

Corrigés des TD du chapitre 17

Exercice 1

1) Les deux colonnes de A sont orthogonales quel que soit a , donc A est orthogonale si et seulement si ses deux colonnes sont de norme 1, soit :

$$(a^2 - 1)^2 + a^2 = 1 \Leftrightarrow a^4 - a^2 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \text{ ou } 0 \text{ ou } 1.$$

Ainsi :

$$A \in O(2) \text{ pour } a \in \{-1, 0, 1\}.$$

2) Pour $a = 0$, on a $A = -I_2$ qui est la matrice de la rotation d'angle π .

Pour $a = 1$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Pour $a = -1$, on a $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est la matrice de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 2

Considérons \vec{u}' un vecteur unitaire du plan orienté \mathbb{R}^2 , directement orthogonal à \vec{u} .

La famille (\vec{u}, \vec{u}') est alors une base orthonormée directe de \mathbb{R}^2 . Si α est l'angle orienté entre \vec{u} et \vec{v} , on a :

$$\vec{v} = \cos \alpha \vec{u} + \sin \alpha \vec{u}'.$$

En posant $s = p + q - 2p \circ q$, on a :

$$\begin{aligned} s(\vec{u}) &= p(\vec{u}) + q(\vec{u}) - 2p(q(\vec{u})) = \vec{u} + \cos \alpha \vec{v} - 2p(\cos \alpha \vec{v}) = \vec{u} + \cos \alpha \vec{v} - 2 \cos \alpha p(\vec{v}) \\ &= (1 - 2 \cos^2 \alpha) \vec{u} + \cos \alpha \vec{v} = (1 - 2 \cos^2 \alpha) \vec{u} + \cos^2 \alpha \vec{u} + \cos \alpha \sin \alpha \vec{u}' = \sin^2 \alpha \vec{u} + \cos \alpha \sin \alpha \vec{u}' \\ &= \sin \alpha (\sin \alpha \vec{u} + \cos \alpha \vec{u}') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(\vec{u}') &= p(\vec{u}') + q(\vec{u}') - 2p(q(\vec{u}')) = \sin \alpha \vec{v} - 2p(\sin \alpha \vec{v}) = \sin \alpha \vec{v} - 2 \sin \alpha p(\vec{v}) \\ &= \sin \alpha \vec{v} - 2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{u} = \sin \alpha (\cos \alpha \vec{u} + \sin \alpha \vec{u}' - 2 \cos \alpha \vec{u}) \\ &= \sin \alpha (-\cos \alpha \vec{u} + \sin \alpha \vec{u}') \end{aligned}$$

La matrice de s dans la base orthonormée (\vec{u}, \vec{u}') est alors :

$$A = \sin \alpha \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix} = (\sin \alpha I_2) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) & -\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \\ \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) & \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) \end{pmatrix}.$$

Donc :

$s = p + q - 2p \circ q$ est la composée de la rotation d'angle $\frac{\pi}{2} - \alpha$ et de l'homothétie de rapport $\sin \alpha$.

Exercice 3

1) On a $|tr(A)| = |a+d| < 2$ et $\det A = ad - bc = 1$.

Si $bc = 0$, alors $ad = 1$ et en posant $s = a+d$, on a $\begin{cases} a+d = s \\ ad = 1 \end{cases}$, donc a et d sont les racines (réelles) de

$X^2 - sX + 1$. Or, le discriminant de ce trinôme est $\Delta = s^2 - 4$ et comme $|s| = |a+d| < 2$, on a $s^2 < 4$ et $\Delta < 0$.

Ainsi, $X^2 - sX + 1$ n'admet pas de racine réelle, ce qui est absurde car a et d sont racines réelles du trinôme.

Ainsi :

$$bc \neq 0$$

2) Remarquons déjà que si A est la matrice d'une rotation vectorielle dans une base \mathcal{B} , alors elle l'est dans toute base obtenue par rotation de \mathcal{B} (d'un angle quelconque). Ainsi, pour trouver une éventuelle base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ dans laquelle A est la matrice d'une rotation, on peut choisir le premier vecteur.

Soit alors $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$, avec $e_1 = (1, 0)$, une éventuelle base dans laquelle A est la matrice d'une rotation r , d'angle θ .

