Corrigés des TD du chapitre 16

Exercice 1

L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique. On note $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_i \alpha_k \alpha_k \alpha_j\right) = \alpha_i \alpha_j \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2\right) = \alpha_i \alpha_j = a_{i,j}.$$

Donc, $A^2 = A$ et A est une matrice de projecteur.

De plus, si on pose $e_1 = \alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n$, on a pour tout $j \in [\![1, n]\!]$:

$$f(\varepsilon_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \alpha_j \varepsilon_k = \alpha_j \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_k = \alpha_j e_1.$$

Comme $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 = 1$, les α_j ne sont pas tous nuls (et $e_1 \neq 0$), donc :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(e_1).$$

Par le théorème du rang, on a $\dim \ker f = n - rg(f) = n - 1$.

Soit $p \in [\![1, n]\!]$ tel que $\alpha_p \neq 0$. Pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$f(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p) = \alpha_p f(\varepsilon_j) - \alpha_j f(\varepsilon_p) = \alpha_1 \alpha_j e_p - \alpha_j \alpha_1 e_p = 0.$$

Donc, $\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p \in \ker f$ et si $\lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_n$ sont des réels, on a :

$$\sum_{j=1, j \neq p}^{n} \lambda_j (\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1, j \neq p}^{n} \alpha_p \lambda_j \varepsilon_j - \left(\sum_{j=1, j \neq p}^{n} \lambda_j \alpha_j\right) \varepsilon_p = 0.$$

Comme $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est libre, ceci donne $\alpha_p \lambda_j = 0$, soit $\lambda_j = 0$ (car $\alpha_p \neq 0$) pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{p\}$.

Ainsi, la famille $\left(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p\right)_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{p\}}$ est une famille libre de $n-1$ vecteurs de $\ker f$, qui est de dimension $n-1$, donc $\left(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p\right)_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{p\}}$ est une base de $\ker f$.

Enfin, pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{p\}$, on a :

$$(\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p \mid e_1) = \alpha_p (\varepsilon_j \mid e_1) - \alpha_j (\varepsilon_p \mid e_1) = \alpha_p \alpha_j - \alpha_j \alpha_p = 0.$$

Donc, pour tout $j \in [\![1, n]\!] \setminus \{p\}$, $\alpha_p \varepsilon_j - \alpha_j \varepsilon_p \perp e_1$, ce qui prouve que :

$$\ker f \perp \operatorname{Im} f.$$

Finalement :

> L'endomorphisme canoniquement associé à A est le projecteur orthogonal sur $\operatorname{Vect}(\alpha_1 \varepsilon_1 + \dots + \alpha_n \varepsilon_n)$.

Exercice 2

1) L'application $(f,g)\mapsto(f\,|\,g)$ est clairement symétrique et bilinéaire (du fait de la linéarité de la dérivation et de l'intégrale). De plus, pour tout $f\in E$, on a $(f\,|\,f)=\int_0^1 f(t)^2\,dt+\int_0^1 f'(t)^2\,dt\geq 0$ et, comme $\int_0^1 f(t)^2\,dt\geq 0$ et $\int_0^1 f'(t)^2\,dt\geq 0$, on a :

$$(f\,|\,f)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \int_0^1 f(t)^2\,dt=\int_0^1 f'(t)^2\,dt=0.$$

Or, f^2 est positive et continue sur $[0;1]$, donc :

$$\int_0^1 f(t)^2\,dt=0 \quad\Leftrightarrow\quad f^2=0 \quad\Leftrightarrow\quad f=0.$$

Ainsi, $(f\,|\,f)=0$ si et seulement si $f=0$, et finalement, $(f,g)\mapsto(f\,|\,g)$ est une forme bilinéaire, symétrique définie positive sur *E*, donc :

$$\boxed{(f,g)\mapsto(f\,|\,g) \text{ définit un produit scalaire sur } E.}$$

2) Remarquons que *W* est l'espace vectorielle des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 : $y''-y=0$.

Si on note $f_1:[0;1]\to\mathbb{R}\,;t\mapsto e^t$ et $f_2:[0;1]\to\mathbb{R}\,;t\mapsto e^{-t}$, on a $f_1,f_2\in E$ et ces deux fonctions forment une base de l'espace des solutions de $y''-y=0$, donc :

$$W=\mathrm{Vect}(f_1,f_2).$$

Ceci prouve entre autres que *W* est bien un sous-espace de *E*. On prouve facilement que *V* est non vide (il contient la fonction nulle) et stable par combinaisons linéaires, donc *V* est aussi un sous-espace de *E*.

Soit maintenant $f\in E$.

S'il existe $(f_V,f_W)\in V\times W$ tel que $f=f_V+f_W$, alors on a $f_W=af_1+bf_2$ avec :

$$\begin{cases} f(0)=f_V(0)+f_W(0)=f_W(0)=a+b \\ f(1)=f_V(1)+f_W(1)=f_W(1)=ae+\dfrac{b}{e} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} a=\dfrac{f(0)-ef(1)}{1-e^2} \\ b=\dfrac{e^2f(0)-ef(1)}{e^2-1} \end{cases}$$

Donc :

$$f_W=\frac{f(0)-ef(1)}{1-e^2}f_1+\frac{e^2f(0)-ef(1)}{e^2-1}f_2 \text{ et } f_V=f-f_W.$$

Ainsi, si f_V et f_W, elles sont uniques.

Réciproquement, si on pose $f_W=\dfrac{f(0)-ef(1)}{1-e^2}f_1+\dfrac{e^2f(0)-ef(1)}{e^2-1}f_2$ et $f_V=f-f_W$, on a immédiatement :

$$f=f_V+f_W \text{ et } f_W\in W.$$

On montre facilement que $f_V(0)=f(0)-f_W(0)=0$ et $f_V(1)=f(1)-f_W(1)=0$, donc que $f_V\in V$.

Ceci prouve par analyse-synthèse que :

$$\underline{E=V\oplus W}.$$

Pour montrer que $V\perp W$, il suffit de prouver que f_1 et f_2 sont orthogonales à toute fonction de *V*.

