

## Corrigés des TD du chapitre 15

### Exercice 1

1) L'application  $\varphi: (P, Q) \mapsto (P | Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$  est bien définie sur  $(\mathbb{R}_n[X])^2$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Elle est clairement symétrique (commutativité du produit dans  $\mathbb{R}$ ) et bilinéaire (distributivité du produit sur l'addition dans  $\mathbb{R}$ ).

De plus, pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on pose  $(P | P) = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \geq 0$ , donc  $\varphi$  est positive et donc,  $\varphi$  est produit scalaire si et seulement si  $\varphi$  est définie. Or, on a :

$$(P | P) = \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = 0 \iff P(a_0) = P(a_1) = \dots = P(a_n) = 0.$$

Donc,  $a_0, a_1, \dots, a_n$  sont racines de  $P$ . Si les  $a_k$  sont distincts deux à deux, alors  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  possède  $n+1$  racines distincts, donc  $P$  est nul. Dans ce cas,  $\varphi$  est définie.

Par contre, si les  $a_k$  ne sont pas distincts deux à deux, quitte à renuméroter, on peut supposer que  $a_0 = a_1$ ,

et dans ce cas, avec  $P = \prod_{k=1}^n (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $(P | P) = 0$  avec  $P \neq 0$ , donc  $\varphi$  n'est pas définie.

Finalement,  $\varphi$  est définie si et seulement si les  $a_k$  sont distincts deux à deux, et donc :

$$(P, Q) \mapsto (P | Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k) \text{ est produit scalaire si et seulement si les } a_k \text{ sont distincts deux à deux.}$$

2) Remarquons que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$  et tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $L_i(a_k) = \delta_{i,k}$  (le symbole de Kronecker).

On a pour tous  $i, j \in \llbracket 0, n \rrbracket$  :

$$(L_i | L_j) = \sum_{k=0}^n L_i(a_k)L_j(a_k) = \sum_{k=0}^n \delta_{i,k}\delta_{j,k} = \delta_{i,j}.$$

Donc, la famille  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  est orthonormée et comme elle contient  $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$  polynômes :

La famille  $(L_0, L_1, \dots, L_n)$  est une base orthonormée de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

3) Remarquons déjà que pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ ,  $\sum_{k=0}^n P(a_k)^2 = \|P\|^2$  (où  $\|\cdot\|$  est la norme associée au produit scalaire utilisé ici), donc  $\inf_{P \in F} \left( \sum_{k=0}^n P(a_k)^2 \right) = \inf_{P \in F} (\|P\|^2)$ .

Par ailleurs, si on pose  $L = L_0 + L_1 + \dots + L_n$ , on a pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$  :

$$\sum_{k=0}^n P(a_k) = \sum_{k=0}^n L(a_k)P(a_k) = (L | P).$$

Donc,  $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid (L \mid P) = 1\}$ . Mais,  $(L \mid L) = n+1$ , soit  $\left(L \mid \frac{1}{n+1}L\right) = 1$  (donc  $\frac{1}{n+1}L \in F$ ) et :

$$F = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid (L \mid P) = \left(L \mid \frac{1}{n+1}L\right)\right\} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \left(L \mid P - \frac{1}{n+1}L\right) = 0\right\} = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid L \perp P - \frac{1}{n+1}L\right\}$$

Alors, pour tout  $P \in F$ , on a  $L \perp P - \frac{1}{n+1}L$ , donc  $\frac{1}{n+1}L \perp P - \frac{1}{n+1}L$  et, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|P\|^2 = \left\|\frac{1}{n+1}L + P - \frac{1}{n+1}L\right\|^2 = \left\|\frac{1}{n+1}L\right\|^2 + \left\|P - \frac{1}{n+1}L\right\|^2 \geq \left\|\frac{1}{n+1}L\right\|^2 = \frac{1}{n+1} \Rightarrow \inf_{P \in F} (\|P\|^2) \geq \frac{1}{n+1}.$$

Or,  $\frac{1}{n+1}L \in F$ , donc  $\inf_{P \in F} (\|P\|^2) \leq \frac{1}{n+1}$  et finalement :

$$\boxed{\inf_{P \in F} \left(\sum_{k=0}^n P(a_k)^2\right) = \inf_{P \in F} (\|P\|^2) = \min_{P \in F} (\|P\|^2) = \frac{1}{n+1}}$$

## Exercice 2

1) On a :

- $(\cdot \mid \cdot)$  est clairement symétrique et bilinéaire du fait de la linéarité de l'intégrale.
- De plus, pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $(P \mid P) = \int_{-1}^1 P^2 \varphi$ .  
Or,  $\varphi$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+^*$ , donc  $P^2 \varphi \geq 0$  sur  $[-1;1]$  et par positivité de l'intégrale, on a  $(P \mid P) \geq 0$  donc  $(\cdot \mid \cdot)$  est positive.
- On a :

$$\begin{aligned} (P \mid P) = \int_{-1}^1 P^2 \varphi = 0 &\Leftrightarrow P^2 \varphi = 0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } P^2 \varphi \text{ est continue et positive sur } [-1;1]) \\ &\Leftrightarrow P = 0 \text{ sur } [-1;1] \text{ (car } \varphi \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}_+^* \text{ donc ne s'annule pas)} \\ &\Leftrightarrow P = 0 \text{ (car } P \text{ admet une infinité de racines donc est nul)} \end{aligned}$$

Ainsi,  $(\cdot \mid \cdot)$  est définie.