On a alors $A = M_{\mathcal{B}}(r)$ et dans une base orthonormée \mathcal{B}_o , on a $M_{\mathcal{B}_o}(r) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$.

Comme la trace est invariante par changement de base, on a :

$$tr(M_{\mathcal{B}_o}(r)) = tr(A) = 2 \cos \theta = a + d.$$

Comme $|tr(A)| = |a+d| < 2$, on a $-1 < \frac{a+d}{2} < 1$, il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\cos \theta = \frac{a+d}{2}$.

Ainsi, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle θ dans $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ et on a :

$$\begin{cases} \|r(e_1)\|^2 = \|e_1\|^2 \\ \|r(e_2)\|^2 = \|e_2\|^2 \\ (e_1 | r(e_1)) = \|e_1\| \cdot \|r(e_1)\| \cdot \cos \theta = \|e_1\|^2 \frac{a+d}{2} \\ (e_2 | r(e_2)) = \|e_2\| \cdot \|r(e_2)\| \cdot \cos \theta = \|e_2\|^2 \frac{a+d}{2} \end{cases}$$

Or, $r(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $r(e_2) = be_1 + de_2$, donc :

$$\begin{cases} \|r(e_1)\|^2 = \|ae_1 + ce_2\|^2 = a^2 \|e_1\|^2 + 2ac(e_1 | e_2) + c^2 \|e_2\|^2 \\ \|r(e_2)\|^2 = \|be_1 + de_2\|^2 = b^2 \|e_1\|^2 + 2bd(e_1 | e_2) + d^2 \|e_2\|^2 \\ (e_1 | r(e_1)) = (e_1 | ae_1 + ce_2) = a(e_1 | e_1) + c(e_1 | e_2) = a \|e_1\|^2 + c(e_1 | e_2) \\ (e_2 | r(e_2)) = (e_2 | be_1 + de_2) = b(e_2 | e_1) + d(e_2 | e_2) = b(e_1 | e_2) + d \|e_2\|^2 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$(S) : \begin{cases} a^2 \|e_1\|^2 + 2ac(e_1 | e_2) + c^2 \|e_2\|^2 = \|e_1\|^2 \\ b^2 \|e_1\|^2 + 2bd(e_1 | e_2) + d^2 \|e_2\|^2 = \|e_2\|^2 \\ a \|e_1\|^2 + c(e_1 | e_2) = \|e_1\|^2 \frac{a+d}{2} \\ b(e_1 | e_2) + d \|e_2\|^2 = \|e_2\|^2 \frac{a+d}{2} \end{cases}$$

Des deux dernières équations, on tire :

$$\begin{cases} c(e_1 | e_2) = -\|e_1\|^2 \frac{a-d}{2} \\ b(e_1 | e_2) = \|e_2\|^2 \frac{a-d}{2} \end{cases}$$

Soit, avec $bc \neq 0$, donc $b \neq 0$ et $c \neq 0$:

$$(e_1 | e_2) = -\|e_1\|^2 \frac{a-d}{2c} = \|e_2\|^2 \frac{a-d}{2b}.$$

Si ces deux égalités sont vérifiées, on a :

$$\begin{cases} a^2 \|e_1\|^2 + 2ac(e_1 | e_2) + c^2 \|e_2\|^2 = ad \|e_1\|^2 + c^2 \|e_2\|^2 \\ b^2 \|e_1\|^2 + 2bd(e_1 | e_2) + d^2 \|e_2\|^2 = b^2 \|e_1\|^2 + ad \|e_2\|^2 \end{cases}$$

Donc :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} ad \|e_1\|^2 + c^2 \|e_2\|^2 = \|e_1\|^2 \\ b^2 \|e_1\|^2 + ad \|e_2\|^2 = \|e_2\|^2 \\ (e_1 | e_2) = -\|e_1\|^2 \frac{a-d}{2c} = \|e_2\|^2 \frac{a-d}{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (ad-1) \|e_1\|^2 + c^2 \|e_2\|^2 = 0 \\ b^2 \|e_1\|^2 + (ad-1) \|e_2\|^2 = 0 \\ (e_1 | e_2) = -\|e_1\|^2 \frac{a-d}{2c} = \|e_2\|^2 \frac{a-d}{2b} \end{cases}$$