Soit $f\in V$. On a $f(0)=f(1)=0$ et :

$$(f\mid f_1)=\int_0^1 f(t)e^t dt+\int_0^1 f'(t)e^t dt=\int_0^1\left[f(t)e^t+f'(t)e^t\right]dt=\left[f(t)e^t\right]_0^1=f(1)e-f(0)=0$$

$$(f\mid f_2)=\int_0^1 f(t)e^{-t}dt+\int_0^1 f'(t)(-e^{-t})dt=-\int_0^1\left[-f(t)e^{-t}+f'(t)e^{-t}\right]dt=-\left[f(t)e^{-t}\right]_0^1=-\frac{f(1)}{e}+f(0)=0$$

Donc, pour tout $f\in V$, on a $f\perp f_1$ et $f\perp f_2$, et ainsi :

$$\underline{V\perp W}.$$

Finalement, on obtient bien :

$$\boxed{E=V\overset{\perp}{\oplus}W}$$

4) Pour toute $f\in E_{\alpha,\beta}$, on a $f(0)=\alpha$ et $f(1)=\beta$. Avec ce qui précède, on peut écrire :

$$f=f_V+f_W$$

avec $f_V\in V$ et $f_W=\dfrac{\alpha-e\beta}{1-e^2}f_1+\dfrac{e^2\alpha-e\beta}{e^2-1}f_2\in W$.

Alors, avec $f_V\perp f_W$, on a $\int_0^1\left[f(t)^2+f'(t)^2\right]dt=\|f\|^2=\|f_V\|^2+\|f_W\|^2$ et :

$$\|f_W\|^2=\left\|\frac{\alpha-e\beta}{1-e^2}f_1+\frac{e^2\alpha-e\beta}{e^2-1}f_2\right\|^2=\left(\frac{\alpha-e\beta}{1-e^2}\right)^2\|f_1\|^2+2\frac{\alpha-e\beta}{1-e^2}\frac{e^2\alpha-e\beta}{e^2-1}(f_1\mid f_2)+\left(\frac{e^2\alpha-e\beta}{e^2-1}\right)^2\|f_2\|^2.$$

On a :

$$\|f_1\|^2=\int_0^1\left[f_1(t)^2+f_1'(t)^2\right]dt=\int_0^1 2e^{2t}dt=e^2-1$$

$$(f_1\mid f_2)=\int_0^1 f_1(t)f_2(t)dt+\int_0^1 f_1'(t)f_2'(t)dt=\int_0^1 e^te^{-t}dt+\int_0^1 e^t(-e^{-t})dt=0$$

$$\|f_2\|^2=\int_0^1\left[f_2(t)^2+f_2'(t)^2\right]dt=\int_0^1 2e^{-2t}dt=-e^{-2}+1=\frac{e^2-1}{e^2}$$

Donc :

$$\|f_W\|^2=\left(\frac{\alpha-e\beta}{1-e^2}\right)^2(e^2-1)+\left(\frac{e^2\alpha-e\beta}{e^2-1}\right)^2\frac{e^2-1}{e^2}=\frac{(\alpha-e\beta)^2+(e\alpha-\beta)^2}{e^2-1}=\frac{(e^2+1)(\alpha^2+\beta^2)-4e\alpha\beta}{e^2-1}.$$

Enfin :

$$\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}}\left(\int_0^1\left[f(t)^2+f'(t)^2\right]dt\right)=\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}}\left(\|f\|^2\right)=\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}}\left(\|f_V\|^2+\|f_W\|^2\right)=\|f_W\|^2.$$

Donc :

$$\boxed{\inf_{f\in E_{\alpha,\beta}}\left(\int_0^1\left[f(t)^2+f'(t)^2\right]dt\right)=\frac{(e^2+1)(\alpha^2+\beta^2)-4e\alpha\beta}{e^2-1}}$$

Exercice 3

Soient $\mathcal{B}_F=(e_1,\dots,e_p)$ et $\mathcal{B}_G=(e_{p+1},\dots,e_n)$ des bases orthonormées de F et G respectivement (avec $n=\dim E$, $p=\dim F$ et $n-p=\dim G$). La famille $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ est alors une base de E adaptée à la décomposition $E=F\oplus G$.

On a alors $M_{\mathcal{B}}(s)=diag(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$ où le 1 apparait p fois et :

$$s(e_k)=\begin{cases} e_k & \text{si } 1\le k\le p \\ -e_k & \text{si } p+1\le k\le n\end{cases}$$

On a alors :

- pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$, $\big(s(e_i)\,|\,s(e_j)\big)=(e_i\,|\,e_j)=\delta_{i,j}$ (car $(e_1,\dots,e_p)$ est orthonormée) ;
- pour tout $(i,j)\in[\![p+1,n]\!]^2$, $\big(s(e_i)\,|\,s(e_j)\big)=(-e_i\,|\,-e_j)=(e_i\,|\,e_j)=\delta_{i,j}$ (car $(e_{p+1},\dots,e_n)$ est orthonormée) ;
- pour tout $(i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![p+1,n]\!]$, $\big(s(e_i)\,|\,s(e_j)\big)=(e_i\,|\,-e_j)=-(e_i\,|\,e_j)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} G=F^{\perp} &\iff G\perp F \\ &\iff \mathcal{B}=(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n) \text{ est orthonormée} \\ &\iff \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ (e_i\,|\,e_j)=\delta_{i,j} \\ &\iff \forall (i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![p+1,n]\!],\ (e_i\,|\,e_j)=0 \\ &\iff \forall (i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![p+1,n]\!],\ (e_i\,|\,e_j)=-(e_i\,|\,e_j) \\ &\iff \forall (i,j)\in[\![1,p]\!]\times[\![p+1,n]\!],\ (e_i\,|\,e_j)=\big(s(e_i)\,|\,s(e_j)\big) \\ &\iff \forall (i,j)\in[\![1,n]\!]^2,\ (e_i\,|\,e_j)=\big(s(e_i)\,|\,s(e_j)\big)\end{aligned}$$

Ceci prouve que (i) équivaut à (ii).

De plus, comme $M_{\mathcal{B}}(s)=diag(1,\dots,1,-1,\dots,-1)$ est diagonale donc symétrique, s est un endomorphisme autoadjoint si et seulement si la base $\mathcal{B}$ est orthonormée, donc (iii) est équivalente à (i) et (ii) et ainsi :

$$\boxed{\text{Les assertions (i), (ii) et (iii) sont équivalentes.}}$$

Exercice 4

Notons $\mathcal{B}=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique) et $\mathcal{B}'=(c_1,\dots,c_n)$ où les c_k sont les vecteurs colonnes de A. Comme $A\in GL_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{B}'$ est une base et on a $A=P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ (la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$).

Par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, il existe $\mathcal{B}''=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de E telle que, pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)=\mathrm{Vect}(c_1,\dots,c_k)$. Ceci se traduit par pour tout $k\in[\![1,n]\!]$:

$$c_k\in\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)\quad\Rightarrow\quad c_k=\lambda_{1,k}e_1+\dots+\lambda_{k,k}e_k\,.$$

Alors $P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}=\begin{pmatrix}\lambda_{1,1} & \lambda_{1,2} & \cdots & \lambda_{1,n-1} & \lambda_{1,n} \\ 0 & \lambda_{2,2} & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \lambda_{n-2,n-1} & \lambda_{n-2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \lambda_{n-1,n-1} & \lambda_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n,n}\end{pmatrix}$, donc $R=P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$ est triangulaire supérieure.

