :

$$\boxed{AB \in H_{i+j}}$$

Q 35. Si $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente, alors $C^n=0_n$. On a alors :

$$(I_n+C)\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C^k\right)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C^k+\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C^{k+1}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C^k-\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C^k=(-1)^0 C^0-(-1)^n C^n=I_n .$$

Ainsi, il existe une matrice $A=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C^k \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(I_n+C)A=I_n$, ce qui prouve que :

$$\boxed{I_n+C \text{ est inversible avec } (I_n+C)^{-1}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k C^k .}$$

Q 36. Comme $k \geq 0$, on a $k+1 \geq 1$, donc $C \in \Delta_{k+1}$ et il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $q(k+1) \geq n$, donc, d'après le résultat établi à la fin de la question 33, $C^q \in \Delta_{q(k+1)} = \{0_n\}$, soit $C^q = 0_n$. Ainsi, C est nilpotente.

Alors, $P = I_n + C$ est inversible avec $P^{-1} = \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p C^p$.

Or, toujours d'après le résultat établi à la fin de la question 33, on a $C^p \in \Delta_{p(k+1)}$ pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, donc $(-1)^p C^p \in \Delta_{p(k+1)}$ pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, et ainsi :

$$\boxed{P^{-1} \in \bigoplus_{p=0}^{n-1} \Delta_{p(k+1)}}$$

Q 37. On a pour tout $i \in [\![0, k]\!]$ et tout $M \in \Delta_i$:

$$\varphi(M) - M = P^{-1}MP - M = \left(\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p C^p \right) M(I_n + C) - M = \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C^p M + \sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p C^p MC = M'.$$

Or :

- pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, $(-1)^p C^p \in \Delta_{p(k+1)}$ et $M \in \Delta_i$, donc $(-1)^p C^p M \in \Delta_{p(k+1)+i}$ avec $p(k+1)+i \geq k+1$, donc $\sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C^p M \in H_{k+1} = \bigoplus_{\ell \geq k+1} \Delta_\ell$;
- pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, $(-1)^p C^p MC \in \Delta_{(p+1)(k+1)+i}$ avec aussi $(p+1)(k+1)+i \geq k+1$, donc on a encore $\sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C^p MC \in H_{k+1}$.

Finalement, comme H_{k+1} est un espace vectoriel (donné dans l'énoncé), donc stable par somme, $M' \in H_{k+1}$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Il existe bien } M' \in H_{k+1} \text{ telle que } \varphi(M) = M + M'.}$$

Q 38. On a par hypothèse $n \geq 2$ et $N \in \Delta_{-1}$.

Si $n = 2$, on a :

$$\varphi(N) = \left(\sum_{p=0}^{1} (-1)^p C^p \right) N(I_2 + C) = (I_2 - C)(N + NC) = N + NC - CN + N'$$

avec $N' = -CNC \in \Delta_{2k+1} \subset H_{k+1}$ (car $C \in \Delta_{k+1}$ et $N \in \Delta_{-1}$).

Si $n \geq 3$, on peut écrire, en reprenant le calcul de la question précédente :

$$\varphi(N) = N + (-1)^1 C^1 N + \sum_{p=2}^{n-1} (-1)^p C^p N + (-1)^0 C^0 MC + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C^p MC = N - CN + MC + N'$$

avec $N' = \sum_{p=2}^{n-1} (-1)^p C^p N + \sum_{p=1}^{n-1} (-1)^p C^p MC$ et on prouve comme ci-dessus que $N' \in H_{k+1}$.