Finalement :

$$\boxed{(\cdot \mid \cdot) \text{ est un produit scalaire sur } E.}$$

2) Le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt appliqué à la base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$  de  $E$  permet de construire une base orthonormée  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  telle que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_k = \frac{R_k}{\|R_k\|}$  avec  $R_0 = 1$  et pour tout  $k \geq 1$ ,  $R_k = X^k - (X^k \mid P_{k-1})P_{k-1} - \dots - (X^k \mid P_0)P_0$ .

Alors, par construction, le terme de plus haut degré de  $R_k$  est  $X^k$ , donc pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $\deg P_k = k$  et le coefficient dominant de  $P_k$  est  $\frac{1}{\|R_k\|} > 0$  et ainsi, il existe bien une base orthonormée de  $E$ , échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

Supposons maintenant que l'on ait deux telles bases :  $(P_0, P_1, \dots, P_n)$  et  $(Q_0, Q_1, \dots, Q_n)$ .

Notons pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $a_k > 0$  et  $b_k > 0$  les coefficients dominants respectifs de  $P_k$  et  $Q_k$ .

Montrons par récurrence forte que pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $Q_k = P_k$ .

- Pour  $k = 0$ ,  $P_0$  et  $Q_0$  sont tous deux degré 0, donc  $Q_0 = \lambda P_0$  avec  $b_0 = \lambda a_0$  donc  $\lambda > 0$ , et :

$$1 = (Q_0 | Q_0) = \lambda^2 (P_0 | P_0) = \lambda^2 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ (car } \lambda > 0 \text{)}.$$

Ainsi,  $Q_0 = P_0$  et la propriété est au rang 0.

- Supposons la propriété vraie jusqu'à un certain rang  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ .

Alors,  $R = \frac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{P_{k+1}}{a_{k+1}}$  est un polynôme de degré inférieur ou égal à  $k$  donc  $R = \sum_{i=0}^k \lambda_i P_i$ .

Mais alors, pour tout  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ ,  $Q_i = P_i$  et :

$$\lambda_i = (R | P_i) = \left( \frac{Q_{k+1}}{b_{k+1}} - \frac{P_{k+1}}{a_{k+1}} \mid P_i \right) = \frac{1}{b_{k+1}} (Q_{k+1} | P_i) - \frac{1}{a_{k+1}} (P_{k+1} | P_i) = \frac{1}{b_{k+1}} (Q_{k+1} | Q_i) - \frac{1}{a_{k+1}} (P_{k+1} | P_i) = 0.$$

Donc  $R = 0$ , soit  $Q_{k+1} = \lambda P_{k+1}$  avec  $\lambda = \frac{b_{k+1}}{a_{k+1}} > 0$ . On obtient  $\lambda = 1$  comme plus haut.

Ainsi,  $Q_{k+1} = P_{k+1}$  et la propriété est donc vraie au rang  $k+1$ .

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

Ainsi :

Il existe une unique base orthonormée de  $E$ , échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.

3) a. Le terme de plus haut degré de  $(X^2 - 1)^k$  est  $X^{2k}$  donc le terme de plus haut degré de  $Q_k$  est :

$$(X^{2k})^{(k)} = 2k(2k-1)\dots(k+1)X^k = \frac{(2k)!}{k!} X^k$$

Ainsi :

$Q_k$  est de degré  $k$  et de coefficient dominant  $\frac{(2k)!}{k!}$ .

b. La famille  $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est donc une famille échelonnée en degrés de  $n+1$  polynômes de  $E = \mathbb{R}_n[X]$ , qui est de dimension  $n+1$ . Ainsi :

$(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base de  $E$ .

c. Posons pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_k = (X^2 - 1)^k$ . On a alors,  $Q_k = P_k^{(k)}$ .

Remarquons que comme  $-1$  et  $1$  sont racines de multiplicité  $k$  dans  $P_k$ , ces deux réels sont racines de  $P_k^{(p)}$  pour tout entier compris entre 0 et  $k-1$ .

Alors, pour tout  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ , on a, en intégrant deux fois par parties :

$$\begin{aligned} (Q_i | Q_j) &= \int_{-1}^1 P_i^{(i)}(t) P_j^{(j)}(t) dt = \left[ P_i^{(i)}(t) P_j^{(j-1)}(t) \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_i^{(i+1)}(t) P_j^{(j-1)}(t) dt = - \int_{-1}^1 P_i^{(i+1)}(t) P_j^{(j-1)}(t) dt \\ &= - \left[ P_i^{(i+2)}(t) P_j^{(j-1)}(t) \right]_{-1}^1 + \int_{-1}^1 P_i^{(i+2)}(t) P_j^{(j-2)}(t) dt = \int_{-1}^1 P_i^{(i+2)}(t) P_j^{(j-2)}(t) dt \end{aligned}$$

En continuant ainsi, on obtient pour tout  $p \leq j$ ,  $(Q_i | Q_j) = \int_{-1}^1 P_i^{(i+p)}(t) P_j^{(j-p)}(t) dt$  et en particulier pour  $p = j$  :

$$(Q_i | Q_j) = \int_{-1}^1 P_i^{(i+j)}(t) P_j(t) dt.$$

Mais, si  $i < j$ , alors  $i + j > 2i = \deg P_i$ , donc  $P_i^{(i+j)} = 0$  et ainsi,  $(Q_i | Q_j) = 0$ .

Par symétrie du produit scalaire, on a aussi  $(Q_i | Q_j) = 0$  pour  $i > j$  et ainsi,  $(Q_i | Q_j) = 0$  pour  $i \neq j$  donc :

La famille  $(Q_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  est une base orthogonale de  $E$ .