Par ailleurs, comme $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique, la base canonique $\mathcal{B}$ est orthonormée. Comme la base $\mathcal{B}''$ l'est aussi, $Q = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$ est orthogonale.

Enfin, la relation de Chasles donne $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''} P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$, soit, avec $A = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$, $R = P_{\mathcal{B}''}^{\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}$:

$$\boxed{A = QR \text{ avec } Q \in O(n) \text{ et } R \text{ triangulaire supérieure.}}$$

Exercice 5

1) On a par définition :

$$\boxed{rg(A) = rg(\mathcal{F})}$$

2) Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, appelons $(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i})$ les coordonnées de x_i dans la base orthonormée $\mathcal{B}$.

On a alors, pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$:

$$(x_i \mid x_j) = \sum_{k=1}^{n} x_{k,i} x_{k,j} .$$

Par ailleurs, $A = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = (x_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et ${}^tA = (x_{j,i}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ donc $A^\top A$ est définie et $A^\top A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Si on pose $A^\top A = (a_{i,j})$, on a pour tout $(i, j) \in [\![1, p]\!]^2$:

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} x_{k,i} x_{k,j} = (x_i \mid x_j) .$$

Ainsi :

$$\boxed{G = A^\top A}$$

3) Soit $X \in \ker A$. On a :

$$(A^\top A)X = A^\top (AX) = A^\top 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad X \in \ker(A^\top A) .$$

Ainsi :

$$\underline{\ker A \subset \ker(A^\top A)} .$$

Soit maintenant $X \in \ker(A^\top A)$, on a :

$$\|AX\|^2 = (AX)^\top (AX) = (X^\top A^\top)(AX) = X^\top (A^\top AX) = X^\top 0 = 0 .$$

Ainsi, $\|AX\| = 0$, donc $AX = 0$, soit $X \in \ker A$. Ceci permet de conclure que :

$$\underline{\ker(A^\top A) \subset \ker A} .$$

Finalement :

$$\boxed{\ker(A^\top A) = \ker A}$$

Par le théorème du rang, on a $rg(A) + \dim\big(\ker A\big) = p$ et $rg\,(A^\top A) + \dim\Big(\ker(A^\top A)\Big) = p$.

Or, comme $\ker(A^\top A) = \ker A$, on a $\dim\Big(\ker(A^\top A)\Big) = \dim\big(\ker A\big)$ et ainsi, $rg\,(A^\top A) = rg(A)$.

Comme $G = A^\top A$ et $rg(A) = rg(\mathcal{F})$, on a finalement :

$$\boxed{rg(\mathcal{F}) = rg(G)}$$

4) La matrice $G = A^\top A$ est une matrice symétrique réelle de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, donc, d'après le théorème spectrale, elle est diagonalisable. Si ses valeurs propres (distinctes ou non) sont $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, on a :

$$\det G = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p .$$

Soit $k \in [\![1, p]\!]$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre de G associé à λ_k. On a $GX = A^\top AX = \lambda_k X$, donc :

$$X^\top A^\top AX = \lambda_k X^\top X \quad \Leftrightarrow \quad (AX)^\top AX = \|AX\|^2 = \lambda_k \|X\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_k = \frac{\|AX\|^2}{\|X\|^2} \quad (\text{car } \|X\|^2 \neq 0).$$

Or, $\|AX\|^2 \geq 0$ et $\|X\|^2 > 0$, donc $\lambda_k \geq 0$. Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p \geq 0$, soit :

$$\boxed{\det G \geq 0}$$

On a $\det G = 0$ quand $rg(G) = rg(x_1, x_2, \dots, x_p) < p$, donc :

$$\boxed{\det G = 0 \text{ si et seulement si } \mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p) \text{ est liée.}}$$

5) Si $x \in F$, alors $d(x, F) = 0$ et la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p, x)$, donc $\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x) = 0$ et la formule désirée est vérifiée (les deux membres valent 0).

Si $x \notin F$, posons $e_{p+1} = x - p_F(x) \neq 0$, où $p_F(x)$ est le projeté orthogonal de x sur F.

On a alors $d^2 = d(x, F)^2 = \|e_{p+1}\|^2 = (e_{p+1} \mid e_{p+1})$ et $e_{p+1} \in F^\perp$, donc pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $(e_k \mid e_{p+1}) = 0$. Ainsi :

$$G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{pmatrix} (e_1 \mid e_1) & \cdots & (e_1 \mid e_p) & (e_1 \mid e_{p+1}) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 \mid e_p) & \cdots & (e_p \mid e_p) & (e_p \mid e_{p+1}) \\ (e_1 \mid e_{p+1}) & \cdots & (e_p \mid e_{p+1}) & (e_{p+1} \mid e_{p+1}) \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & G(e_1, e_2, \dots, e_p) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & d^2 \end{array}\right).$$

Alors :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \det \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & G(e_1, e_2, \dots, e_p) & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & d^2 \end{array}\right) = d^2 \det G(e_1, e_2, \dots, e_p).$$

Par ailleurs :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & \big(e_1 | x - p_F(x)\big) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & \big(e_p | x - p_F(x)\big) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & \big(e_{p+1} | x - p_F(x)\big) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) - \big(e_1 | p_F(x)\big) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) - \big(e_p | p_F(x)\big) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | x) - \big(e_{p+1} | p_F(x)\big) \end{vmatrix}$$

Or, $p_F(x) \in F = \mathrm{Vect}(e_1, e_2, \dots, e_p)$, donc $p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i e_i$ et :

$$\begin{pmatrix} \big(e_1 | p_F(x)\big) \\ \vdots \\ \big(e_p | p_F(x)\big) \\ \big(e_{p+1} | p_F(x)\big) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p} a_i \begin{pmatrix} (e_1 | e_i) \\ \vdots \\ (e_p | e_i) \\ (e_{p+1} | e_i) \end{pmatrix}.$$

Alors :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | e_{p+1}) & \cdots & (e_p | e_{p+1}) & (e_{p+1} | x) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | x) - \big(e_1 | p_F(x)\big) & \cdots & (e_p | x) - \big(e_p | p_F(x)\big) & (x | x) - \big(x | p_F(x)\big) \end{vmatrix}$$