Ainsi, dans les deux cas :

$$\boxed{\text{Il existe bien } N' \in H_{k+1} \text{ telle que } \varphi(N) = N + NC - CN + N'.}$$

Q 39. Comme T est triangulaire supérieure, on a $T\in H_0$ et on peut écrire $T=T_0+T_1+...+T_{n-1}$ avec $T_i\in\Delta_i$ pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$. On a alors :

$$B=\varphi(A)=\varphi(N+T)=\varphi\left(N+\sum_{i=0}^{n-1}T_i\right)=\varphi(N)+\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(T_i)=N+NC-CN+N'+\sum_{i=0}^{n-1}\varphi(T_i)\,.$$

Pour tout $i\in[\![0,k]\!]$, $\varphi(T_i)=T_i+T_i'$ avec $T_i'\in H_{k+1}$.

Pour tout $i\in[\![k+1,n-1]\!]$ (s'il y en a, c'est-à-dire si $k\le n-2$), on a $T_i\in H_{k+1}$.

Or, $C\in\Delta_{k+1}$, donc $P=I_n+C\in H_0$ et $P^{-1}=I_n-C+...+(-1)^{n-1}C^{n-1}\in H_0$, d'où :

$$\varphi(T_i)=P^{-1}T_iP\in H_{0+k+1+0}=H_{k+1}\,.$$

Ainsi :

$$B=N+NC-CN+N'+\sum_{i=0}^{k}(T_i+T_i')+\sum_{i=k+1}^{n-1}\varphi(T_i)=N+NC-CN+\underbrace{\sum_{i=0}^{k}T_i}_{\in H_1}+\underbrace{N'+\sum_{i=0}^{k}T_i'+\sum_{i=k+1}^{n-1}\varphi(T_i)}_{\in H_{k+1}}\,.$$

Et $N\in\Delta_{-1}$, $C\in\Delta_{k+1}$ donc $NC-CN\in\Delta_k$, ce qui prouve que $B\in\Delta_{-1}+\Delta_k+H_1+H_{k+1}\subset H_{-1}$, soit :

$$\boxed{B\in H_{-1}}$$

Remarquons de plus que $A^{(-1)}=(N+T)^{(-1)}=N$ et pour tout $i\in[\![0,n-1]\!]$, $A^{(i)}=(N+T)^{(i)}=T^{(i)}=T_i$.

Par ailleurs, en posant $B'=N'+\sum_{i=0}^{k}T_i'+\sum_{i=k+1}^{n-1}\varphi(T_i)$, on a :

$$B=N+T_0+T_1+...+T_k+NC-CN+B'$$

avec $N\in\Delta_{-1}$, $NC-CN\in\Delta_k$, $T_i\in\Delta_i$ pour tout $i\in[\![0,k]\!]$ et $B'\in H_{k+1}$.

Alors :

- $B^{(-1)}=N=A^{(-1)}$;
- $B^{(i)}=T_i=A^{(i)}$ pour tout $i\in[\![0,k-1]\!]$ (si $k\ge1$) ;
- $B^{(k)}=T_k+NC-CN=A^{(k)}+NC-CN$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\begin{cases}\forall\, i\in[\![-1,k-1]\!],\ \ B^{(i)}=A^{(i)}\\ B^{(k)}=A^{(k)}+NC-CN\end{cases}}$$

Q 40. Soit $X=(x_{i,j})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$NX=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad XN=\begin{pmatrix} x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} & 0 \\ x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n,2} & x_{n,3} & \cdots & x_{n,n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\mathcal{S}(X)=0_n \quad\Leftrightarrow\quad NX=XN \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n-1,1} & x_{n-1,2} & \cdots & x_{n-1,n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,n} & 0 \\ x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,n} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_{n,2} & x_{n,3} & \cdots & x_{n,n} & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit $x_{1,2}=\ldots=x_{1,n}=x_{2,n}=\ldots=x_{n-1,n}=0$ et pour tout $i,j\in[\![1,n-1]\!]$, $x_{i,j}=x_{i+1,j+1}$, ce qui donne :

$$X=\begin{pmatrix} x_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{2,1} & x_{1,1} & 0 & \ddots & & 0 \\ x_{3,1} & x_{2,1} & x_{1,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & x_{3,1} & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ x_{n-1,1} & & \ddots & x_{2,1} & x_{1,1} & 0 \\ x_{n,1} & x_{n-1,1} & \cdots & x_{3,1} & x_{2,1} & x_{1,1} \end{pmatrix}$$