Avec $\det A = ad - bc = 1$, on obtient $ad - 1 = bc$, donc :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} bc \|e_1\|^2 + c^2 \|e_2\|^2 = 0 \\ b^2 \|e_1\|^2 + bc \|e_2\|^2 = 0 \\ (e_1 | e_2) = -\|e_1\|^2 \frac{a-d}{2c} = \|e_2\|^2 \frac{a-d}{2b} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|e_2\|^2 = -\frac{b}{c} \|e_1\|^2 \\ (e_1 | e_2) = -\frac{d-a}{2c} \|e_1\|^2 \end{cases}$$

Alors, si $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (\alpha, \beta)$, on a $\|e_1\| = 1$ et :

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 = -\frac{b}{c} \\ \alpha = -\frac{d-a}{2c} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{d-a}{2c} \\ \beta^2 = -\frac{b}{c} - \left(\frac{d-a}{2c}\right)^2 \end{cases}$$

Enfin :

$$-\frac{b}{c} - \left(\frac{d-a}{2c}\right)^2 = -\frac{4bc + (d-a)^2}{4c^2} = -\frac{4(ad-1) + a^2 - 2ad + d^2}{4c^2} = \frac{4 - (a+d)^2}{4c^2} = \frac{4 - 4\cos^2 \theta}{4c^2} = \left(\frac{\sin \theta}{c}\right)^2.$$

On peut donc prendre $e_2 = \left(\frac{a-d}{2c}, \frac{\sin \theta}{c}\right)$.

Réciproquement, si on note r la rotation d'angle $\theta \in]0, \pi[$ tel que $\cos \theta = \frac{a+d}{2}$, $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = \left(\frac{a-d}{2c}, \frac{\sin \theta}{c} \right)$, on vérifie aisément que :

- $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ est une base (car $\theta \in]0, \pi[$, donc $\sin \theta \neq 0$) ;
- $r(e_1) = ae_1 + ce_2$ et $r(e_2) = be_1 + de_2$, donc $A = M_{\mathcal{B}}(r)$.

Finalement :

A est bien la matrice d'une rotation vectorielle dans une base bien choisie.

Exercice 4

1) Remarquons déjà que si l'un des vecteurs est nul, alors la relation est vraie car les deux membres valent 0.

On suppose que les quatre vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ ne sont pas nuls.

Si \vec{a} et \vec{b} sont colinéaires, alors on peut écrire $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (car $\vec{a} \neq \vec{0}$) et :

- d'une part : $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$, donc $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = 0$;
- d'autre part : $\begin{pmatrix} \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{b} \cdot \vec{d} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} \end{pmatrix}$, donc $\begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} = 0$.

Ainsi, l'égalité est vraie aussi.

Si \vec{a} et \vec{b} ne sont pas colinéaires, quitte à diviser les deux côtés de l'égalité par $\|\vec{a}\|$ et $\|\vec{b}\|$ (non nulles), on peut supposer que \vec{a} et \vec{b} sont unitaires. Notons \vec{b}_1 le vecteur unitaire du plan $\text{Vect}(\vec{a}, \vec{b})$ tel que $(\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{a} \wedge \vec{b}_1)$ soit une base orthonormée de E . On a $\vec{b}(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$ dans cette base et :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge (\cos \alpha \vec{a} + \sin \alpha \vec{b}_1) = (\sin \alpha) \vec{a} \wedge \vec{b}_1.$$