### Exercice 3

L'identité du parallélogramme est  $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ , qui est donc vérifiée ici pour tout  $(x, y) \in E^2$ . Montrer que la norme est hilbertienne revient à montrer qu'elle dérive d'un produit scalaire et si tel est le cas, alors ce produit scalaire et la norme vérifient les identités de polarisation.

En particulier, pour tout  $(x, y) \in E^2$ ,  $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4(x | y)$ , soit :

$$(x | y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2).$$

Il faut donc montrer que  $(x, y) \mapsto (x | y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$  est un produit scalaire sur  $E$ .

Cette application va de  $E^2$  dans  $\mathbb{R}$  et est symétrique ( $\|x + y\| = \|y + x\|$  et  $\|x - y\| = \|y - x\|$ ).

De plus, pour tout  $x \in E$ ,  $(x | x) = \frac{1}{4} (\|x + x\|^2 - \|x - x\|^2) = \|x\|^2 \geq 0$  et  $(x | x) = \|x\|^2 = 0$  équivaut à  $x = 0$  (séparation de la norme).

Reste à prouver la bilinéarité, donc la linéarité à gauche (la symétrie entrainera alors la linéarité à droite).

Nous allons procéder en deux temps.

Soient  $(x, x', y) \in E^3$ . On a :

$$4(x + x' | y) = \|x + x' + y\|^2 - \|x + x' - y\|^2 = \left\| x + \frac{1}{2}y + x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 - \left\| x - \frac{1}{2}y + x' - \frac{1}{2}y \right\|^2.$$

Et, avec l'identité du parallélogramme :

$$\begin{aligned} \left\| x + \frac{1}{2}y + x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 &= 2 \left( \left\| x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \left\| x + \frac{1}{2}y - x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 = 2 \left( \left\| x + \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \|x - x'\|^2 \\ \left\| x - \frac{1}{2}y + x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 &= 2 \left( \left\| x - \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \left\| x - \frac{1}{2}y - x' + \frac{1}{2}y \right\|^2 = 2 \left( \left\| x - \frac{1}{2}y \right\|^2 + \left\| x' - \frac{1}{2}y \right\|^2 \right) - \|x - x'\|^2 \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} 4(x+x'|y) &= 2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2\right) - 2\left(\left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right) \\ &= 2\left(\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Remarquons que l'identité du parallélogramme peut aussi s'écrire pour tout  $(X, Y) \in E^2$  :

$$\|X\|^2 + \|Y\|^2 = \frac{1}{2}(\|X+Y\|^2 + \|X-Y\|^2).$$

Donc :

$$\begin{cases} \left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x\|^2) \\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 + \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|x-y\|^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 + \|x\|^2) - \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 \\ \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x-y\|^2 + \|x\|^2) - \left\|\frac{1}{2}y\right\|^2 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\left\|x+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x-\frac{1}{2}y\right\|^2 = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) = 2(x|y).$$

On a bien sûr de même  $\left\|x'+\frac{1}{2}y\right\|^2 - \left\|x'-\frac{1}{2}y\right\|^2 = 2(x'|y)$  et donc :

$$4(x+x'|y) = 2[2(x|y) + 2(x'|y)] = 4[(x|y) + (x'|y)].$$

Ainsi, pour tout  $(x, x', y) \in E^3$  :

$$(x+x'|y) = (x|y) + (x'|y) \quad \mathbf{(1)}.$$

Soit maintenant  $(x, y) \in E^2$ . Posons pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$  :

$$f(\lambda) = (\lambda x|y) = \frac{1}{4}(\|\lambda x+y\|^2 - \|\lambda x-y\|^2).$$

L'application  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

De plus, comme  $X \mapsto \|X\|$  est continue sur  $E$  (car 1-lipschizienne du fait de l'inégalité triangulaire),  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que différences de telles fonctions.

Enfin, pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ , on a d'après le résultat **(1)** :

$$f(\lambda+\mu) = ((\lambda+\mu)x|y) = (\lambda x + \mu x|y) = (\lambda x|y) + (\mu x|y) = f(\lambda) + f(\mu).$$

Ainsi,  $f$  est une application continue sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f(\lambda+\mu) = f(\lambda) + f(\mu)$  pour tout  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ , donc  $f$  est linéaire (*exercice classique de première année* : on prouve que pour tout  $(\lambda, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$ ,  $f(n\lambda) = nf(\lambda)$ , puis on évalue  $f$  sur  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ , puis  $\mathbb{R}$  par continuité, grâce à densité de  $\mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$ ).

Il existe donc un réel fixé  $a$  tel que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $f(\lambda) = a\lambda$  et  $a = f(1) = (x|y)$ , donc pour tout  $(x, y) \in E^2$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a :

$$(\lambda x|y) = \lambda(x|y) \quad \mathbf{(2)}.$$

Les résultats (1) et (2) prouvent que  $(x, y) \mapsto (x | y)$  est linéaire à gauche et ainsi,  $(x, y) \mapsto (x | y)$  est un produit scalaire, donc :

Toute norme de  $E$  vérifiant l'identité du parallélogramme est hilbertienne.

#### Exercice 4

Si la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est liée, alors on a  $|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)| = 0$  et l'inégalité est immédiate.

