Corrigés des TD du chapitre 13

Exercice 1

1) Chaque appel téléphonique est une expérience aléatoire ayant deux issues : on obtient le correspondant (probabilité p) ou pas (probabilité $1-p$). Cette expérience de Bernoulli est répétée n fois de manière indépendante : on a un schéma de Bernoulli. Le nombre X de succès, autrement dit le nombre de correspondants obtenus, suit donc une loi binomiale de paramètres n et p.

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ suit la loi binomiale } \mathscr{B}(n,p).}$$

2) a. Si l'évènement $(X=i)$ est réalisé, la secrétaire a joint i correspondants lors de la première vague d'appels. Elle va donc en rappeler $n-i$ lors de la seconde vague.

Comme X, la variable Y représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels suit une loi binomiale de paramètres $n-i$ et p, et donc pour tout $k\in[\![0,n-i]\!]$:

$$\boxed{P_{(X=i)}(Y=k)=\binom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k}}$$

b. La variable aléatoire $Z=X+Y$ représente le nombre total de correspondants obtenus après les deux séries d'appels. On a adonc $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et, avec la loi des probabilités totales, on a pour tout $k\in[\![0,n]\!]$:

$$\begin{aligned}
P(Z=k)&=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P_{(X=i)}(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i)P_{(X=i)}(Y=k-i)\\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}\binom{n-i}{k-i}p^{k-i}(1-p)^{n-i-(k-i)}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}p^k(1-p)^{2n-k-i}\\
&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k-i}=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i\\
&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(1+\frac{1}{1-p}\right)^k=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{2(n-k)}(2-p)^k
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$P(Z=k)=\binom{n}{k}(2p-p^2)^k\left[1-(2p-p^2)\right]^{n-k}.$$

Et donc :

$$\boxed{Z=X+Y \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } 2p-p^2.}$$

Exercice 2

1) Remarquons que N est entier et Np aussi car c'est le nombre de boules blanches.

La variable X représente le nombre de boules blanches obtenues à l'issue d'un tirage donné, donc :

$$X(\Omega)=[\![0,Np]\!].$$

Les tirages possibles sont équiprobables, donc pour tout $k \in [\![0, Np]\!]$:

$$P(X=k) = \frac{\text{Nombre de tirages contenant } k \text{ boules blanches}}{\text{Nombre total de tirages possibles}}.$$

Enfin, on choisit sans remise de n boules distinctes parmi les N de l'urne, donc le modèle est celui des combinaisons. Il y a $\binom{N}{n}$ tirages possibles et pour obtenir exactement k boules blanches (donc $n-k$ boules noires), il faut choisir ces k boules blanches parmi les Np dans l'urne $\binom{Np}{k}$ possibilités et pour chacune de ces possibilités, il y a $\binom{N(1-p)}{n-k}$ possibilités de choisir les $n-k$ boules noires parmi les $N-Np = N(1-p)$ de l'urne. Il y a donc $\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}$ tirages contenant k boules blanches et ainsi, pour tout $k \in [\![0, Np]\!]$:

$$\boxed{P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

On a $a! \underset{a\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^a$, donc pour tout entier b fixé :

$$\binom{a}{b} = \frac{a!}{b!(a-b)!} \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^a}{b!\sqrt{2\pi(a-b)}\left(\frac{a-b}{e}\right)^{a-b}}.$$

Et :

$$\frac{\sqrt{2\pi a}\left(\frac{a}{e}\right)^a}{b!\sqrt{2\pi(a-b)}\left(\frac{a-b}{e}\right)^{a-b}} = \frac{e^{-b}}{b!}\sqrt{\frac{a}{a-b}}e^{-a\ln\left(1-\frac{b}{a}\right)}(a-b)^b \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{a^b}{b!}$$

Donc, à b fixé, $\binom{a}{b} \underset{a\to+\infty}{\sim} \frac{a^b}{b!}$ et, à n, p et k fixés :

$$P(X=k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{N(1-p)}{n-k}}{\binom{N}{n}} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{(Np)^k}{k!}\,\frac{N^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{N^n}{n!}} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Ainsi :

$$\lim_{N\to+\infty} P(X=k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Lorsque } N \text{ tend vers l'infini, la loi hypergéométrique tend vers la loi binomiale } \mathscr{B}(n,p).}$$

2) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$ et $S = X+Y$.

On a $S(\Omega)=[\![2,2n]\!]$ et, avec la loi des probabilités totales, on a pour tout $k\in[\![2,2n]\!]$:

$$P(S=k)=\sum_{\substack{i+j=k\\1\le i,j\le n}} P(X=i,Y=j).$$

Comme X et Y sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$, on a, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)=\frac{1}{n}\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}.$$

Donc :

$$P(S=k)=\sum_{\substack{i+j=k\\1\le i,j\le n}}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^2}\mathrm{Card}\left\{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ i+j=k\right\}=\frac{1}{n^2}\mathrm{Card}\left\{(i,k-i)\in[\![1,n]\!]^2\right\}$$
$$=\frac{1}{n^2}\mathrm{Card}\left\{i\in[\![1,n]\!],1\le k-i\le n\right\}=\frac{1}{n^2}\mathrm{Card}\left\{i\in[\![1,n]\!],k-n\le i\le k-1\right\}$$
$$=\frac{1}{n^2}\mathrm{Card}[\![\max(1,k-n),\min(k-1,n)]\!]=\frac{\min(k-1,n)-\max(1,k-n)+1}{n^2}$$