Si $\vec{c}(c_1, c_2, c_3)$ et $\vec{d}(d_1, d_2, d_3)$ dans cette base, alors la 3^{ème} composante de $\vec{c} \wedge \vec{d}$ dans $(\vec{a}, \vec{b}_1, \vec{a} \wedge \vec{b}_1)$ est $c_1 d_2 - d_1 c_2$, donc :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \sin \alpha (\vec{a} \wedge \vec{b}_1) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \sin \alpha (c_1 d_2 - d_1 c_2).$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & (\cos \alpha \vec{a} + \sin \alpha \vec{b}_1) \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & (\cos \alpha \vec{a} + \sin \alpha \vec{b}_1) \cdot \vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \cos \alpha \vec{a} \cdot \vec{c} + \sin \alpha \vec{b}_1 \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \cos \alpha \vec{a} \cdot \vec{d} + \sin \alpha \vec{b}_1 \cdot \vec{d} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \sin \alpha \vec{b}_1 \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \sin \alpha \vec{b}_1 \cdot \vec{d} \end{vmatrix} = \sin \alpha \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b}_1 \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b}_1 \cdot \vec{d} \end{vmatrix} = \sin \alpha \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix} = \sin \alpha (c_1 d_2 - d_1 c_2) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) \end{aligned}$$

Ainsi, dans tous les cas, on a bien :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{d} & \vec{b} \cdot \vec{d} \end{vmatrix}$$

2) Ici encore, si \vec{a} est nul, la relation est vérifiée (les deux membres valent $\vec{0}$).

Si \vec{a} et \vec{b} sont colinéaires, alors $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \vec{0} \wedge \vec{c} = \vec{0}$ et on peut écrire $\vec{b} = \lambda \vec{a}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (car $\vec{a} \neq \vec{0}$). D'où :

$$(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \lambda \vec{a} - (\lambda \vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{a} = \lambda [(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{a}] = \vec{0} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}.$$

Si \vec{a} et \vec{b} ne sont pas colinéaires, alors $((\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}) \perp (\vec{a} \wedge \vec{b})$, donc $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} \in \text{Vect}(\vec{a}, \vec{b})$ et :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}.$$

D'après la première question, on a :

$$((\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}) \cdot \vec{a} = [\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{a} \wedge \vec{b}] = (\vec{c} \wedge \vec{a}) \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{b} \cdot \vec{a} \end{vmatrix} = \Delta_1.$$

$$((\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c}) \cdot \vec{b} = [\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}] = (\vec{c} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{c} & \vec{b} \cdot \vec{c} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix} = \Delta_2.$$

Avec $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}$, on obtient le système :

$$\begin{cases} (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \cdot \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{a}) \lambda + (\vec{a} \cdot \vec{b}) \mu = \Delta_1 \\ (\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) \cdot \vec{b} = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \lambda + (\vec{b} \cdot \vec{b}) \mu = \Delta_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{pmatrix}$$

Et, à nouveau avec la première question, on a $\begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{a} & \vec{a} \cdot \vec{b} \\ \vec{a} \cdot \vec{b} & \vec{b} \cdot \vec{b} \end{vmatrix} = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\|^2 \neq 0$, car \vec{a} et \vec{b} ne sont pas colinéaires, donc le système est de Cramer et :

$$\begin{cases} \lambda = \frac{\Delta_1 (\vec{b} \cdot \vec{b}) - \Delta_2 (\vec{a} \cdot \vec{b})}{(\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{a} \cdot \vec{b})} = \frac{-(\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{b} \cdot \vec{c})}{(\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{a} \cdot \vec{b})} = -(\vec{b} \cdot \vec{c}) \\ \mu = \frac{\Delta_1 (\vec{a} \cdot \vec{b}) - \Delta_2 (\vec{a} \cdot \vec{a})}{(\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \cdot \vec{b})} = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{a} \cdot \vec{c}) (\vec{b} \cdot \vec{b})}{(\vec{a} \cdot \vec{b}) (\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \vec{a}) (\vec{b} \cdot \vec{b})} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{cases}$$

Ainsi, on obtient bien dans tous les cas :

$$\boxed{(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c}) \vec{a}}$$

3) On cherche les vecteurs \vec{u} de E tels que $\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b}$, avec \vec{a} et \vec{b} donnés.

Pour tout $\vec{u} \in E$, on a $(\vec{a} \wedge \vec{u}) \perp \vec{a}$, donc si \vec{a} et \vec{b} ne sont pas orthogonaux, l'équation n'a pas de solution.

On suppose désormais que $\vec{a} \perp \vec{b}$.