Supposons que la famille est libre, alors c'est une base de  $E$  (qui est de dimension  $n$ ) et les  $x_k$  sont tous non nuls. Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on construit une nouvelle base orthonormée de  $E$ ,  $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  avec pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - (x_{k+1} | e_1)e_1 - (x_{k+1} | e_2)e_2 - \dots - (x_{k+1} | e_k)e_k \text{ et } e_{k+1} = \frac{1}{\|\varepsilon_{k+1}\|} \varepsilon_{k+1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) &= \det_{\mathcal{B}} \left( e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_n\|} [x_n - (x_n | e_1)e_1 - (x_n | e_2)e_2 - \dots - (x_n | e_{n-1})e_{n-1}] \right) \\ &= \det_{\mathcal{B}} \left( e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_n\|} x_n \right) = \frac{1}{\|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, x_n) \\ &= \frac{1}{\|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}} \left( e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|} [x_{n-1} - (x_{n-1} | e_1)e_1 - (x_{n-1} | e_2)e_2 - \dots - (x_{n-1} | e_{n-2})e_{n-2}], x_n \right) \\ &= \frac{1}{\|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}} \left( e_1, e_2, \dots, \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\|} x_{n-1}, x_n \right) = \frac{1}{\|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &\vdots \\ &= \frac{1}{\|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}}(e_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \\ &= \frac{1}{\|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}} \left( \frac{1}{\|x_1\|} x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n \right) \\ &= \frac{1}{\|x_1\| \cdot \|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|} \det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Donc :

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\| \cdot |\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n)|$$

Or,  $\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \det P$  où  $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ . On a  $P^{-1} = {}^t P$ , donc  ${}^t P P = I_n$  et :

$$\det({}^t P P) = (\det {}^t P)(\det P) = (\det P)^2 = \det I_n = 1 \Rightarrow |\det_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n)| = |\det P| = 1.$$

Ainsi :

$$|\det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|.$$

Enfin, pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  :

$$x_k = \|\varepsilon_k\| e_k + (x_k | e_1)e_1 + (x_k | e_2)e_2 + \dots + (x_k | e_{k-1})e_{k-1}.$$

Et comme la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  est orthonormée, on a :

$$\|x_k\|^2 = \|\varepsilon_k\|^2 + (x_k | e_1)^2 + (x_k | e_2)^2 + \dots + (x_k | e_{k-1})^2 \geq \|\varepsilon_k\|^2 \Rightarrow \|\varepsilon_k\| \leq \|x_k\|.$$

Donc,  $\|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\| \leq \|x_2\| \dots \|x_{n-1}\| \cdot \|x_n\|$  et ainsi :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\|.$$

Finalement, on a bien dans tous les cas :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| \leq \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\|$$

Il est clair que si l'un des  $x_k$  est nul, alors  $|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| = 0$ .

Si pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_k \neq 0$  et  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est liée, alors on a  $|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = 0 < \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\|$ .

Si pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_k \neq 0$  et  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est libre, alors d'après ce qui précède, on a :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| \Leftrightarrow \|x_2\| \dots \|x_n\| = \|\varepsilon_2\| \dots \|\varepsilon_{n-1}\| \cdot \|\varepsilon_n\|.$$

Comme pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$ ,  $\|\varepsilon_k\| \leq \|x_k\|$ , aucune de ces inégalité ne peut être stricte avec l'égalité ci-dessus.

Ainsi :

$$\begin{aligned} |\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \|x_k\| = \|\varepsilon_k\| \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, (x_k | e_1) = (x_k | e_2) = \dots = (x_k | e_{k-1}) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_k \in (\text{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}))^\perp \\ &\Leftrightarrow \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, x_k \in (\text{Vect}(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}))^\perp \end{aligned}$$

Et ceci est vrai si et seulement si la famille  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  était initialement orthogonale.

Finalement :

$$|\det_B(x_1, x_2, \dots, x_n)| = \|x_1\| \cdot \|x_2\| \dots \|x_n\| \text{ si et seulement si l'un des } x_k \text{ est nul ou la famille } (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ est orthogonale.}$$

### Exercice 5

On a  $f \in \mathcal{L}(E)$  et pour tout  $(x, y) \in E^2$  :  $(x | y) = 0 \Rightarrow (f(x) | f(y)) = 0$ .

Soit  $(x, y) \in E^2$  tel que  $\|x\| = \|y\| = 1$ . On a alors :

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 \Leftrightarrow \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0 \Leftrightarrow (x + y | x - y) = 0.$$

Or :

$$(x + y | x - y) = 0 \Rightarrow (f(x + y) | f(x - y)) = 0.$$

Et :

$$(f(x + y) | f(x - y)) = 0 \Leftrightarrow (f(x) + f(y) | f(x) - f(y)) = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 = \|f(y)\|^2.$$

Ainsi, pour tout  $(x, y) \in E^2$  tel que  $\|x\| = \|y\| = 1$ , on a  $\|f(x)\| = \|f(y)\|$ , donc  $x \mapsto \|f(x)\|$  est constante sur la sphère unité de centre  $0_E$ .

Autrement dit, il existe un réel positif  $k$  tel que pour tout  $x \in E$  tel que  $\|x\| = 1$ , on a,  $\|f(x)\| = k$ .

Mais alors, pour tout  $x \in E \setminus \{0_E\}$ , on a :

$$\|f(x)\| = \left\| f\left(\|x\| \frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \|x\| \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| = \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \|x\| = k \|x\|.$$

Et bien sûr,  $\|f(0_E)\| = \|0_E\| = 0 = k \|0_E\|$  et ainsi :

$$\text{Il existe bien un réel positif } k \text{ tel que pour tout } x \in E, \|f(x)\| = k \|x\|.$$

### Exercice 6

1) L'application  $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$  définit un produit scalaire sur  $E$  : c'est du cours, c'est même le produit scalaire canonique sur  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

2) Appelons  $S$  l'ensemble des solutions du problème, soit :

$$S = \left\{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall A \in E, \|A\| = \|P^{-1}AP\| \right\}.$$

Remarquons déjà que  $S$  est non vide car contient au moins  $I_n$ .