Or :

$$k-1\le n \quad\Leftrightarrow\quad k-n\le 1.$$

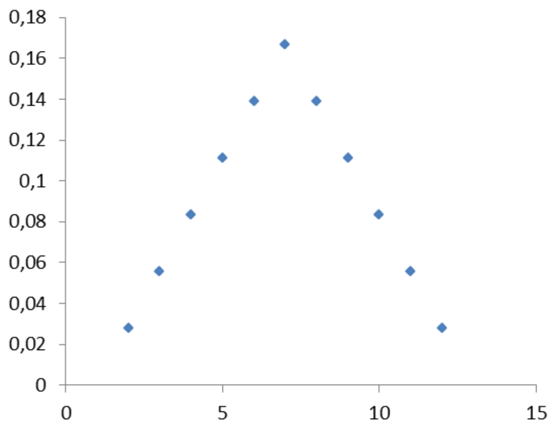
Donc :

$$\min(k-1,n)=k-1 \quad\Leftrightarrow\quad \max(1,k-n)=1.$$

Et ainsi, on a :

$$\boxed{P(S=k)=\begin{cases}\dfrac{k-1}{n^2} & \text{quand } 2\le k\le n+1\\[2mm] \dfrac{2n+1-k}{n^2} & \text{quand } n+1\le k\le 2n\end{cases}}$$

Si on représente cette loi pour $n=6$ (ce qui correspond à l'expérience : lancer de deux dés standards et non pipés, S est la somme des deux chiffres obtenus), on obtient :



Ceci illustre bien l'aspect « *triangulaire* » de la loi. Numériquement, ceci correspond à pour tout $k\in[\![2,2n]\!]$:

$$P(S=2n+2-k)=P(S=k).$$

Exercice 3

L'expression de la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant une loi uniforme sur $[\![2,2n]\!]$ est :

$$G_X(t)=\sum_{k=2}^{2n}P(X=k)t^k=\sum_{k=2}^{2n}\frac{1}{2n-2+1}t^k .$$

Soit :

$$\boxed{G_X(t)=\frac{1}{2n-1}\sum_{k=2}^{2n}t^k}$$

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $[\![1,n]\!]$. On a alors :

$$G_{X_1+X_2}=G_{X_1}G_{X_2}$$

Comme X_1 et X_2 suivent la même loi de probabilité, on a $G_{X_1}=G_{X_2}$, donc pour tout $t\in\mathbb{R}$:

$$G_{X_1+X_2}(t)=\left(G_{X_1}(t)\right)^2=\left(\sum_{k=1}^{n}P(X_1=k)t^k\right)^2 .$$

Ceci permet de conclure que toutes les racines de $G_{X_1+X_2}$ sont au moins doubles.

Or, si X_1+X_2 suit une loi uniforme sur $[\![2,2n]\!]$, on a $G_{X_1+X_2}(t)=\dfrac{1}{2n-1}\displaystyle\sum_{k=2}^{2n}t^k$, donc :

$$G_{X_1+X_2}(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=2}^{2n}t^k=0 \quad\Leftrightarrow\quad t^2(t-1)\sum_{k=0}^{2n-2}t^k=0 \text{ avec } t\neq 1 \quad\Leftrightarrow\quad t^2(t^{2n-1}-1)=0 \text{ avec } t\neq 1 .$$

Comme $n\geq 2$, on a $2n-1\geq 3$, donc $X^{2n-1}-1$ admet au moins une racine et toutes ses racines sont simples (ce sont les racines $(2n-1)^{\text{ièmes}}$ de l'unité). Ainsi, toutes les racines de $G_{X_1+X_2}$, hormis 0, sont simples. D'après ce qui précède, ceci est absurde et ainsi :

$$\boxed{X_1+X_2 \text{ ne peut suivre une loi uniforme sur } [\![2,2n]\!].}$$

Exercice 4

1) a. On a $N(\Omega)=\mathbb{N}$ et $0\leq X\leq N$, donc :

$$\boxed{X(\Omega)=\mathbb{N}}$$

b. Comme il choisit au hasard son entrée, chaque visiteur à 1 chance sur 4 de choisir l'entrée n° 1 (épreuve de Bernoulli, probabilité de succès = 1/4). Les k visiteurs se présentent successivement et leur choix est indépendant de celui des autres. Nous sommes en présence d'un schéma de Bernoulli et donc :

$$\boxed{\text{Quand } N=k\text{, le nombre } X \text{ de visiteurs qui entrent par l'entrée 1 suit une loi binomiale de paramètres } k \text{ et } \frac{1}{4}.}$$

c. On a $(X=n)=\displaystyle\bigcup_{k=n}^{+\infty}(N=k,X=n)$ et pour $k\neq k'$, $(N=k,X=n)\bigcap(N=k',X=n)=\varnothing$, donc la famille $\left((N=k,X=n)\right)_{n\geq k}$ forme une partition de l'évènement $(X=n)$.