Donc, on a bien $\mathcal{S}(X)=0_n$ si et seulement si X est une matrice de Toeplitz réelle triangulaire inférieure et ainsi :

$$\boxed{\text{Le noyau de } \mathcal{S} \text{ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires inférieures.}}$$

Remarquons que pour tout $X\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$${}^t\mathcal{S}^*(X)={}^t({}^tNX-X\,{}^tN)={}^tXN-N\,{}^tX=-\left(N\,{}^tX-{}^tXN\right)=-\mathcal{S}({}^tX).$$

Donc :

$$\mathcal{S}^*(X)=-\,{}^t\mathcal{S}({}^tX).$$

Avec cette remarque et le résultat précédent, il est alors facile de prouver que le noyau de $\mathcal{S}^*$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires supérieures.

Q 41. Soit $X\in\Delta_{k+1}$. On a alors, avec toujours $N\in\Delta_{-1}$, $NX\in\Delta_k$ et $XN\in\Delta_k$, donc $\mathcal{S}(X)=NX-XN\in\Delta_k$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}(\Delta_{k+1})\subset\Delta_k}$$

Si $N\in\Delta_{-1}$, alors ${}^tN\in\Delta_1$.

Alors, pour tout $X \in \Delta_k$, on a ${}^tNX \in \Delta_{k+1}$ et $X\,{}^tN \in \Delta_{k+1}$, donc $\mathcal{S}^*(X) = {}^tNX - X\,{}^tN \in \Delta_{k+1}$. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{S}^*(\Delta_k) \subset \Delta_{k+1}}$$

Q 42. Soient $X \in \Delta_{k+1}$ et $Y \in \Delta_k$. On a :

$$\begin{aligned}\left\langle \mathcal{S}_{k+1}(X), Y \right\rangle &= \left\langle \mathcal{S}(X), Y \right\rangle = \left\langle NX - XN, Y \right\rangle = tr\left[{}^t(NX - XN)Y\right] = tr\left[({}^tX\,{}^tN - {}^tN\,{}^tX)Y\right] \\ &= tr\left({}^tX\,{}^tNY - {}^tN\,{}^tXY\right) = tr\left({}^tX\,{}^tNY\right) - tr\left({}^tN\,{}^tXY\right) = tr\left({}^tX\,{}^tNY\right) - tr\left({}^tXY\,{}^tN\right) \\ &= tr\left({}^tX\,{}^tNY - {}^tXY\,{}^tN\right) = tr\left[{}^tX({}^tNY - Y\,{}^tN)\right] = \left\langle X, \mathcal{S}^*(Y) \right\rangle = \left\langle X, \mathcal{S}_k^*(Y) \right\rangle\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\left\langle \mathcal{S}_{k+1}(X), Y \right\rangle = \left\langle X, \mathcal{S}_k^*(Y) \right\rangle}$$

Soient $X \in \Delta_{k+1}$ et $Y \in \ker \mathcal{S}_k^*$. On a :

$$\left\langle \mathcal{S}_{k+1}(X), Y \right\rangle = \left\langle X, \mathcal{S}_k^*(Y) \right\rangle = \left\langle X, 0_n \right\rangle = 0.$$

Donc, pour tous $X \in \Delta_{k+1}$ et $Y \in \ker \mathcal{S}_k^*$, on a $\mathcal{S}_{k+1}(X) \perp Y$ et ainsi :

$$\operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1} \perp \ker \mathcal{S}_k^*.$$

Ceci implique entre autres que $\operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1} \cap \ker \mathcal{S}_k^* = \{0_n\}$ et donc que :

$$\ker \mathcal{S}_k^* + \operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1} = \ker \mathcal{S}_k^* \overset{\perp}{\oplus} \operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1}.$$

Reste à prouver que la somme est Δ_k.