D'après la question précédente, on a pour tout $\vec{u} \in E$, $(\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{a}) \vec{a}$, donc :

$$\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b} \Rightarrow (\vec{a} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{a}) \vec{a} = \vec{b} \wedge \vec{a} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} [(\vec{u} \cdot \vec{a}) \vec{a} - \vec{a} \wedge \vec{b}].$$

Soit :

$$\vec{u} = \lambda \vec{a} - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \wedge \vec{b} \text{ avec } \lambda = \frac{(\vec{u} \cdot \vec{a})}{\|\vec{a}\|^2} \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, si $\vec{u} = \lambda \vec{a} - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \wedge \vec{b}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, on a (avec $\vec{a} \perp \vec{b}$, donc $\vec{b} \cdot \vec{a} = 0$) :

$$\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{a} \wedge \left(\lambda \vec{a} - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \wedge \vec{b} \right) = \lambda \vec{a} \wedge \vec{a} - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} (\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{a} = \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} [(\vec{a} \cdot \vec{a}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{a}) \vec{a}] = \vec{b}.$$

Donc, \vec{u} vérifie bien $\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b}$.

Finalement :

Les solutions de $\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{b}$ sont les vecteurs $\vec{u} = \lambda \vec{a} - \frac{1}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \wedge \vec{b}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 5

1) Soit $\vec{u} \in E$. On a $\vec{u} = p(\vec{u}) + q(\vec{u})$ avec $p(\vec{u}) \in D$ et $q(\vec{u}) \in D^\perp$.

Si $\vec{u} \in D = \text{Vect}(\vec{a})$, alors $r(\vec{u}) = p(\vec{u})$, $q(\vec{u}) = \vec{0}$ et $\vec{a} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ (car \vec{a} et \vec{u} sont colinéaires).

Si $\vec{u} \notin D$, alors $q(\vec{u}) \neq \vec{0}$ et $q(\vec{u}) \perp \vec{a}$, donc si on pose $\vec{e}_1 = \vec{a}$, $\vec{e}_2 = \frac{1}{\|q(\vec{u})\|} q(\vec{u})$ et $\vec{e}_3 = \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2$, la famille $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base orthonormée directe de E (\vec{a} est unitaire) adaptée à r .

Dans cette base, la matrice de r est :

$$M_{\mathcal{B}}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Comme $\vec{u} = p(\vec{u}) + q(\vec{u}) = k\vec{a} + \|q(\vec{u})\| \frac{1}{\|q(\vec{u})\|} q(\vec{u}) = k\vec{e}_1 + \|q(\vec{u})\| \vec{e}_2$, on a alors :

$$\begin{aligned} r(\vec{u}) &= k\vec{e}_1 + \|q(\vec{u})\| \cos \theta \vec{e}_2 + \|q(\vec{u})\| \sin \theta \vec{e}_3 \\ &= k\vec{a} + \|q(\vec{u})\| \cos \theta \frac{1}{\|q(\vec{u})\|} q(\vec{u}) + \|q(\vec{u})\| \sin \theta (\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2) \\ &= p(\vec{u}) + \cos \theta q(\vec{u}) + \|q(\vec{u})\| \sin \theta \left(\vec{a} \wedge \frac{1}{\|q(\vec{u})\|} q(\vec{u}) \right) \\ &= p(\vec{u}) + \cos \theta q(\vec{u}) + \sin \theta (\vec{a} \wedge q(\vec{u})) \end{aligned}$$

Or, comme \vec{a} et $p(\vec{u})$ sont colinéaires, on a :

$$\vec{a} \wedge q(\vec{u}) = \vec{a} \wedge [\vec{u} - p(\vec{u})] = \vec{a} \wedge \vec{u} - \vec{a} \wedge p(\vec{u}) = \vec{a} \wedge \vec{u}.$$

Donc :

$$r(\vec{u}) = p(\vec{u}) + \cos \theta q(\vec{u}) + \sin \theta (\vec{a} \wedge \vec{u})$$