Et comme plus haut, on a $\begin{pmatrix} \big(e_1 | p_F(x)\big) \\ \vdots \\ \big(e_p | p_F(x)\big) \\ \big(x | p_F(x)\big) \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \sum_{i=1}^{p} a_i \begin{pmatrix} (e_1 | e_i) \\ \vdots \\ (e_p | e_i) \\ (x | e_i) \end{pmatrix}^{\mathsf{T}}$ donc :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = \begin{vmatrix} (e_1 | e_1) & \cdots & (e_1 | e_p) & (e_1 | x) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ (e_1 | e_p) & \cdots & (e_p | e_p) & (e_p | x) \\ (e_1 | x) & \cdots & (e_p | x) & (x | x) \end{vmatrix} = \det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x).$$

Ainsi, on a :

$$\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, e_{p+1}) = d^2 \det G(e_1, e_2, \dots, e_p) = \det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x).$$

Et comme la famille $(e_1, e_2, \dots, e_p)$ est une base, elle est libre, donc $\det G(e_1, e_2, \dots, e_p) \neq 0$ et ainsi :

$$\boxed{d^2 = d(x, F)^2 = \frac{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p)}}$$

Exercice 6

Comme la matrice A est symétrique réelle $A\in S_n(\mathbb{R})$, elle est diagonalisable dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (muni du produit scalaire canonique). Donc, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ tels que $D=P^\top AP$ où $D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$ et P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ (qui est orthonormée) à la base $\mathcal{B}$ (donc $P\in O(n)$).

Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, notons $U_k\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ la matrice colonne des coordonnées de u_k dans la base canonique. On a immédiatement ${U_k}^\top U_k=\|u_k\|^2=1$ (en identifiant une matrice 1×1 et son coefficient).

De plus, si on note $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a :

$$D=diag(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\sum_{k=1}^n\lambda_kE_{k,k}\,.$$

Donc :

$$A=PDP^\top=P\left(\sum_{k=1}^n\lambda_kE_{k,k}\right)P^\top=\sum_{k=1}^n\lambda_kPE_{k,k}P^\top\,.$$

Enfin, si pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $U_k=\begin{pmatrix}u_{1,k}\\u_{2,k}\\\vdots\\u_{n,k}\end{pmatrix}$, on a $P=\left(u_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ et :

$$PE_{k,k}P^\top=\begin{pmatrix}u_{1,1}&\cdots&u_{1,k}&\cdots&u_{1,n}\\\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots\\u_{k,1}&\cdots&u_{k,k}&\cdots&u_{k,n}\\\vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\u_{n,1}&\cdots&u_{n,k}&\cdots&u_{n,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&1&\cdots&0\\\vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{1,1}&\cdots&u_{k,1}&\cdots&u_{n,1}\\\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots\\u_{1,k}&\cdots&u_{k,k}&\cdots&u_{n,k}\\\vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\u_{1,n}&\cdots&u_{k,n}&\cdots&u_{n,n}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u_{1,k}u_{1,k}&\cdots&u_{1,k}u_{k,k}&\cdots&u_{1,k}u_{n,k}\\\vdots&\ddots&\vdots&&\vdots\\u_{k,k}u_{1,k}&\cdots&u_{k,k}u_{k,k}&\cdots&u_{k,k}u_{n,k}\\\vdots&&\vdots&\ddots&\vdots\\u_{n,k}u_{1,k}&\cdots&u_{n,k}u_{k,k}&\cdots&u_{n,k}u_{n,k}\end{pmatrix}=U_k{U_k}^\top\,.$$

Donc, on a bien $A=\sum_{k=1}^n\lambda_kU_k{U_k}^\top$ et ainsi :

Il existe bien $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ et $(U_1,U_2,\dots,U_n)\in\left(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^n$ tels que pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $U_k{U_k}^\top=1$ et $A=\sum_{k=1}^n\lambda_kU_k{U_k}^\top$.

Exercice 7

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, que l'on munit de sa structure euclidienne canonique.

1) Comme u est autoadjoint, il existe une base orthonormée de vecteurs propres de u $\left(e_1,e_2,\dots,e_n\right)$, d'après le théorème spectral. Et quitte à réorganiser les vecteur, on peut supposer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, λ_i soit la valeur propre (réelle) associée à e_i avec $\lambda_1\le\lambda_2\le\dots\le\lambda_n$.

Alors, pour tout $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ de E tel que $x\ne 0$, on a $u(x)=\sum_{i=1}^n x_iu(e_i)=\sum_{i=1}^n x_i\lambda_ie_i$ et :

$$\left(x\,|\,u(x)\right)=\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^2\,.$$

Comme pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\lambda_1 \leq \lambda_i \leq \lambda_n$ et $x_i^2 \geq 0$, on a :

$$\lambda_1 \|x\|^2 = \lambda_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_1 x_i^2 \leq (x \mid u(x)) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_n x_i^2 = \lambda_n \sum_{i=1}^n x_i^2 = \lambda_n \|x\|^2 .$$

Et comme $\|x\|^2 > 0$, on obtient, pour tout vecteur x non nul de E :

$$\boxed{\lambda_1 \leq \frac{(x \mid u(x))}{\|x\|^2} \leq \lambda_n}$$

2) Soit $X = (x_1 \ \ x_2 \ \ ... \ \ x_n)^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X^\top H X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} .$$

Si on pose $f(t) = \sum_{i=1}^n x_i t^{i-1}$, on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f(t)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i t^{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j t^{i+j-2} .$$

Comme *f* est une fonction polynômiale, f^2 est continue sur $\mathbb{R}$ et :

$$\int_0^1 f(t)^2 \, dt = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-2} dt \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(x_i x_j \left[\frac{t^{i+j-1}}{i+j-1} \right]_0^1 \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j-1} = X^\top H X .$$

Ainsi, comme f^2 est continue et positive sur $[0,1]$, on a $X^\top H X = \int_0^1 f(t)^2 \, dt \geq 0$ avec :

$$X^\top H X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^1 f(t)^2 \, dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall \, t \in [0,1], \ f(t) = 0 .$$

Ceci veut dire que *f* est nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier (elle est polynômiale et admet une infinité de racines), et donc que tous ses coefficients sont nuls, soit pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i = 0$ et donc $X = 0$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{H \text{ est définie positive.}}$$

3) a. On a $S = A^\top A$, donc :

$$S^\top = (A^\top A)^\top = A^\top (A^\top)^\top = A^\top A = S .$$

Donc, *S* est symétrique.