La loi des probabilités totales donne alors $P(X=n)=\sum_{k=n}^{+\infty} P(N=k, X=n)$, soit :

$$\boxed{P(X=n)=\sum_{k=n}^{+\infty} P(N=k)P_{(N=k)}(X=n)}$$

Comme N suit une loi de Poisson de paramètre λ, on a $P(N=k)=e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$. Or, d'après la question b, sachant $N=k$, X suit une loi binomiale de paramètres k et $\dfrac{1}{4}$, soit $P_{(N=k)}(X=n)=\binom{k}{n}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n\left(\dfrac{3}{4}\right)^{k-n}$, on a :

$$P(X=n)=\sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\binom{k}{n}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} = \sum_{k=n}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\frac{k!}{n!(k-n)!}\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n}$$

$$= e^{-\lambda}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{4}\right)^n \lambda^n \sum_{k=n}^{+\infty}\lambda^{k-n}\frac{1}{(k-n)!}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-n} = e^{-\lambda}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{3\lambda}{4}\right)^k = e^{-\lambda}\frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{4}\right)^n e^{\frac{3\lambda}{4}}$$

Ainsi, $P(X=n)=e^{-\frac{\lambda}{4}}\dfrac{(\lambda/4)^n}{n!}$, donc :

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \frac{\lambda}{4}.}$$

2) a. Comme le joueur réussit de façon certaine le premier lancer ($P(S_1)=1$) mais peut ratier le deuxième, Z vaut au minimum 1 et peut valoir n'importe quel entier supérieur ou égal à 1 (pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'évènement $(Z=n)$ est l'évènement : « les n premiers lancers sont réussis et le $(n+1)^{\text{ième}}$ est raté »). Ainsi :

$$\boxed{Z(\Omega)=\mathbb{N}^*}$$

b. On vient de voir que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'évènement $(Z=n)$ est l'évènement : « les lancers 1 et 2 et … et n sont réussis et le $(n+1)^{\text{ième}}$ est raté », donc :

$$\boxed{(Z=n)=S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_n\cap\overline{S}_{n+1}}$$

On a alors :

$$P(Z=n)=P\left(S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_n\cap\overline{S}_{n+1}\right)=P\left(S_1\right)P_{S_1}\left(S_2\right)P_{S_1\cap S_2}\left(S_3\right)\ldots P_{S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_{n-1}}\left(S_n\right)P_{S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_n}\left(\overline{S}_{n+1}\right).$$

Par hypothèse, $P\left(S_1\right)=1$ et pour tout $i\geq 2$, $P_{S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_{i-1}}\left(S_i\right)=\dfrac{1}{i}$, donc $P_{S_1\cap S_2\cap\ldots\cap S_{i-1}}\left(\overline{S}_i\right)=1-\dfrac{1}{i}=\dfrac{i-1}{i}$. Alors :

$$P(Z=n)=1\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\ldots\times\frac{1}{n}\times\frac{n}{n+1}.$$

Soit :

$$\boxed{P(Z=n)=\frac{n}{(n+1)!}}$$

c. On a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(Z=n)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right)=\frac{1}{1!}\quad \text{(par télescopage).}$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\sum_{n\in\mathbb{N}^*} P(Z=n)=1}$$

Exercice 5

1) On a pour tout $m\in\mathbb{N}^*$:

$$P(X\geq m)=\sum_{k=m}^{+\infty}P(X=k)=\sum_{k=m}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p=(1-p)^{m-1}p\sum_{k=m}^{+\infty}(1-p)^{k-m}$$
$$=(1-p)^{m-1}p\sum_{k=0}^{+\infty}(1-p)^{k}=(1-p)^{m-1}p\frac{1}{1-(1-p)}$$

Soit :

$$\boxed{P(X\geq m)=(1-p)^{m-1}}$$

2) On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$, donc si $Z=\min(X,Y)$, on a aussi $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
P\big(Z=k\big)&=P\big(\min(X,Y)=k\big)=P\big(X=k,Y\geq k\big)+P\big(X\geq k+1,Y=k\big)\\
&=\sum_{i=k}^{+\infty}P\big(X=k,Y=i\big)+\sum_{i=k+1}^{+\infty}P\big(X=i,Y=k\big)\\
&=\sum_{i=k}^{+\infty}P\big(X=k\big)P\big(Y=i\big)+\sum_{i=k+1}^{+\infty}P\big(X=i\big)P\big(Y=k\big)\\
&=\sum_{i=k}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p(1-p)^{i-1}p+\sum_{i=k+1}^{+\infty}(1-p)^{i-1}p(1-p)^{k-1}p\\
&=(1-p)^{2(k-1)}p^2+2(1-p)^{k-1}p^2\sum_{i=k+1}^{+\infty}(1-p)^{i-1}\\
&=(1-p)^{2(k-1)}p^2+2(1-p)^{k-1}p^2(1-p)^k\sum_{i=0}^{+\infty}(1-p)^{i}\\
&=(1-p)^{2(k-1)}p^2+2(1-p)^{2(k-1)}p^2(1-p)\frac{1}{1-(1-p)}\\
&=(1-p)^{2(k-1)}p^2+2(1-p)^{2(k-1)}p(1-p)\\
&=(2-p)(1-p)^{2(k-1)}p
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{P\big(Z=k\big)=(2-p)p(1-p)^{2(k-1)}}$$

On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=\mathbb{N}^*$, donc si $W=X-Y$, on a aussi $W(\Omega)=\mathbb{Z}$.