On peut encore modifier la formule ci-dessus en remarquant qu'avec l'écriture $\vec{u} = p(\vec{u}) + q(\vec{u}) = k\vec{a} + q(\vec{u})$ avec $q(\vec{u}) \perp \vec{a}$ et \vec{a} unitaire, on a $k = \vec{u} \cdot \vec{a}$ et :

$$\begin{aligned} p(\vec{u}) &= (\vec{u} \cdot \vec{a}) \vec{a} \\ q(\vec{u}) &= \vec{u} - p(\vec{u}) = \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{a}) \vec{a} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} r(\vec{u}) &= (\vec{u} \cdot \vec{a})\vec{a} + (\cos \theta)[\vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{a})\vec{a}] + (\sin \theta)\vec{a} \wedge \vec{u} \\ &= (\vec{u} \cdot \vec{a})(1 - \cos \theta)\vec{a} + (\cos \theta)\vec{u} + (\sin \theta)\vec{a} \wedge \vec{u} \end{aligned}$$

Ceci nous donne donc une expression de $r(\vec{u})$ en fonction de \vec{u} , \vec{a} et θ uniquement.

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale directe de E , notons $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$. On a alors :

$$\begin{aligned} r(\vec{i}) &= (\vec{i} \cdot \vec{a})(1 - \cos \theta)\vec{a} + (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)\vec{a} \wedge \vec{i} \\ &= a_1(1 - \cos \theta)(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (\cos \theta)\vec{i} + (\sin \theta)(a_3\vec{j} - a_2\vec{k}) \\ &= [(1 - \cos \theta)a_1^2 + \cos \theta]\vec{i} + [(1 - \cos \theta)a_1a_2 + (\sin \theta)a_3]\vec{j} + [(1 - \cos \theta)a_1a_3 - (\sin \theta)a_2]\vec{k} \\ r(\vec{j}) &= (\vec{j} \cdot \vec{a})(1 - \cos \theta)\vec{a} + (\cos \theta)\vec{j} + (\sin \theta)\vec{a} \wedge \vec{j} \\ &= a_2(1 - \cos \theta)(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (\cos \theta)\vec{j} + (\sin \theta)(a_1\vec{k} - a_3\vec{i}) \\ &= [(1 - \cos \theta)a_1a_2 - (\sin \theta)a_3]\vec{i} + [(1 - \cos \theta)a_2^2 + \cos \theta]\vec{j} + [(1 - \cos \theta)a_2a_3 + (\sin \theta)a_1]\vec{k} \\ r(\vec{k}) &= (\vec{k} \cdot \vec{a})(1 - \cos \theta)\vec{a} + (\cos \theta)\vec{k} + (\sin \theta)\vec{a} \wedge \vec{k} \\ &= a_3(1 - \cos \theta)(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + (\cos \theta)\vec{k} + (\sin \theta)(a_2\vec{i} - a_1\vec{j}) \\ &= [(1 - \cos \theta)a_1a_3 + (\sin \theta)a_2]\vec{i} + [(1 - \cos \theta)a_2a_3 - (\sin \theta)a_1]\vec{j} + [(1 - \cos \theta)a_3^2 + \cos \theta]\vec{k} \end{aligned}$$

Ce qui donne la matrice de r dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$M_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(r) = \begin{pmatrix} (1 - \cos \theta)a_1^2 + \cos \theta & (1 - \cos \theta)a_1a_2 + (\sin \theta)a_3 & (1 - \cos \theta)a_1a_3 - (\sin \theta)a_2 \\ (1 - \cos \theta)a_1a_2 - (\sin \theta)a_3 & (1 - \cos \theta)a_2^2 + \cos \theta & (1 - \cos \theta)a_2a_3 + (\sin \theta)a_1 \\ (1 - \cos \theta)a_1a_3 + (\sin \theta)a_2 & (1 - \cos \theta)a_2a_3 - (\sin \theta)a_1 & (1 - \cos \theta)a_3^2 + \cos \theta \end{pmatrix}$$

Rappelons que $a_1 = \vec{i} \cdot \vec{a}$, $a_2 = \vec{j} \cdot \vec{a}$ et $a_3 = \vec{k} \cdot \vec{a}$ avec $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$ (car \vec{a} est unitaire).

2) Soient $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe de E et r une rotation d'axe D dirigé et orienté par un vecteur unitaire $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ et d'angle $\theta \in [0, \pi]$.