Remarquons plusieurs choses.

- Si $k \geq n$, alors $\Delta_k = \ker \mathcal{S}_k^* = \operatorname{Im} \mathcal{S}_{k+1} = \{0_n\}$.

Dans la suite, on suppose que $0 \leq k \leq n-1$.

- Δ_k est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1,k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & a_{2,k+2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & a_{n-k,n} \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-k,k} & D_{n-k} \\ \hline 0_{n-k,n-k} & 0_{k,n-k} \end{array}\right)$ où D_{n-k} est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_{n-k}(\mathbb{R})$. Donc, $\Delta_k = \operatorname{Vect}\left(E_{1,k+1}, E_{2,k+2}, \ldots, E_{n-k,n}\right)$ (les $E_{i,j}$ étant les vecteurs de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$) et donc $\dim \Delta_k = n-k$.

- $\ker \mathcal{S}_k^* = \Delta_k \cap \ker \mathcal{S}^*$ et on a vu que $\ker \mathcal{S}^*$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires supérieures, donc $\ker \mathcal{S}_k^*$ est l'ensemble des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & \lambda \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-k,k} & \lambda I_{n-k} \\ \hline 0_{n-k,n-k} & 0_{k,n-k} \end{array}\right)$,

  soit λN_k avec $N_k = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-k,k} & I_{n-k} \\ \hline 0_{n-k,n-k} & 0_{k,n-k} \end{array}\right)$. Ainsi, $\ker \mathcal{S}_k^* = \mathrm{Vect}(N_k)$, donc $\dim \ker \mathcal{S}_k^* = 1$.
- Si $k = n-1$, $\Delta_k = \ker \mathcal{S}_k^* = \mathrm{Vect}(E_{1,n})$ et $\Delta_{k+1} = \mathrm{Im}\, \mathcal{S}_{k+1} = \{0_n\}$.
- Si $0 \leq k \leq n-2$, on a $\mathcal{S}_{k+1} : \Delta_{k+1} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;\, X \mapsto \mathcal{S}(X)$, donc $\mathcal{S}_{k+1} \in \mathcal{L}(\Delta_{k+1}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ et on peut appliquer le théorème du rang : $\dim(\ker \mathcal{S}_{k+1}) + \dim(\mathrm{Im}\, \mathcal{S}_{k+1}) = \dim \Delta_{k+1}$.

  D'après ce qui précède, $\dim \Delta_{k+1} = n-k-1$ (quand $k \leq n-1$). De plus, $\ker \mathcal{S}_{k+1} = \Delta_{k+1} \cap \ker \mathcal{S}$ et on a vu que $\ker \mathcal{S}$ est l'ensemble des matrices de Toeplitz réelles triangulaires inférieures, donc $\ker \mathcal{S}_{k+1} = \{0_n\}$.

  Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}\, \mathcal{S}_{k+1}) = \dim \Delta_{k+1} - \dim(\ker \mathcal{S}_{k+1}) = n-k-1$.

Finalement, dans tous les cas, on a $\dim \Delta_k = \dim(\ker \mathcal{S}_k^*) + \dim(\mathrm{Im}\, \mathcal{S}_{k+1})$, ce qui permet de conclure que :

$$\boxed{\Delta_k = \ker \mathcal{S}_k^* \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}\, \mathcal{S}_{k+1}}$$

Q 43. On a $A^{(k)} \in \Delta_k$. Donc d'après la question précédente, il existe $(A_0, A_1) \in \ker \mathcal{S}_k^* \times \Delta_{k+1}$ tel que :

$$A^{(k)} = A_0 + \mathcal{S}(A_1) = A_0 + NA_1 - A_1 N .$$

Posons $C = -A_1 \in \Delta_{k+1}$ et notons à nouveau $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\,;\, X \mapsto P^{-1}XP$ avec $P = I_n + C$.