Pour tout $k\in\mathbb{Z}$:

$$P\big(W=k\big)=P\big(X-Y=k\big)=P\big(X=Y+k\big)=\sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty}P\big(X=i+k,Y=i\big)$$

$$=\sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty}P\big(X=i+k\big)P\big(Y=i\big)=\sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty}(1-p)^{i+k-1}p(1-p)^{i-1}p$$

$$=p^2(1-p)^{k-2}\sum_{i=\max(1-k,1)}^{+\infty}\left[(1-p)^2\right]^i=p^2(1-p)^{k-2}\left[(1-p)^2\right]^{\max(1-k,1)}\frac{1}{1-(1-p)^2}$$

$$=\frac{p(1-p)^{k-2+2\max(1-k,1)}}{2-p}$$

Et :

- si $k\geq 0$, $k-2+2\max(1-k,1)=k-2+2=k$;
- si $k<0$, $k-2+2\max(1-k,1)=-k$.

Soit, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, $k-2+2\max(1-k,1)=|k|$ et :

$$\boxed{P\big(W=k\big)=\frac{p(1-p)^{|k|}}{2-p}}$$

3) Soit $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}$. On a :

$$P\big(Z=i,W=j\big)=P\big(\min(X,Y)=i,X-Y=j\big)=P\big(\min(Y+j,Y)=i,X=Y+j\big)$$

Si $j\geq 0$, $\min(Y+j,Y)=Y$, donc :

$$P\big(Z=i,W=j\big)=P\big(Y=i,X=i+j\big)=p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{i+j-1}=p^2(1-p)^{2i+j-2}$$

Si $j<0$, $\min(Y+j,Y)=Y+j$, donc :

$$P\big(Z=i,W=j\big)=P\big(Y+j=i,X=Y+j\big)=P\big(Y=i-j,X=i\big)=p(1-p)^{i-j-1}p(1-p)^{i-1}=p^2(1-p)^{2i-j-2}$$

Donc :

$$P\big(Z=i,W=j\big)=p^2(1-p)^{2i+|j|-2}=p^2(1-p)^{2(i-1)+|j|}.$$

Or :

$$P\big(Z=i\big)P\big(W=j\big)=(2-p)p(1-p)^{2(i-1)}\frac{p(1-p)^{|j|}}{2-p}=p^2(1-p)^{2(i-1)+|j|}.$$

Ainsi, pour tout $(i,j)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{Z}$, on a $P\big(Z=i,W=j\big)=P\big(Z=i\big)P\big(W=j\big)$, donc :

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires } W \text{ et } Z \text{ sont indépendantes.}}$$

Exercice 6

1) Remarquons déjà que quel que soit $n\in\mathbb{N}$, on a $x^ne^{-x}\underset{+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$, donc $\int_a^{+\infty}x^ne^{-x}dx$ converge , pour tout réel a. Ainsi, $u_n=\int_\lambda^{+\infty}x^ne^{-x}dx$ est bien défini. De plus, on a déjà vu que $\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}dx=n!$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$P(X\le n)=\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Or, la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n appliquée à la fonction exponentielle (qui est C^∞ sur $\mathbb{R}$) entre 0 et λ donne :

$$e^\lambda=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}+\int_0^\lambda\frac{(\lambda-t)^n}{n!}e^t\,dt.$$

Et en posant $x=\lambda-t$ dans l'intégrale, on obtient :

$$\begin{aligned}e^\lambda&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}+\int_0^\lambda\frac{x^n}{n!}e^{\lambda-x}\,dx=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}+\frac{1}{n!}e^\lambda\int_0^\lambda x^ne^{-x}\,dx\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}+\frac{1}{n!}e^\lambda\left(\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\,dx-\int_\lambda^{+\infty}x^ne^{-x}\,dx\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}+\frac{1}{n!}e^\lambda\left(n!-u_n\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}+e^\lambda\left(1-\frac{1}{n!}u_n\right).\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda^k}{k!}=e^\lambda\frac{1}{n!}u_n$ et ainsi :

$$\boxed{P(X\le n)=\frac{1}{n!}u_n}$$

2) Si pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $A_n=(X\le n)$, on a $A_n\subset A_{n+1}$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n=\Omega$. Par continuité croissante, on a alors :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}u_n=\lim_{n\to+\infty}P(X\le n)=\lim_{n\to+\infty}P(A_n)=P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=P(\Omega)=1.$$

Donc :

$$\boxed{u_n\underset{n\to+\infty}{\sim}n!}$$

3) Comme X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$, on a $G_X(t)=e^{\lambda(t-1)}$, donc :

$$\boxed{G_X(1)=1\ \text{ et }\ G_X(-1)=e^{-2\lambda}.}$$

4) Si B est l'évènement « X prend une valeur paire », on a :

$$P(B)=\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{+\infty}P(X=k).$$

Or, pour tout réel t, $G_X(t)=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)t^k$, donc :

$$G_X(1)+G_X(-1)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)+\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)(-1)^k=\sum_{k=0}^{+\infty}P(X=k)\left[1+(-1)^k\right]=2\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{+\infty}P(X=k).$$