D'après ce qui précède, on a $M = M_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}(r) = M_s + M_a$, avec :

$$M_s = \frac{1}{2}(M + {}^tM) = (1 - \cos \theta) \begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix} + \cos \theta I_3 \quad \text{et} \quad M_a = \frac{1}{2}(M - {}^tM) = \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si $M = I_3$, alors $\theta = 0$ et $r = id_E$.

- Si M est symétrique et $M \neq I_3$, alors $\sin \theta = 0$, donc $\theta = \pi$ $M = \begin{pmatrix} 2a_1^2 - 1 & a_1a_2 & a_1a_3 \\ a_1a_2 & 2a_2^2 - 1 & a_2a_3 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & 2a_3^2 - 1 \end{pmatrix}$ et l'on retrouve

facilement a_1, a_2, a_3 à partir des coefficients de M .

- Si M n'est pas symétrique, alors $\theta \in]0, \pi[$ et $Tr(M) = 1 + 2\cos \theta$ donne θ .

Enfin, a_1, a_2, a_3 sont obtenus facilement à l'aide de $\frac{1}{2\sin \theta}(M - {}^tM) = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$ donne.

3) Si r existe, alors son axe est $D = \text{Vect}(\vec{a})$ avec $\vec{a} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$ (\vec{a} est unitaire).

Avec les notations des questions précédentes, on alors $a_1 = -a_2 = a_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et, si D est orienté par \vec{a} :

$$\begin{aligned} r(\vec{i}) &= [(1 - \cos \theta)a_1^2 + \cos \theta] \vec{i} + [(1 - \cos \theta)a_1 a_2 + (\sin \theta)a_3] \vec{j} + [(1 - \cos \theta)a_1 a_3 - (\sin \theta)a_2] \vec{k} \\ &= \left[\frac{1}{3}(1 - \cos \theta)a_1^2 + \cos \theta \right] \vec{i} + \left[-\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right] \vec{j} + \left[\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \right] \vec{k} \end{aligned}$$

Donc :

$$r(\vec{i}) = -\vec{j} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) + \cos \theta = 0 \\ -\frac{1}{3}(1 - \cos \theta) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta = -1 \\ \frac{1}{3}(1 - \cos \theta) + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = -\frac{1}{2} \\ \sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta = -\frac{2\pi}{3} [2\pi].$$

Ainsi, si r existe, elle est unique. Réciproquement, la rotation trouvée ci-dessus vérifie bien $r(\vec{u}) = \vec{u}$ (car \vec{u} appartient à l'axe et $r(\vec{i}) = -\vec{j}$ car $\theta = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$ et on a raisonné par équivalences ci-dessus.

Finalement :

La seule rotation vérifiant $r(\vec{u}) = \vec{u}$ et $r(\vec{i}) = -\vec{j}$ est la rotation d'angle $\frac{2\pi}{3}$ et d'axe dirigée et orienté par $-\vec{u}$.

Exercice 6

L'espace \mathbb{R}^3 est muni de sa structure euclidienne canonique et orienté par sa base canonique. Dire que A est une matrice de rotation revient à dire que l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à A est une rotation.

Comme la base canonique est orthonormée directe, A est une matrice de rotation si et seulement si elle est orthogonale et de déterminant égal à 1, soit (avec $\det A = a^2 + b^2 + c^2 - 3abc$) :

$$\begin{cases} A^T A = I_3 \\ \det A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1 \\ ab + bc + ac = 0 \\ a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1 \end{cases}$$

Or, quels que soient a, b et c , on a :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ac) \\ (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) &= a^3 + b^3 + c^3 + (a + b + c)(ab + bc + ac) - 3abc \end{aligned}$$

Donc, si on pose $abc = p$, on a :

$$\begin{cases} A^T A = I_3 \\ \det A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (S) : \begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ac = 0 \\ abc = p \end{cases} \text{ avec } (a, b, c) \in \mathbb{R}^3.$$

De plus, quels que soient a, b et c , ce sont les racines de $(X - a)(X - b)(X - c)$ et :

$$(X - a)(X - b)(X - c) = X^3 - (a + b + c)X^2 + (ab + bc + ac)X - abc.$$

Donc, a, b et c vérifient (S) si et seulement si ce sont les racines réelles de $X^3 - X^2 - p$.