De plus, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$X^\top S X = X^\top (A^\top A) X = (X^\top A^\top)(AX) = (AX)^\top (AX) = \|AX\|^2 \geq 0 .$$

Donc, *S* est positive et ainsi :

$$\boxed{S \text{ est une matrice symétrique positive.}}$$

b. Si S est une matrice symétrique positive, alors il existe deux matrices $D = diag\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ et $P \in O(n)$ telles que $S = P^{\mathsf{T}} DP$. Comme les λ_k sont positifs, on peut poser :

$$\Delta = diag\,(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}).$$

On a $D = \Delta^2$ et $\Delta^{\mathsf{T}} = \Delta$ (car Δ est diagonale), donc :

$$S = P^{\mathsf{T}} DP = P^{\mathsf{T}} \Delta^2 P = P^{\mathsf{T}} \Delta^{\mathsf{T}} \Delta P = (\Delta P)^{\mathsf{T}} (\Delta P) = A^{\mathsf{T}} A \text{ avec } A = \Delta P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } S \text{ est une matrice symétrique positive, alors il existe } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } S = A^{\mathsf{T}} A.}$$

Comme $(-A)^{\mathsf{T}}(-A) = A^{\mathsf{T}} A$:

$$\boxed{\text{La matrice } A \text{ n'est pas unique.}}$$

c. Nous revenons ici à $S = A^{\mathsf{T}} A$. On a vu que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^{\mathsf{T}} SX = \|AX\|^2$, donc :

$$X^{\mathsf{T}} SX = 0 \iff \|AX\| = 0 \iff AX = 0 \iff X \in \ker A.$$

Alors :

$$S \text{ est définie positive} \iff \begin{pmatrix} \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \\ X^{\mathsf{T}} SX = 0 \iff X = 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} \forall\, X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) : \\ X \in \ker A \iff X = 0 \end{pmatrix} \iff \ker A = \{0\}.$$

Autrement dit :

$$\boxed{S \text{ est définie positive si et seulement si } A \text{ est inversible.}}$$

d. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On a d'une part :

$$X \in \ker S \iff SX = 0 \implies X^{\mathsf{T}} SX = 0 \iff X \in \ker A.$$

Donc $\ker S \subset \ker A$.

Et d'autre part :

$$X \in \ker A \iff AX = 0 \implies SX = A^{\mathsf{T}} AX = 0 \iff X \in \ker S.$$

Donc $\ker A \subset \ker S$.

Ainsi, $\ker A = \ker S$, donc, avec le théorème du rang, on obtient :

$$rg\,(A) = n - \dim\left(\ker A\right) = n - \dim\left(\ker S\right) = rg\,(S).$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{rg\,(A) = rg\,(S)}$$

4) Si S est une matrice symétrique positive, alors il existe deux matrices $D = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_k \in \mathbb{R}_+$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et $P \in O(n)$ telles que $S = P^\top DP$. Comme les λ_k sont positifs, on peut poser :

$$\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}).$$

On a alors $D = \Delta^2$ et, avec $PP^\top = I_n$:

$$S = P^\top DP = P^\top \Delta^2 P = P^\top \Delta\Delta P = P^\top \Delta(PP^\top)\Delta P = (P^\top \Delta P)(P^\top \Delta P) = R^2.$$

avec $R = P^\top \Delta P$. Comme $\sqrt{\lambda_k}$ sont positifs et $P \in O(n)$, R est bien une matrice symétrique positive.

Ainsi, il existe bien une matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$. Reste à prouver l'unicité.

Soit M une matrice symétrique positive telle que $M^2 = S$.

Comme M est symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormée. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_p$ ses valeurs propres distinctes deux à deux (toutes positives, car M est positive) et $E_1, \ldots, E_p$ les sous-espaces propres associés.

Soit $k \in [\![1, p]\!]$. Pour tout $X \in E_k$, on a $MX = \mu_k X$, donc :

$$SX = M^2 X = M(MX) = M(\mu_k X) = \mu_k MX = \mu_k(\mu_k X) = \mu_k^2 X.$$

Ainsi, μ_k^2 est une valeur propre de S et $E_k \subset F_k$, où F_k est sous-espace propre associé à μ_k^2.

Remarquons que comme les μ_k sont positives, on a : $\mu_k^2 = \mu_{k'}^2 \Leftrightarrow \mu_k = \mu_{k'} \Leftrightarrow k = k'$.

On a alors $\dim E_k \leq \dim F_k$, donc :

$$n = \dim E_1 + \ldots + \dim E_p \leq \dim F_1 + \ldots + \dim F_p \leq n.$$

Ainsi, $\dim F_1 + \ldots + \dim F_p = n$ et, comme pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a $\dim E_k \leq \dim F_k$, ceci implique que pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $\dim E_k = \dim F_k$.

Finalement, pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $E_k \subset F_k$ et $\dim E_k = \dim F_k$, donc les sous-espaces propres de M et S sont les mêmes et les valeurs propres de S sont $\mu_1^2, \ldots, \mu_p^2$.

Or, la matrice connue est S, donc ce qui précède se reformule en : les valeurs propres de M sont $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_p}$ où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres distinctes deux à deux (et positives) de S et le sous-espace propre de M associé à $\sqrt{\lambda_k}$ est le sous-espace propre de S associé à λ_k.

Ainsi, les valeurs propres et sous-espaces propres de M sont fixés, ce qui détermine complètement la matrice M et donc R est unique.

Finalement :

Il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.

Remarquons que si on omet le caractère positif, il existe plusieurs matrices dont le carré est S.

5) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres positives de A.

Pour tout $(\lambda, X) \in \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$AX = \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad X + AX = X + \lambda X \quad \Leftrightarrow \quad (I_n + A)X = (1+\lambda)X.$$

Donc, les valeurs propres de $I_n + A$ sont $1+\lambda_1, 1+\lambda_2, \dots, 1+\lambda_n$ et, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la valeur propre $1+\lambda_k$ de $I_n + A, 1+\lambda_k$ est de même multiplicité que la valeur propre λ_k de A. Ainsi :

$$\det A = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n \text{ et } \det(I_n + A) = (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\dots(1+\lambda_n).$$

On veut donc prouver que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont n réels positifs (distincts ou pas), on a :

$$1+\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n} \le \sqrt[n]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\dots(1+\lambda_n)}.$$

Précédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- Pour $n=1$, soit $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+$. On a alors $1+\sqrt[1]{\lambda_1} = 1+\lambda_1 = \sqrt[1]{1+\lambda_1}$, donc la relation est vérifiée.

- Supposons l'inégalité vraie à un rang $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$.

  Posons $a = \sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n}$ et $b = \sqrt[n]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\dots(1+\lambda_n)}$. Par hypothèse de récurrence, on a $1+a \le b$.

  Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(t) = \sqrt[n+1]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\dots(1+\lambda_n)(1+t)} - \sqrt[n+1]{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n t} - 1 = b^{\frac{n}{n+1}}(1+t)^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}t^{\frac{1}{n+1}} - 1.$$

  La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, en tant que différence de telles fonctions et, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f'(t) = \frac{1}{n+1}b^{\frac{n}{n+1}}(1+t)^{\frac{1}{n+1}-1} - \frac{1}{n+1}a^{\frac{n}{n+1}}t^{\frac{1}{n+1}-1} = \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{b}{1+t}\right)^{\frac{n}{n+1}} - \left(\frac{a}{t}\right)^{\frac{n}{n+1}}\right].$$

  On a donc :

$$f(t) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{b}{1+t}\right)^{\frac{n}{n+1}} \ge \left(\frac{a}{t}\right)^{\frac{n}{n+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b}{1+t} \ge \frac{a}{t} \quad \Leftrightarrow \quad (b-a)t \ge a.$$

  Et comme $1+a \le b$, on a $b-a \ge 1 > 0$, donc $f(t) \ge 0$ quand $t \ge \dfrac{a}{b-a} \ge 0$.

  Ceci prouve que f est décroissante sur $\left[0, \dfrac{a}{b-a}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{a}{b-a}, +\infty\right[$ et donc que f admet un minimum en $\dfrac{a}{b-a}$. Enfin, on a :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a}{b-a}\right) &= b^{\frac{n}{n+1}}\left(1+\frac{a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - a^{\frac{n}{n+1}}\left(\frac{a}{b-a}\right)^{\frac{1}{n+1}} - 1 \\ &= b^{\frac{n}{n+1}}\frac{b^{\frac{1}{n+1}}}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - a^{\frac{n}{n+1}}\frac{a^{\frac{1}{n+1}}}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - 1 = \frac{b-a}{(b-a)^{\frac{1}{n+1}}} - 1 = (b-a)^{\frac{n}{n+1}} - 1 \end{aligned}$$

  Or, on a vu que $b-a \ge 1$, donc $(b-a)^{\frac{n}{n+1}} \ge 1$ et $f\left(\dfrac{a}{b-a}\right) \ge 0$.

  Ainsi, le minimum de f sur $\mathbb{R}_+$ est positif, donc f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $\lambda_{n+1} \in \mathbb{R}_+$, $f(\lambda_{n+1}) \ge 0$.

  Finalement, on obtient pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$:

$$f(\lambda_{n+1}) = \sqrt[n+1]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\dots(1+\lambda_n)(1+\lambda_{n+1})} - \sqrt[n+1]{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n\lambda_{n+1}} - 1 \ge 0.$$

Soit :

$$1+\sqrt[n+1]{\lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n\lambda_{n+1}} \leq \sqrt[n+1]{(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\dots(1+\lambda_n)(1+\lambda_{n+1})}\ .$$

La propriété est vraie au rang $n+1$.

Ainsi, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ce qui prouve que l'on a bien :

$$\boxed{1+\sqrt[n]{\det A} \leq \sqrt[n]{\det(I_n+A)}}$$

Exercice 8

1) La relation $\leq$ étant une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$, < est immédiatement réflexive et transitive.

Reste à voir l'antisymétrie. Soient $A, B \in E$ telles que $A < B$ et $B < A$.

On a alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $X^\top AX \leq X^\top BX$ et $X^\top AX \geq X^\top BX$, soit :

$$X^\top AX = X^\top BX \quad \Leftrightarrow \quad X^\top (A-B)X = X^\top CX = 0 \text{ avec } C = A-B\ .$$

Comme E est un espace vectoriel, $C \in E = S_n(\mathbb{R})$, donc C est une matrice symétrique réelle donc diagonalisable dans une base orthonormée, autrement dit, il existe deux matrices $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (où les λ_k sont réels) telles que $C = P^\top DP$ et pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$X^\top CX = X^\top P^\top DPX = Y^\top DY = 0$$

avec $Y = PX$, qui décrit $\mathbb{R}^n$ quand X décrit $\mathbb{R}^n$. Ainsi, pour tout $Y \in \mathbb{R}^n$, $Y^\top DY = 0$.

En notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on a alors pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $e_k{}^\top De_k = \lambda_k = 0$ et ainsi, $D = 0_n$, donc $C = 0_n$, soit $A = B$. Finalement, < est antisymétrique et donc, c'est une relation d'ordre.

Si on pose $A = E_{1,1}$ et $B = E_{2,2}$, on a :

$$\left.\begin{array}{l} e_1{}^\top Ae_1 = 1 \\ e_1{}^\top Be_1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad e_1{}^\top Ae_1 > e_1{}^\top Be_1$$

$$\left.\begin{array}{l} e_2{}^\top Ae_2 = 0 \\ e_2{}^\top Be_2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad e_2{}^\top Ae_2 < e_2{}^\top Be_2$$

Donc, on n'a ni $A < B$, ni $B < A$ et al relation < n'est pas totale.

Finalement :

$$\boxed{\text{La relation < est une relation d'ordre non total sur } E.}$$

2) Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E, croissante et majorée pour la relation <.

Il existe alors $M \in E$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A_k < A_{k+1} < M$, soit pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$X^\top A_k X \leq X^\top A_{k+1} X \leq X^\top MX\ .$$

Ainsi, pour $X \in \mathbb{R}^n$ réel fixé, la suite réelle $\left(X^\top A_k X\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée, donc convergente.

En particulier, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, la suite $\left(e_i{}^\top A_k e_i\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge.

Or, si on note $A_k=(a_{k,i,j})_{1\le i,j\le n}$, on a $\left(e_i^{\top}A_ke_i\right)_{k\in\mathbb{N}}=\left(a_{k,i,i}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et donc $\left(a_{k,i,i}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $a_{i,i}$.

De plus, pour tout $i,j\in[\![1,n]\!]$ tel que $i\neq j$, la suite $\left((e_i+e_j)^{\top}A_k(e_i+e_j)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge et pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$(e_i+e_j)^{\top}A_k(e_i+e_j)=a_{k,i,i}+a_{k,i,j}+a_{k,j,i}+a_{k,j,j}.$$

Mais, $A_k\in E$, donc A_k est symétrique et $a_{k,i,j}=a_{k,j,i}$, donc :

$$(e_i+e_j)^{\top}A_k(e_i+e_j)=a_{k,i,i}+2a_{k,i,j}+a_{k,j,j}\quad\Leftrightarrow\quad a_{k,i,j}=\frac{1}{2}\left[(e_i+e_j)^{\top}A_k(e_i+e_j)-a_{k,i,i}-a_{k,j,j}\right].$$

Et comme les suites $\left(a_{k,i,i}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, $\left(a_{k,j,j}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\left((e_i+e_j)^{\top}A_k(e_i+e_j)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ convergent, la suite $\left(a_{k,i,j}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $a_{i,j}$.