Ainsi :

$$P(B)=\frac{G_X(1)+G_X(-1)}{2}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La probabilité que } X \text{ prenne une valeur paire est } \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}.}$$

5) Si B' est l'évènement « X prend une valeur divisible par 4 », on a :

$$P(B') = \sum_{\substack{k=0 \\ 4|k}}^{+\infty} P(X=k).$$

Et :

$$\begin{aligned} G_X(1)+G_X(-1)+G_X(i)+G_X(-i) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k) + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)(-1)^k + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\, i^k + \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)(-i)^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)\left[1+(-1)^k+i^k+(-i)^k\right] = 4\sum_{\substack{k=0 \\ 4|k}}^{+\infty} P(X=k) \end{aligned}$$

Donc :

$$P(B') = \frac{G_X(1)+G_X(-1)+G_X(i)+G_X(-i)}{4} = \frac{1+e^{-2\lambda}+e^{\lambda(i-1)}+e^{\lambda(-i-1)}}{4} = \frac{1+e^{-2\lambda}+e^{-\lambda}(e^{\lambda i}+e^{-\lambda i})}{4}.$$

Et finalement :

$$\boxed{\text{La probabilité que } X \text{ prenne une valeur divisible par 4 est } \frac{1+e^{-2\lambda}+2e^{-\lambda}\cos\lambda}{4}.}$$

6) Appelons C l'évènement « XY est un entier pair ».

Comme $X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $Y(\Omega)=\{1;2\}$, XY est toujours entier et :

C = « X est pair » ou « Y est pair » = B ou $(Y=2)$ = $B \cup (Y=2)$.

On a donc :

$$P(C) = P\big(B\cup(Y=2)\big) = P(B)+P(Y=2)-P\big(B\cap(Y=2)\big).$$

Et comme X et Y sont indépendantes, on a $P\big(B\cap(Y=2)\big)=P(B)P(Y=2)$. Ainsi :

$$P(C) = P(B)+P(Y=2)-P(B)P(Y=2) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\,\frac{1}{2} = \frac{3+e^{-2\lambda}}{4}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La probabilité pour que } XY \text{ soit un entier pair est } \frac{3+e^{-2\lambda}}{4}.}$$

Exercice 7

Soient $a,b\in\mathbb{N}^*$.

L'équation caractéristique associée à (E) : $y''+(a-1)y'+by=0$ est $r^2+(a-1)r+b=0$, de discriminant $\Delta=(a-1)^2-4b$. La forme des solutions de (E) dépend du signe de Δ, mais dans tous les cas, l'ensemble des solutions est un plan vectoriel $\mathrm{Vect}(f_1,f_2)$ où f_1 et f_2 sont deux solutions de (E) non proportionnelles.

Remarquons que comme $a,b\in\mathbb{N}^*$, on a $a-1\geq 0$, $b>0$ et $\Delta=(a-1)^2-4b<(a-1)^2$.

- Si $a-1>2\sqrt{b}>0$, soit $\Delta>0$, on a $f_1:t\mapsto e^{-\frac{a-1-\sqrt{\Delta}}{2}t}$ et $f_2:t\mapsto e^{-\frac{a-1+\sqrt{\Delta}}{2}t}$.

  Comme $0<\sqrt{\Delta}<a-1$, on a $a-1+\sqrt{\Delta}>a-1-\sqrt{\Delta}>0$, donc $\lim\limits_{+\infty}f_1=\lim\limits_{+\infty}f_2=0$.

- Si $a-1=2\sqrt{b}>0$, soit $\Delta=0$, on a $f_1:t\mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t}$ et $f_2:t\mapsto t\,e^{-\frac{a-1}{2}t}$.

  Comme $a-1>0$, on a $\lim\limits_{+\infty}f_1=\lim\limits_{+\infty}f_2=0$.

- Si $a-1<2\sqrt{b}$, soit $\Delta<0$, $f_1:t\mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t}\cos\left(\sqrt{|\Delta|}\,t\right)$ et $f_2:t\mapsto e^{-\frac{a-1}{2}t}\sin\left(\sqrt{|\Delta|}\,t\right)$.
  - Si $a>1$, on a $\lim\limits_{+\infty}f_1=\lim\limits_{+\infty}f_2=0$.
  - Si $a=1$, alors $f_1:t\mapsto\cos\left(2\sqrt{b}\,t\right)$ et $f_2:t\mapsto\sin\left(2\sqrt{b}\,t\right)$, qui n'ont pas de limite en $+\infty$.

Finalement :

$$\lim_{+\infty}f_1=\lim_{+\infty}f_2=0\quad\Leftrightarrow\quad a\neq 1.$$

Or, toutes les solutions de (E) tendent vers 0 en $+\infty$ si et seulement c'est le cas pour f_1 et f_2, donc :

Toutes les solutions de l'équation (E) tendent vers 0 en $+\infty$ $\Leftrightarrow$ $a\neq 1$

Ainsi, la probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y''+(A-1)y'+By=0$ tendent vers 0 en $+\infty$ est la probabilité que $A\neq 1$, soit $P(A\neq 1)=P(A>1)=1-P(A=1)$.