Soit  $P \in S$ . On a  $\|A\| = \|P^{-1}AP\|$  pour toute  $A$  de  $E$ . Si on pose  $B = P^{-1}A$  (donc  $A = PB$ ), on a  $\|PB\| = \|BP\|$  et comme  $B$  décrit  $E$  quand  $A$  décrit  $E$ , on peut écrire :

$$S = \left\{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall B \in E, \|PB\| = \|BP\| \right\}.$$

Alors, si  $P \in S$ , on a pour tout  $(B_1, B_2) \in E^2$ ,  $\|PB_1\| = \|B_1P\|$ ,  $\|PB_2\| = \|B_2P\|$  et :

$$\begin{aligned} \|P(B_1 + B_2)\| = \|(B_1 + B_2)P\| &\Leftrightarrow \|PB_1 + PB_2\|^2 = \|B_1P + B_2P\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|PB_1\|^2 + 2\langle PB_1, PB_2 \rangle + \|PB_2\|^2 = \|B_1P\|^2 + 2\langle B_1P, B_2P \rangle + \|B_2P\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle \quad (\text{avec } \|PB_1\|^2 = \|B_1P\|^2 \text{ et } \|PB_2\|^2 = \|B_2P\|^2) \end{aligned}$$

Réciproquement, si pour tout  $(B_1, B_2) \in E^2$ ,  $\langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle$ , alors pour toute matrice  $B \in E$ , on a  $\|PB\|^2 = \|BP\|^2$  (avec  $B = B_1 = B_2$ ). Ainsi :

$$S = \left\{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \forall (B_1, B_2) \in E^2, \langle PB_1, PB_2 \rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle \right\}.$$

Notons  $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ , la base canonique de  $E$ . Si  $P \in S$ , on a alors  $\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle$  pour tous  $i, j, i', j'$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

Réciproquement, supposons qu'une matrice  $P$  de  $GL_n(\mathbb{R})$  vérifie  $\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle$  pour tous  $i, j, i', j'$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors, pour tout  $(B_1, B_2) \in E^2$  telles que  $B_1 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{i,j} E_{i,j}$  et  $B_2 = \sum_{1 \leq i', j' \leq n} \beta_{i',j'} E_{i',j'}$ , on a :

$$\begin{aligned} \langle PB_1, PB_2 \rangle &= \left\langle \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{i,j} PE_{i,j}, \sum_{1 \leq i', j' \leq n} \beta_{i',j'} PE_{i',j'} \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j, i', j' \leq n} \alpha_{i,j} \beta_{i',j'} \langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle \\ &= \sum_{1 \leq i, j, i', j' \leq n} \alpha_{i,j} \beta_{i',j'} \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle = \left\langle \sum_{1 \leq i, j \leq n} \alpha_{i,j} E_{i,j}P, \sum_{1 \leq i', j' \leq n} \beta_{i',j'} E_{i',j'}P \right\rangle = \langle B_1P, B_2P \rangle \end{aligned}$$



Donc,  $P \in S$ . Ainsi :

$$S = \left\{ P \in GL_n(\mathbb{R}) \setminus \forall (i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, \langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle \right\}.$$

Soit maintenant une matrice  $P$  quelconque de  $E$ . Notons  $C_1, \dots, C_n$  ses colonnes et  $L_1, \dots, L_n$  ses lignes.

Pour tout  $(i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$ ,  $PE_{i,j}$  (resp.  $PE_{i',j'}$ ) est la matrice dont toutes les colonnes sont nulles sauf la  $j^{\text{ième}}$  (resp. la  $j'^{\text{ième}}$ ) qui est  $C_i$  (resp.  $C_{i'}$ ), donc :

$$\langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \delta_{j,j'} (C_i | C_{i'})$$

où  $(\cdot | \cdot)$  est le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

De la même façon, pour tout  $(i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$ ,  $E_{i,j}P$  (resp.  $E_{i',j'}P$ ) est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf la  $i^{\text{ième}}$  (resp. la  $i'^{\text{ième}}$ ) qui est  $L_j$  (resp.  $L_{j'}$ ), donc :

$$\langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle = \delta_{i,i'} (L_j | L_{j'}).$$

Alors :

$$\begin{aligned} P \in S &\Leftrightarrow \forall (i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, \langle PE_{i,j}, PE_{i',j'} \rangle = \langle E_{i,j}P, E_{i',j'}P \rangle \\ &\Leftrightarrow \forall (i, j, i', j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, \delta_{j,j'} (C_i | C_{i'}) = \delta_{i,i'} (L_j | L_{j'}) \end{aligned}$$

Or, si  $i \neq i'$  et  $j \neq j'$ ,  $\delta_{j,j'} = \delta_{i,i'} = 0$ , donc  $\delta_{j,j'} (C_i | C_{i'}) = \delta_{i,i'} (L_j | L_{j'})$ . D'où :

$$P \in S \Leftrightarrow \begin{cases} \forall (i, i') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq i', (C_i | C_{i'}) = 0 \\ \forall (j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j \neq j', (L_j | L_{j'}) = 0 \\ \forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, (C_i | C_i) = (L_j | L_j) \end{cases}$$

Soit :

$$P \in S \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, \begin{cases} \forall (i, i') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq i', (C_i | C_{i'}) = \delta_{i,i'} \lambda^2 \\ \forall (j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j \neq j', (L_j | L_{j'}) = \delta_{j,j'} \lambda^2 \end{cases}$$