Ceci prouve que la suite $\left(A_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une matrice $A=(a_{i,j})_{1\le i,j\le n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Or, l'application $M\mapsto M^{\top}$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc $A_k^{\top}\xrightarrow[k\to+\infty]{}A^{\top}$, mais pour tout $k\in\mathbb{N}$, $A_k\in S_n(\mathbb{R})$ donc $A_k^{\top}=A_k\xrightarrow[k\to+\infty]{}A$ et par unicité de la limite, on obtient $A^{\top}=A$, soit $A\in S_n(\mathbb{R})$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{Toute suite } \left(A_k\right)_{k\in\mathbb{N}}\text{, croissante et majorée pour <, converge dans } E.}$$

Exercice 9

1) Notons $A=(a_{i,j})$. On veut :

$$A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})\quad\Leftrightarrow\quad\forall\, P\in O_n(\mathbb{R}),\ P^{-1}AP=P^{\top}AP\text{ est à diagonale nulle}.$$

($\Rightarrow$) Si $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, alors pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$, $a_{i,j}=-a_{j,i}$ et en particulier, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $a_{i,i}=-a_{i,i}$, soit $a_{i,i}=0$, donc si *A* est antisymétrique, elle est à diagonale nulle.

Or, pour toute matrice $P\in O_n(\mathbb{R})$, on a $\left(P^{\top}AP\right)^{\top}=P^{\top}A^{\top}(P^{\top})^{\top}=P^{\top}(-A)P=-P^{\top}AP$. Ainsi, $P^{\top}AP$ est antisymétrique, donc à diagonale nulle.

($\Leftarrow$) On suppose ici que pour toute matrice $P\in O_n(\mathbb{R})$, $P^{\top}AP$ est à diagonale nulle. En particulier, *A* est à diagonale nulle (car $I_n\in O_n(\mathbb{R})$ et $I_n^{\top}AI_n=A$).

Soit maintenant pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$ tels que $i\neq j$:

$$P_{i,j}=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots\\
\vdots & \ddots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & & \vdots\\
\vdots & & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \cdots & 0 & -\sqrt{2}/2 & 0 & & \vdots\\
\vdots & & 0 & 0 & 1 & \ddots & & 0 & 0 & & \vdots\\
\vdots & & \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots & \vdots & & \vdots\\
\vdots & & 0 & 0 & & \ddots & 1 & 0 & 0 & & \vdots\\
\vdots & & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{2}/2 & 0 & & \vdots\\
\vdots & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots\\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\\ \\ \\ \\ \leftarrow j\\ \\ \\ \\ \end{array}\end{array}$$

On a $P_{i,j} \in O_n(\mathbb{R})$ et si on note $P_{i,j}{}^{\mathsf{T}} A = (c_{k,\ell})$ et $P_{i,j}{}^{\mathsf{T}} A P_{i,j} = (b_{k,\ell})$, on a, avec les $a_{k,k}$ nuls :

$$\begin{cases} c_{i,i} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} a_{j,i} \\ c_{i,j} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} a_{i,j} \end{cases} \quad \text{donc} \quad b_{i,i} = -\frac{\sqrt{2}}{2} c_{i,i} + \frac{\sqrt{2}}{2} c_{i,j} = \frac{1}{2}(a_{i,j} + a_{j,i}) .$$

Or, $P^{\mathsf{T}} AP$ est à diagonale nulle donc $b_{i,i} = 0$, ce qui donne $a_{j,i} = -a_{i,j}$. Ainsi, A est antisymétrique.

Finalement, on a bien :

A est antisymétrique si et seulement si $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle pour toute matrice orthogonale P.

2) Soit $X \in \ker\left(I_n - A\right)$. On a $(I_n - A)X = 0$, donc :

$$AX = X .$$

Or :

$$\left(AX \mid X\right) = (AX)^{\mathsf{T}} X = X^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} X = X^{\mathsf{T}} (-A) X = -X^{\mathsf{T}} AX = -\left(X \mid AX\right) = -\left(AX \mid X\right).$$

Donc, $\left(AX \mid X\right) = 0$, mais comme $AX = X$, on obtient $\left(X \mid X\right) = 0$, soit $X = 0$.

Ainsi, $\ker\left(I_n - A\right) = \{0\}$, donc $I_n - A$ est inversible.

Alors, $(I_n - A)^{\mathsf{T}}$ et est aussi inversible et $(I_n - A)^{\mathsf{T}} = I_n{}^{\mathsf{T}} - A^{\mathsf{T}} = I_n + A$, donc $I_n + A$ est inversible.

Finalement :

$I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles.

3) On pose $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$.

Avec $(I_n - A)^{\mathsf{T}} = I_n + A$ et de même, $(I_n + A)^{\mathsf{T}} = I_n - A$, on a :

$$B^{\mathsf{T}} = \left[(I_n + A)^{-1}(I_n - A)\right]^{\mathsf{T}} = (I_n - A)^{\mathsf{T}} \left[(I_n + A)^{-1}\right]^{\mathsf{T}} = (I_n - A)^{\mathsf{T}} \left[(I_n + A)^{\mathsf{T}}\right]^{-1} = (I_n + A)(I_n - A)^{-1}.$$

Or, $(I_n + A)^{-1}$ et $I_n - A$ commutent. En effet :

$$(I_n + A)^{-1}(I_n - A) = (I_n + A)^{-1}\left[2I_n - (I_n + A)\right] = 2(I_n + A)^{-1} - I_n$$
$$(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = \left[2I_n - (I_n + A)\right](I_n + A)^{-1} = 2(I_n + A)^{-1} - I_n$$

Donc, $B^{\mathsf{T}} = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)$ et :

$$BB^{\mathsf{T}} = \left[(I_n + A)^{-1}(I_n - A)\right]\left[(I_n - A)^{-1}(I_n + A)\right] = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)(I_n - A)^{-1}(I_n + A) = (I_n + A)^{-1}(I_n + A) = I_n .$$

Donc, $B \in O_n(\mathbb{R})$. De plus :

$$\det B = \det\left[(I_n + A)^{-1}(I_n - A)\right] = \left[\det\left(I_n + A\right)\right]^{-1} \det\left(I_n - A\right)$$
$$= \left[\det {}^{t}\left(I_n + A\right)\right]^{-1} \det\left(I_n - A\right) = \left[\det\left(I_n - A\right)\right]^{-1} \det\left(I_n - A\right) = 1$$