Si p est le paramètre de la loi géométrique suivie par A, on a $P(A=1)=p$, donc :

La probabilité pour que toutes les solutions de l'équation $y''+(A-1)y'+By=0$ tendent vers 0 en $+\infty$ est $1-p$ où est le paramètre de la loi géométrique suivie par A.

Exercice 8

1) On a $X^+:\Omega\to\mathbb{Z}$; $\omega\mapsto\max\left(X(\omega),0\right)$ et $X^-:\Omega\to\mathbb{Z}$; $\omega\mapsto\min\left(X(\omega),0\right)$.

X^+ et X^- sont donc des applications définies sur Ω, avec $X^+(\Omega)=\mathbb{N}$ et $X^-(\Omega)=\{-n,n\in\mathbb{N}\}$.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, on a $X^{-1}\left(\{n\}\right)\in\mathcal{A}$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$:

- $(X^+)^{-1}\left(\{n\}\right)=X^{-1}\left(\{n\}\right)\in\mathcal{A}$;
- $(X^-)^{-1}\left(\{-n\}\right)=X^{-1}\left(\{-n\}\right)\in\mathcal{A}$.

Ainsi :

X^+ et X^- sont bien des variables aléatoires.

2) Pour tout $\omega\in\Omega$, $X^+(\omega)=\max\left(X(\omega),0\right)$ et $X^-(\omega)=\min\left(X(\omega),0\right)$, et :

- si $X(\omega)\geq 0$, $X^+(\omega)=X(\omega)$ et $X^-(\omega)=0$;

- si $X(\omega)\leq 0$, $X^+(\omega)=0$ et $X^-(\omega)=X(\omega)$.

Soient $n,m\in\mathbb{N}$. Pour tout $\omega\in\Omega$, on a :

$$\omega\in\left(X^+=n\right)\cap\left(X^-=-m\right)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}X^+(\omega)=\max\left(X(\omega),0\right)=n\\X^-(\omega)=\min\left(X(\omega),0\right)=-m\end{cases}$$

Ceci est impossible si *n* et *m* sont tous les deux non nuls, d'où :

- si $n,m\in\mathbb{N}^*$, $P\left(X^+=n,X^-=-m\right)=0$;
- si $n\in\mathbb{N}$, $P\left(X^+=n,X^-=0\right)=P\left(X=n\right)$;
- si $m\in\mathbb{N}$, $P\left(X^+=0,X^-=-m\right)=P\left(X=-m\right)$.

Comme X n'est ni positive presque sûrement, ni négative presque sûrement, il existe $n,m\in\mathbb{N}^*$ tels que $P\left(X=n\right)\neq 0$ et $P\left(X=-m\right)\neq 0$, donc $0<P\left(X\geq 0\right)<1$. On a alors :

$$P\left(X^+=n,X^-=0\right)=P\left(X=n\right)$$
$$P\left(X^+=n\right)P\left(X^-=0\right)=P\left(X=n\right)P\left(X\geq 0\right)$$

Or, $P\left(X=n\right)\neq P\left(X=n\right)P\left(X\geq 0\right)$ (sinon $P\left(X\geq 0\right)=1$ car $P\left(X=n\right)\neq 0$).

Donc, $P\left(X^+=n,X^-=0\right)\neq P\left(X^+=n\right)P\left(X^-=0\right)$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Les variables } X^+ \text{ et } X^- \text{ ne sont pas indépendantes.}}$$

Exercice 9

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Poisson de paramètre λ_n, donc $P(X_n=0)=e^{-\lambda_n}\dfrac{\lambda_n^0}{0!}=e^{-\lambda_n}$ et :

$$P(X_n\neq 0)=1-P(X_n=0)=1-e^{-\lambda_n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\lambda_n\,.$$

Or, $\sum\lambda_n$ est une série convergente à termes positifs, donc par comparaison :

$$\boxed{\text{La série } \sum P(X_n\neq 0) \text{ converge.}}$$

2) Posons $A_n=\bigcup_{k\geq n}\left(X_k\neq 0\right)$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $A_n=\left(X_n\neq 0\right)\cup A_{n+1}$, donc $A_{n+1}\subset A_n$ et par continuité décroissante, on a :

$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\bigcup_{k\geq n}\left(X_k\neq 0\right)\right)=P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}A_n\right)=\lim_{n\to+\infty}P(A_n)\,.$$

Or, la série $\sum P(X_n\neq 0)$ converge, donc par sous-additivité :

$$0\leq P(A_n)=P\left(\bigcup_{k\geq n}\left(X_k\neq 0\right)\right)\leq\sum_{k=n}^{+\infty}P\left(X_k\neq 0\right).$$

Comme la série $\sum P(X_n \neq 0)$ converge, son reste $\sum_{k=n}^{+\infty} P\left(X_k \neq 0\right)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini et, par le théorème des gendarmes, on obtient $\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = 0$ et finalement, on a bien :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geq n} (X_k \neq 0)\right) = 0}$$

3) Comme les variables X_n suivent des lois de Poisson, elles sont toutes à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $\left(X_n(\omega)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc une suite d'entiers naturels.