Remarquons que :

$$\forall (i, i') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, i \neq i', (C_i | C_{i'}) = \delta_{i,i'} \lambda^2 \Leftrightarrow {}^t PP = \lambda^2 I_n \Leftrightarrow \forall (j, j') \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, j \neq j', (L_j | L_{j'}) = \delta_{j,j'} \lambda^2$$

Finalement,

$$P \in S \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^*, {}^t PP = \lambda^2 I_n.$$

Enfin, si  ${}^t PP = \lambda^2 I_n$  avec  $\lambda \neq 0$  alors  $P$  est inversible et donc :

Les solutions du problème sont les matrices  $P \in E$  telles qu'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$  tel que  ${}^t PP = \lambda^2 I_n$ .

Remarquons que  ${}^t PP = \lambda^2 I_n$  revient à  $\frac{1}{\lambda} P \in O_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 7**

On a d'une part  $x^2 f(x) = x^{3/2} (x^{1/2} f(x))$ , donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left( \int_0^1 x^2 f(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_0^1 x^3 dx \right) \left( \int_0^1 x f(x)^2 dx \right) = \frac{1}{4} \int_0^1 x f(x)^2 dx.$$

Et, comme  $f$  est positive sur  $[0;1]$ , on peut écrire  $x f(x)^2 = x f(x)^{1/2} f(x)^{3/2}$ , d'où, toujours d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left( \int_0^1 x f(x)^2 dx \right)^2 \leq \left( \int_0^1 x^2 f(x) dx \right) \left( \int_0^1 f(x)^3 dx \right).$$

Alors, comme  $f$  est positive sur  $[0;1]$ , on a  $\int_0^1 x f(x)^2 dx \geq 0$  et :

$$4 \left( \int_0^1 x^2 f(x) dx \right)^2 \left( \int_0^1 x f(x)^2 dx \right) \leq \left( \int_0^1 x f(x)^2 dx \right)^2 \leq \left( \int_0^1 x^2 f(x) dx \right) \left( \int_0^1 f(x)^3 dx \right) \quad (*).$$

Enfin, comme  $f$  est positive et continue sur  $[0;1]$ ,  $x \mapsto x^2 f(x)$  est positive et continue sur  $[0;1]$ , donc  $\int_0^1 x^2 f(x) dx \geq 0$  et si  $\int_0^1 x^2 f(x) dx = 0$ , alors  $x \mapsto x^2 f(x)$  est nulle sur  $[0;1]$ , donc  $f$  l'est aussi et dans ce cas, l'inégalité recherchée est vérifiée (c'est même une égalité, les deux membres étant nuls).

Si  $f$  n'est pas nulle sur  $[0;1]$ , alors  $\int_0^1 x^2 f(x) dx > 0$  et on peut simplifier (\*), ce qui donne :

$$\boxed{4 \left( \int_0^1 x^2 f(x) dx \right) \left( \int_0^1 x f(x)^2 dx \right) \leq \int_0^1 f(x)^3 dx}$$

**Exercice 8**

On a  $f(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}_+$ , donc  $f(\mathbb{R}^n)$  est une partie non vide de  $\mathbb{R}$ , minorée par 0 : elle admet une borne inférieure que nous appellerons  $\mu$ . On a donc :

$$\mu = \inf f(\mathbb{R}^n) = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f((x_1, \dots, x_n)).$$

Soit  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$ , définie sur  $\mathbb{R}_n[X]^2$ .

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'application  $t \mapsto e^{-t} t^k$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}_+$ .

Or,  $e^{-t} t^k = o_{t \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{1+t^2} \right)$  et  $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$  est positive et intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $t \mapsto e^{-t} t^k$  est intégrable sur  $\mathbb{R}_+$ .

Ainsi, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\int_0^{+\infty} e^{-t} t^k dt$  converge et il va de même pour  $\int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$ , quels que soient les polynômes  $P$  et  $Q$ , car  $PQ$  est un polynôme, donc une combinaison linéaire finie de  $X^k$ .

L'application  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$  est donc bien définie sur  $\mathbb{R}_n[X]^2$ .

De plus, elle symétrique (par commutativité du produit) et bilinéaire (par linéarité de la dérivation).

Enfin, pour tout  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a  $\langle P, P \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)^2 dt \geq 0$  car  $t \mapsto e^{-t} P(t)^2$  est positive sur  $\mathbb{R}_+$  et, si cette intégrale est nulle alors  $t \mapsto e^{-t} P(t)^2$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+$ ; alors,  $t \mapsto P(t)$  est nulle sur  $\mathbb{R}_+$  et  $P$  admet une infinité de racines, donc est nul.

Finalement,  $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t) Q(t) dt$  est bien définie sur  $\mathbb{R}_n[X]^2$  et symétrique, bilinéaire, définie positive, donc c'est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}_n[X]$ .

Pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ , posons  $P_x = 1 + x_1 X + \dots + x_n X^n$ . On a alors :

$$f((x_1, \dots, x_n)) = \int_0^{+\infty} e^{-t} (P_x(t))^2 dt = \|P_x\|^2.$$

Si on pose  $A = \{1 + a_1 X + \dots + a_n X^n, (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\} = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = 1\}$ , on a alors :

$$\mu = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \|P_x\|^2 = \inf_{P \in A} \|P\|^2.$$

Remarquons que  $A$  est une partie fermée de  $\mathbb{R}_n[X]$ . En effet, par définition  $A \subset \mathbb{R}_n[X]$  et si  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de polynômes de  $A$  convergeant vers  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ , on a pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $P_k(0) = 1$ , et, en passant à la limite quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , on obtient  $P(0) = 1$ , donc  $P \in A$ .