D'après la question 39, si $L = \varphi(A)$, on a :

$$\begin{cases} \forall\, i \in [\![-1, k-1]\!],\ L^{(i)} = A^{(i)} \\ L^{(k)} = A^{(k)} + NC - CN \end{cases}$$

D'après la question précédente, $\ker \mathcal{S}_k^* = \mathrm{Vect}(N_k)$ où $N_k = \left(\begin{array}{c|c} 0_{n-k,k} & I_{n-k} \\ \hline 0_{n-k,n-k} & 0_{k,n-k} \end{array}\right)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A_0 = \lambda N_k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & & 0 & \lambda \\ \vdots & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \Delta_k .$$

On a alors :

$$L^{(k)} = A^{(k)} + NC - CN = A_0 + NA_1 - A_1 N + NC - CN = \lambda N_k + NA_1 - A_1 N + N(-A_1) - (-A_1)N = \lambda N_k .$$

Ainsi :

$$\varphi(A) = P^{-1}AP = L \text{ avec } \begin{cases} \forall\, i \in [\![-1, k-1]\!], \quad L^{(i)} = A^{(i)} \\ L^{(k)} = \lambda N_k \end{cases}$$

Donc :

La matrice $A = N + T$ avec $T = (t_{i,j})$ triangulaire supérieure est semblable à une matrice L de la forme :

$$L = \begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,k} & \lambda & \times & \cdots & \times \\ 1 & t_{2,2} & & t_{2,k+1} & \lambda & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \ddots & \ddots & \times \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & t_{n-k-2,n-1} & \lambda \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & t_{n-k-1,n} \\ \vdots & & & \ddots & 1 & t_{n-1,n-1} & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & t_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Q 44. Toute matrice cyclique est semblable à une matrice A de la forme $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n \end{pmatrix} = N + T$ avec $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$ triangulaire supérieure. Pour prouver que toute matrice cyclique est semblable est une matrice de Toeplitz, il suffit donc de prouver que toute matrice A de la forme ci-dessus est semblable est elle-même semblable à une matrice de Toeplitz (car la similitude de matrices est une relation d'équivalence, donc transitive).

D'après la question précédente avec $k=0$, A est semblable à une matrice L_1 de la forme $L_1=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \times & \cdots & \times & \times \\ 1 & \lambda_1 & \ddots & & \times \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 & \times \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Il existe alors une matrice $P_1\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $A=P_1^{-1}L_1P_1$.

Comme $L_1=N+T_1$ avec T_1 triangulaire supérieure, la question précédente avec $k=1$ permet de conclure qu'il existe $P_2\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que $L_1=P_2^{-1}L_2P_2$ avec $L_2=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \times & \cdots & \times \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \times \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}=N+T_2$.

En ponant $L_0=A$ et en itérant le processus jusque $k=n$, on trouve une suite de matrice $L_1,L_2,\dots,L_{n-1}$ telle que pour tout $k\in[\![0,n]\!]$, $L_{k-1}=P_k^{-1}L_kP_k$ avec $L_k=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k & \times & \cdots & \times \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \lambda_1 & \ddots & & \ddots & \times \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & & \lambda_k \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \lambda_2 & \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$.

Alors, $L_n=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{n-1} & \lambda_n \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_2 & & \lambda_{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \lambda_1 \end{pmatrix}$ est une matrice de Toeplitz et :

$$A=P_1^{-1}P_2^{-1}\dots P_n^{-1}L_nP_n\dots P_2P_1=(P_n\dots P_2P_1)^{-1}L_n(P_n\dots P_2P_1)\,.$$

Donc, avec $P=P_n\dots P_2P_1\in GL_n(\mathbb{R})$, on obtient $A=P^{-1}L_nP$ où L_n est une matrice de Toeplitz, donc :

Toute matrice cyclique est semblable est une matrice de Toeplitz.