Pour que la série $\sum X_n(\omega)$ converge, il faut au moins que la suite $\left(X_n(\omega)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit de limite nulle. Or, toute suite d'entiers de limite nulle est nulle à partir d'un certain rang (car $|X_n(\omega)| \leq \frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang). Ainsi, pour que la série $\sum X_n(\omega)$ converge, il faut que la suite $\left(X_n(\omega)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit nulle à partir d'un certain rang. Réciproquement, si tel est le cas, la série converge (la suite des sommes partielles est stationnaire).
Ainsi :

La série $\sum X_n(\omega)$ converge si et seulement si $\left(X_n(\omega)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Ainsi, on cherche la probabilité qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(X_k = 0\right)$ pour tout $k \geq n$, autrement dit, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que l'évènement $\bigcap_{k\geq n} \left(X_k = 0\right)$ se réalise. On cherche donc la probabilité de $\bigcap_{k\geq 1} \left(X_k = 0\right)$ *ou* $\bigcap_{k\geq 2} \left(X_k = 0\right)$ *ou* … *ou* $\bigcap_{k\geq n} \left(X_k = 0\right)$ *ou* …, autrement dit $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geq n} \left(X_k = 0\right)\right)$. Or :

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geq n} \left(X_k = 0\right)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \overline{\bigcap_{k\geq n} \left(X_k = 0\right)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geq n} \overline{\left(X_k = 0\right)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geq n} \left(X_k \neq 0\right).$$

Ainsi :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geq n} \left(X_k = 0\right)\right) = 1 - P\left(\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{k\geq n} \left(X_k = 0\right)}\right) = 1 - P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{k\geq n} \left(X_k \neq 0\right)\right) = 1.$$

Finalement, la probabilité que la série $\sum X_n$ converge est 1, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum X_n \text{ est presque sûrement convergente.}}$$

4) Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(Y = n)$ et $q_n = P(Z = n)$. On a pour tout $t \in [0,1]$:

$$G_Y(t) - G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} P(Z = n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n t^n - \sum_{n=0}^{+\infty} q_n t^n.$$

Soit :

$$\underline{G_Y(t) - G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (p_n - q_n)t^n.}$$

Par ailleurs, Y et Z sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc :

$$P(Y = Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n, Z = n).$$

Et :

$$P(Y \neq Z) = P(\overline{Y = Z}) = 1 - P(Y = Z) = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n, Z = n) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n - \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n, Z = n) \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q_n - \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n, Z = n) \end{cases}$$

Soit :

$$\underline{P(Y \neq Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[p_n - P(Y = n, Z = n) \right] = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[q_n - P(Y = n, Z = n) \right].}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(Y = n, Z = n) \subset (Z = n)$ et $(Y = n, Z = n) \subset (Y = n)$, on a :

- $P(Y = n, Z = n) \leq p_n$, donc $-\left[q_n - P(Y = n, Z = n) \right] \leq p_n - q_n$;
- $P(Y = n, Z = n) \leq q_n$., donc $p_n - q_n \leq p_n - P(Y = n, Z = n)$.

Alors, pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\left[q_n - P(Y = n, Z = n) \right] t^n \leq (p_n - q_n) t^n \leq \left[p_n - P(Y = n, Z = n) \right] t^n.$$

Or, $q_n - P(Y = n, Z = n) \geq 0$, $p_n - P(Y = n, Z = n) \geq 0$ et $0 \leq t^n \leq 1$, donc :

$$\left[p_n - P(Y = n, Z = n) \right] t^n \leq p_n - P(Y = n, Z = n)$$
$$-\left[q_n - P(Y = n, Z = n) \right] \leq -\left[q_n - P(Y = n, Z = n) \right] t^n$$

D'où, pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$-\left[q_n - P(Y = n, Z = n) \right] \leq (p_n - q_n) t^n \leq p_n - P(Y = n, Z = n).$$

Et en sommant sur *n*, on obtient pour tout $t \in [0,1]$:

$$-P(Y \neq Z) \leq G_Y(t) - G_X(t) \leq P(Y \neq Z).$$

Et ainsi, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\boxed{\left| G_Y(t) - G_X(t) \right| \leq P(Y \neq Z)}$$

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

On peut alors appliquer le résultat précédent à S_n et X, ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$:

$$\left| G_{S_n}(t) - G_X(t) \right| \leq P(S_n \neq X) \qquad \textbf{(1)}$$

L'évènement $(S_n \neq X)$ se récrit $\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \neq \sum_{k=1}^{+\infty} X_k \right) = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} X_k \neq 0 \right)$.

Or, comme les X_k sont à valeurs dans $\mathbb{N}$, on a, pour $\omega \in \Omega$, $\sum_{k=n+1}^{+\infty} X_k(\omega) \neq 0$ si et seulement si l'un des $X_k(\omega)$ ne s'annule pas, donc $(S_n \neq X) = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} X_k \neq 0 \right) = \bigcup_{k \geq n+1} (X_k \neq 0)$.

Or, on a vu plus haut que $\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\geq n}(X_k \neq 0)\right)=0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} P(S_n \neq X) = 0\,.$$

Avec **(1)**, le théorème des gendarmes permet alors de conclure que pour tout $t\in[0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} G_{S_n}(t) = G_X(t)\,.$$

Or, les variables $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes et suivent des lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ donc $S_n = X_1+\dots+X_n$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_1+\dots+\lambda_n$.