Or, l'application  $\varphi: P \mapsto \|P\|^2$  est continue et minorée par 0 sur  $\mathbb{R}[X]$ , donc sur le fermé  $A$  : elle y admet un minimum. Comme  $\mu$  est la borne inférieure de  $\varphi$  sur  $A$ , c'est le minimum, soit :

$$\mu = \min_{P \in A} \|P\|^2 = \min_{P \in A} \|P\|^2 = \min_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \|P_x\|^2 = \min_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f((x_1, \dots, x_n)) = \min f(\mathbb{R}^n).$$

Ainsi :

$f$  admet un minimum sur  $\mathbb{R}^n$ .

Remarquons qu'avec le produit scalaire introduit plus haut, on pouvait aussi écrire :

$$\begin{aligned} \mu &= \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f((x_1, \dots, x_n)) = \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} f((-x_1, \dots, -x_n)) \\ &= \inf_{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - x_1 t - \dots - x_n t^n)^2 dt \\ &= \inf_{x=(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n} \int_0^{+\infty} e^{-t} (1 - Q_x(t))^2 dt \quad \text{avec } Q_x = x_1 X + \dots + x_n X^n \\ &= \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \|1 - Q_x\|^2 = \inf_{Q \in F} \|1 - Q\|^2 \quad \text{avec } F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = 0\} \\ &= d(1, F)^2 \quad \text{car } F \text{ est un sous-espace de } \mathbb{R}_n[X] \end{aligned}$$

### Exercice 9

1) Posons :

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0) \\ e_2 &= (-1, 1) \\ e_3 &= (-1, -2) \end{aligned}$$

On a :

$$\langle e_1 | e_2 \rangle = \langle e_1 | e_3 \rangle = \langle e_2 | e_3 \rangle = -1 < 0.$$

Donc :

La famille  $(e_1, e_2, e_3) = (1, 0), (-1, 1), (-1, -2)$  convient.

2) On a  $x = \sum_{k=1}^p x_k e_k$  et  $y = \sum_{k=1}^p |x_k| e_k$ , donc :

$$\|x\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^p x_k e_k \right\|^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq p} x_i x_j \langle e_i | e_j \rangle = \sum_{i=1}^p x_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} x_i x_j \langle e_i | e_j \rangle.$$

Et de même :

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^p x_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} |x_i x_j| \langle e_i | e_j \rangle.$$

Or, pour tous  $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a  $x_i x_j \leq |x_i x_j|$  et quand  $i \neq j$ ,  $\langle e_i | e_j \rangle < 0$ , donc  $|x_i x_j| \langle e_i | e_j \rangle \leq x_i x_j \langle e_i | e_j \rangle$ .

Alors :

$$\sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} |x_i x_j| \langle e_i | e_j \rangle \leq \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} x_i x_j \langle e_i | e_j \rangle.$$

Donc :

$$\|y\|^2 = \sum_{i=1}^p x_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} |x_i x_j| \langle e_i | e_j \rangle \leq \sum_{i=1}^p x_i^2 \|e_i\|^2 + \sum_{\substack{1 \leq i, j \leq p \\ i \neq j}} x_i x_j \langle e_i | e_j \rangle = \|x\|^2.$$

Et comme les normes sont positives, on obtient :

$$\boxed{\|y\| \leq \|x\|}$$

3) Si  $x = 0$ , alors  $\|y\| \leq \|x\| = 0$ , donc  $\|y\| = 0$ , soit  $y = 0$ .

Supposons qu'il existe  $k_0 \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $x_{k_0} = 0$ , alors  $y = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^p |x_k| e_k = 0$  et :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^p |x_k| \langle e_k | e_{k_0} \rangle = 0.$$

Or, pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{k_0\}$ ,  $|x_k| \geq 0$  et  $\langle e_k | e_{k_0} \rangle < 0$ , donc  $|x_k| \langle e_k | e_{k_0} \rangle \leq 0$ . Le résultat ci-dessus permet de conclure que  $|x_k| \langle e_k | e_{k_0} \rangle = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{k_0\}$ , et comme  $\langle e_k | e_{k_0} \rangle \neq 0$ , on obtient  $x_k = 0$ .

Ainsi, si l'un des  $x_k$  est nul, ils le sont tous, donc :

$$\boxed{\text{Soit tous les } x_k \text{ sont nuls, soit aucun ne l'est.}}$$

4) Supposons que  $p \geq n + 2$ .

Comme nous sommes en dimension  $n$  et la famille  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  contient  $n+1$  vecteurs, elle est liée. Il existe donc des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  non tous nuls tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n+1} e_{n+1} = 0.$$

Si on pose  $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_{n+1} e_{n+1} = 0$ , on est dans la situation de la question 2, donc :

$$y = |\lambda_1| e_1 + \dots + |\lambda_{n+1}| e_{n+1} = 0.$$

Mais alors :

$$\langle y | e_{n+2} \rangle = |\lambda_1| \langle e_1 | e_{n+2} \rangle + \dots + |\lambda_{n+1}| \langle e_{n+1} | e_{n+2} \rangle = 0.$$

Or, pour tout  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ , on a  $|\lambda_k| \geq 0$  et  $\langle e_k | e_{n+2} \rangle < 0$ , donc  $|\lambda_k| \langle e_k | e_{n+2} \rangle \leq 0$ . La somme de ces nombres négatifs étant nuls, ils sont tous nuls, donc pour tout  $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ ,  $|\lambda_k| \langle e_k | e_{n+2} \rangle = 0$  et comme  $\langle e_k | e_{n+2} \rangle \neq 0$  (car  $\langle e_k | e_{n+2} \rangle < 0$ ), on obtient  $\lambda_k = 0$ . Ainsi, tous les  $\lambda_k$  sont nuls, ce qui contredit l'hypothèse.