Ainsi, on a bien :

$B \in SO_n(\mathbb{R})$

4) On a vu plus haut que $B=2(I_n+A)^{-1}-I_n$, soit :

$$I_n+B=2(I_n+A)^{-1}.$$

Comme $(I_n+A)^{-1}$ est inversible :

$$\boxed{I_n+B \text{ est inversible.}}$$

De plus :

$$(I_n+B)^{-1}=\left[2(I_n+A)^{-1}\right]^{-1}=\frac{1}{2}(I_n+A).$$

Alors :

$$A=2(I_n+B)^{-1}-I_n=(I_n+B)^{-1}\left[2I_n-(I_n+B)\right].$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{A=(I_n+B)^{-1}(I_n-B)}$$

Exercice 10

1) Comme $u\in S(E)$, u est diagonalisable dans une base orthonormée de E.

Autrement dit, il existe une base orthonormée de E, $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ telle que :

$$D=M_{\mathcal{B}}(u)=diag\left(\lambda_1,\dots,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_2,\dots,\lambda_p,\dots,\lambda_p\right)$$

où $Sp(u)=\left\{\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_p\right\}$ et λ_k apparait α_k fois dans la diagonale de D (avec α_k la multiplicité de λ_k).

- Si $0\notin Sp(u)$, alors $\ker u=\{0\}$ et $\operatorname{Im} u=E$, donc on a bien $E=\ker u\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im} u$.
- Si $0\in Sp(u)$, alors en posant $\lambda_1=0$, on a $\ker u=\operatorname{Vect}\left(e_1,\dots,e_{\alpha_1}\right)$ et $\operatorname{Im} u=\operatorname{Vect}\left(e_{\alpha_1+1},\dots,e_n\right)$. Comme la réunion de $(e_1,\dots,e_{\alpha_1})$ et $(e_{\alpha_1+1},\dots,e_n)$ forme la base orthonormée $\mathcal{B}$, on a à nouveau $E=\ker u\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im} u$.

Finalement, dans tous les cas, on a bien :

$$\boxed{E=\ker u\overset{\perp}{\oplus}\operatorname{Im} u}$$

2) Comme $u\in S(E)$, u est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ de E.

Pour $k\in[\![1,n]\!]$, soit λ_k la valeur propre associée à e_k. On a $\lambda_k\geq 0$ car $v\in S^+(E)$ et pour tout $x=\sum_{k=1}^{n}x_ke_k\in E$:

$$u(x)=\sum_{k=1}^{n}x_ku(e_k)=\sum_{k=1}^{n}x_k\lambda_ke_k \quad \text{donc} \quad \left(u(x)\,|\,x\right)=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k^2\geq 0.$$

De plus :

$$\left(u(x)\,|\,x\right)=0 \iff \sum_{k=1}^{n}\lambda_kx_k^2=0 \iff \forall\, k\in[\![1,n]\!],\lambda_kx_k^2=0 \quad (\text{car } \lambda_kx_k^2\geq 0) \iff \forall\, k\in[\![1,n]\!],\lambda_kx_k=0.$$

Ainsi :

$$\left(u(x)\,|\,x\right)=0 \iff u(x)=\sum_{k=1}^{n}x_k\lambda_ke_k=0.$$

Donc, pour tout $x \in E$, $\big(u(x) \mid x\big) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $x \in \ker u$.

Ces résultats sont les mêmes pour v.

Soit $x \in \ker u \cap \ker v$.

On a alors $u(x) = v(x) = 0$, donc $u(x) + v(x) = (u+v)(x) = 0$, soit $x \in \ker(u+v)$.

Ainsi : $\underline{\ker u \cap \ker v \subset \ker(u+v)}$.

Soit maintenant $x \in \ker(u+v)$.

On a alors $(u+v)(x) = u(x) + v(x) = 0$, donc $u(x) = -v(x)$ et $\big(u(x) \mid x\big) = \big(-v(x) \mid x\big) = -\big(v(x) \mid x\big)$.

Or, on a vu que $\big(u(x) \mid x\big) \geq 0$ et $\big(v(x) \mid x\big) \geq 0$, donc $\big(u(x) \mid x\big) = -\big(v(x) \mid x\big)$ implique $\big(u(x) \mid x\big) = \big(v(x) \mid x\big) = 0$.
Et, d'après ce que l'on a vu plus haut, ceci implique $u(x) = v(x) = 0$, soit $x \in \ker u \cap \ker v$.

Ainsi : $\underline{\ker(u+v) \subset \ker u \cap \ker v}$.

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\ker(u+v) = \ker u \cap \ker v}$$

Pour tout $x \in E$, on a $(u+v)(x) = u(x) + v(x) \in \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$, donc :

$$\underline{\operatorname{Im}(u+v) \subset \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v} \qquad \textbf{(1)}$$

Ceci implique que : $\underline{rg\,(u+v) \leq \dim\big(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v\big)}$.

Soient $x \in \ker u \cap \ker v$ et $y \in \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$. Il existe $x_1, x_2 \in E$ tels que $y = u(x_1) + v(x_2)$ et :

$$\big(y \mid x\big) = \big(u(x_1) + v(x_2) \mid x\big) = \big(u(x_1) \mid x\big) + \big(v(x_2) \mid x\big) = \big(x_1 \mid u(x)\big) + \big(x_2 \mid v(x)\big) = \big(x_1 \mid 0\big) + \big(x_2 \mid 0\big) = 0.$$

Ainsi, $\big(\ker u \cap \ker v\big) \perp \big(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v\big)$, donc :

$$\big(\ker u \cap \ker v\big) + \big(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v\big) = \big(\ker u \cap \ker v\big) \oplus \big(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v\big) = \big(\ker(u+v)\big) \oplus \big(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v\big) \subset E$$

Alors :

$$\dim\big(\ker(u+v)\big) + \dim\big(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v\big) \leq n \quad \Leftrightarrow \quad \dim\big(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v\big) \leq n - \dim\big(\ker(u+v)\big).$$

Avec le théorème du rang, ceci implique que : $\underline{\dim\big(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v\big) \leq rg\,(u+v)}$.

Ainsi :

$$\underline{rg\,(u+v) = \dim\big(\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v\big)} \qquad \textbf{(2)}$$

Les résultats **(1)** et **(2)** permettent alors de conclure que :

$$\boxed{\operatorname{Im}(u+v) = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v}$$