Alors, $G_{S_n} : t\mapsto e^{(\lambda_1+\dots+\lambda_n)(t-1)}$ et, avec $\lambda=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n$, on a pour tout $t\in[0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} G_{S_n}(t) = e^{\lambda(t-1)}\,.$$

Ainsi, pour tout $t\in[0,1]$, $G_X(t)=e^{\lambda(t-1)}$, donc la série génératrice de X est celle de la loi de Poisson de paramètre λ, donc :

$$\boxed{X=\sum_{n=1}^{+\infty}X_n \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } \lambda=\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda_n\,.}$$

Exercice 10

Comme les lois de variables temporelles sont géométriques, le temps est discrétisé, compté en une unité mystérieuse que nous omettrons dans ce qui suit.

1) L'évènement $(Y>k)$, c'est-à-dire A_3 attend strictement plus que k (donc $k+1$ ou plus) pour passer au guichet, se réalise si et seulement si A_1 et A_2 passent un temps strictement supérieur à k au guichet (donc $k+1$ ou plus), c'est-à-dire $(X_1>k)$ et $(X_2>k)$, ou encore $(X_1\geq k+1)$ et $(X_2\geq k+1)$. Ainsi :

$$P(Y>k)=P\big((X_1\geq k+1)\cap(X_2\geq k+1)\big)\,.$$

Or, les temps d'attente passé au guichet par les trois individus (qui ne se connaissent pas) sont indépendants, donc :

$$P(Y>k)=P(X_1\geq k+1).P(X_2\geq k+1)\,.$$

Et comme X_1 et X_2 suivent la même loi géométrique de paramètre p, on a :

$$P(X_1\geq k+1)=P(X_2\geq k+1)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}P(X_1=i)=\sum_{i=k+1}^{+\infty}p(1-p)^{i-1}=p(1-p)^k\sum_{j=0}^{+\infty}(1-p)^j=p(1-p)^k\frac{1}{1-(1-p)}\,.$$

Finalement, on obtient $P(X_1\geq k+1)=P(X_2\geq k+1)=(1-p)^k$ et donc :

$$\boxed{P(Y>k)=(1-p)^{2k}}$$

Remarquons qu'en posant $P(Y>0)=1=(1-p)^0$, on a pour tout $k\in\mathbb{N}^*$:

$$P(Y=k)=P(Y\geq k)-P(Y>k)=P(Y>k-1)-P(Y>k)=(1-p)^{2k-2}-(1-p)^{2k}=(1-p)^{2k-2}\left[1-(1-p)^2\right].$$

En posant $q=1-(1-p)^2$, on a $P(Y=k)=(1-q)^{k-1}q$, donc :

$$\boxed{Y \text{ suit une loi géométrique de paramètre } q.}$$

2) On a $Z=Y+X_3$ et les variables Y et X_3 sont indépendantes : le temps passé au guichet par A_3 ne dépend pas du temps qu'il a attendu (qui ne dépend que des temps passés au guichet par A_1 et A_2).

Comme $Y(\Omega)=X_3(\Omega)=\mathbb{N}^*$, on a $Z(\Omega)=\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$ tel que $k\geq 2$:

$$P(Z=k)=\sum_{j=1}^{k-1}P(Y=j,X_3=k-j)=\sum_{j=1}^{k-1}P(Y=j)P(X_3=k-j).$$

Comme Y et X_3 suivent des lois géométriques de paramètres respectifs q et p, on obtient :

$$P(Z=k)=\sum_{j=1}^{k-1}(1-q)^{j-1}q(1-p)^{k-j-1}p=pq(1-p)^{k-2}\sum_{j=1}^{k-1}\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{j-1}\underset{i=j-1}{=}pq(1-p)^{k-2}\sum_{i=0}^{k-2}\left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{i}.$$

Or :

$$q=p \iff 1-(1-p)^2=p \iff (1-p)^2=1-p \iff p=0 \text{ ou } 1.$$

Comme $p\in\left]0,1\right[$, on a $q\neq p$, donc $\dfrac{1-q}{1-p}\neq 1$ et :

$$P(Z=k)=pq(1-p)^{k-2}\frac{1-\left(\dfrac{1-q}{1-p}\right)^{k-1}}{1-\dfrac{1-q}{1-p}}=pq\frac{(1-p)^{k-1}-(1-q)^{k-1}}{q-p}.$$

Ainsi :

$$\boxed{Z(\Omega)=\mathbb{N}^*\setminus\{1\} \text{ et pour tout } k\in Z(\Omega),\ P(Z=k)=pq\frac{(1-p)^{k-1}-(1-q)^{k-1}}{q-p}.}$$

3) Le temps moyen passé par A_3 à la poste est $E(Z)=E(Y)+E(X_3)$.

Comme Y et X_3 suivent des lois géométriques de paramètres respectifs q et p, on obtient :

$$E(Z)=\frac{1}{q}+\frac{1}{p}.$$

Donc :

$$\boxed{\text{Le temps moyen passé par } A_3 \text{ à la poste est } \frac{1}{1-(1-p)^2}+\frac{1}{p}.}$$