Finalement,  $p \geq n+2$  mène à une absurdité, donc :

$$p \leq n+1$$

5) On a déjà répondu à ces questions : d'après la question précédente, la famille  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  est liée et la famille donnée dans la question 1 convient comme exemple pour  $n=2$  (donc  $p = n+1 = 3$ ).

6) La famille  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  est liée, donc l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Quitte à les renuméroter, supposons que c'est  $e_{n+1}$ , autrement dit, qu'il existe des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  non tous nuls tels que :

$$e_{n+1} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Posons alors  $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i$  et  $\sigma = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i$ . Pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \langle e_k | e_{n+1} \rangle &= \langle e_k | \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \rangle = \lambda_1 \langle e_k | e_1 \rangle + \dots + \lambda_k \langle e_k | e_k \rangle + \dots + \lambda_n \langle e_n | e_k \rangle \\ &= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i \langle e_k | e_i \rangle + \lambda_k \|e_k\|^2 = - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \lambda_i + \lambda_k \|e_k\|^2 = -s + \lambda_k + \lambda_k \|e_k\|^2 = -s + \frac{\lambda_k}{\mu_k} \end{aligned}$$

Comme  $\langle e_k | e_{n+1} \rangle = -1$ , on obtient pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :

$$-s + \frac{\lambda_k}{\mu_k} = -1 \Leftrightarrow \lambda_k = (s-1)\mu_k.$$

On a  $\langle e_1 | e_{n+1} \rangle = -1 \neq 0$ , donc  $e_{n+1} \neq 0$  et il existe au moins un  $\lambda_k = (s-1)\mu_k$  non nul, ce qui permet de conclure que  $s \neq 1$ . On a alors :

$$s = \sum_{k=1}^n \lambda_k = \sum_{k=1}^n (s-1)\mu_k = (s-1) \sum_{k=1}^n \mu_k.$$

Soit :

$$\underline{s = (s-1)(\sigma - \mu_{n+1})} \quad (1)$$

Et :

$$\|e_{n+1}\|^2 = \langle e_{n+1} | e_{n+1} \rangle = \langle e_{n+1} | \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n \rangle = \lambda_1 \langle e_{n+1} | e_1 \rangle + \dots + \lambda_n \langle e_{n+1} | e_n \rangle = -\lambda_1 - \dots - \lambda_n = -s.$$

Or :

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{\|e_{n+1}\|^2 + 1} \Leftrightarrow \|e_{n+1}\|^2 = \frac{1}{\mu_{n+1}} - 1.$$

Donc,  $\frac{1}{\mu_{n+1}} - 1 = -s$ , soit, avec  $s \neq 1$  :

$$\mu_{n+1} = \frac{1}{1-s}.$$

En remplaçant dans (1), on obtient :

$$s = (s-1)\left(\sigma - \frac{1}{1-s}\right) = (s-1)\sigma + 1 \Leftrightarrow (s-1)\sigma = s-1.$$

Enfin, comme  $s-1 \neq 0$ , on obtient  $\sigma = 1$ , soit :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 1}$$

On a alors  $e_{n+1} = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (s-1)\mu_1 e_1 + \dots + (s-1)\mu_n e_n = (s-1)(\mu_1 e_1 + \dots + \mu_n e_n)$ ,  $\sum_{i=1}^n \mu_i e_i = \frac{1}{s-1} e_{n+1}$ , et :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^n \mu_i e_i + \mu_{n+1} e_{n+1} = \frac{1}{s-1} e_{n+1} + \mu_{n+1} e_{n+1} = \left(\frac{1}{s-1} + \mu_{n+1}\right) e_{n+1}.$$

Or, on a vu plus haut que  $\mu_{n+1} = \frac{1}{1-s} = -\frac{1}{s-1}$ , donc  $\frac{1}{s-1} + \mu_{n+1} = 0$  et ainsi :

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i e_i = 0}$$

7) Quitte à renuméroter les  $e_k$ , il suffit de montrer que la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre, pour prouver que toute sous-famille de  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  contenant  $n$  vecteurs est libre.

Soit des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0.$$

Comme dans la question 2, on obtient  $|\lambda_1| e_1 + \dots + |\lambda_n| e_n = 0$  et

$$\langle |\lambda_1| e_1 + \dots + |\lambda_n| e_n \mid e_{n+1} \rangle = |\lambda_1| \langle e_1 \mid e_{n+1} \rangle + \dots + |\lambda_n| \langle e_n \mid e_{n+1} \rangle = -|\lambda_1| - \dots - |\lambda_n| = 0.$$

Alors,  $\sum_{k=1}^n |\lambda_k| = 0$ , donc tous les  $\lambda_k$  sont nuls.

Ceci prouve que la famille  $(e_1, \dots, e_n)$  est libre et ainsi, toute sous-famille de  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  contenant  $n$  vecteurs est libre.

Or, toute sous-famille stricte de  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  est une sous-famille d'une famille de  $n$  vecteurs de  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  qui est libre, donc :

Toute sous-famille stricte de  $(e_1, \dots, e_{n+1})$  est libre.