Or, le tableau de variations de $f : x \mapsto x^3 - x^2 - p$ est :

x	$-\infty$	0	$2/3$	$+\infty$
f	$-\infty$	$-p$	$-\frac{4}{27} - p$	$+\infty$

Alors $X^3 - X^2 - p$ admet trois racines réelles si et seulement si $-\frac{4}{27} - p \leq 0 \leq -p$, soit :

$$-\frac{4}{27} \leq p \leq 0.$$

Finalement :

$$\begin{cases} A^T A = I_3 \\ \det A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ac=0 \\ -\frac{4}{27} \leq abc \leq 0 \end{cases} \text{ avec } (a,b,c) \in \mathbb{R}^3.$$

Donc :

$$A \text{ est la matrice d'une rotation } r \text{ si et seulement si } \begin{cases} a+b+c=1 \\ ab+bc+ac=0 \\ -\frac{4}{27} \leq abc \leq 0 \end{cases}$$

Remarquons que pour $a=1$ et $b=c=0$, on a $A=I_3$. On suppose dans la suite que ce n'est pas le cas.

Les conditions ci-dessus étant remplies, appelons D l'axe de la rotation r et α son angle.

On a :

$$\text{Tr}(A) = 3a = 1 + 2 \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3a-1}{2}.$$

Cherchons $D = \ker(A - I_3)$, c'est-à-dire les vecteurs fixes par A . On a :

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by+cz=x \\ cx+ay+bz=y \\ bx+cy+az=z \end{cases}$$

Remarquons que $a+b+c=1$, donc $\vec{e}(1,1,1)$ est solution et comme A est une matrice de rotation d'axe D (une droite), on a immédiatement $D = \text{Vect}(\vec{e})$.

Reste à orienter l'axe ou l'angle. Soit $\vec{v}(1,-1,0) \in D^\perp$. On a $r(\vec{v})(a-b, c-a, b-c)$, donc $\vec{v} \wedge r(\vec{v}) = (c-b)\vec{e}$.

Alors, si D est orienté par \vec{e} , l'angle de r est $\arccos\left(\frac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b > 0$ et $-\arccos\left(\frac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b < 0$. Reste à voir le cas où $b=c$.

Dans ce cas, on a $b = c \neq 0$ (sinon $A = I_3$) et :

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2ab + b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3} \text{ et } b = \frac{2}{3} \text{ avec } b \neq 0 \Rightarrow \cos \alpha = -1.$$

Donc, r est le retournement d'axe D .

Finalement :

L'axe de la rotation est $D = \text{Vect}(\vec{e})$ avec $\vec{e}(1,1,1)$.

Quand D est orienté par \vec{e} , l'angle de la rotation est :

- $\arccos\left(\frac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b > 0$;
- $-\arccos\left(\frac{3a-1}{2}\right)$ quand $c-b < 0$;
- π quand $b = c$.

Exercice 7

Appelons C et C' les centres respectifs de $O(E)$ et $SO(E)$. On a par définition :

$$C = \{s \in O(E) \mid \forall u \in O(E), u \circ s = s \circ u\}$$

$$C' = \{r \in SO(E) \mid \forall u \in SO(E), u \circ r = r \circ u\}$$

Comme l'application id_E commute avec tous les endomorphismes de E , elle appartient à C et à C' , et l'application $-id_E$ appartient à C (*attention* : $-id_E \notin SO(E)$ car $\det(-id_E) = -1$, donc $-id_E \notin C'$).

Soit r une rotation de C' (il y en a, ne serait-ce que id_E). Elle commute avec toutes les rotations de E , donc pour tout $x \in E$ non nul, r commute avec r_x , le retournement d'axe dirigé par x .

On a donc $r_x \circ r(x) = r \circ r_x(x)$ et comme $r_x(x) = x$, on obtient $r_x(r(x)) = r(x)$. Ainsi, $r(x)$ appartient à l'axe de r_x , donc est colinéaire à x . Comme, les deux vecteurs sont de même norme, on obtient finalement pour tout :

$$\forall x \in E, r(x) = x \text{ ou } r(x) = -x.$$

Comme $-id_E \notin SO(E)$, on a $r \neq -id_E$ donc il existe un vecteur non nul x_1 de E tel que $r(x_1) = x_1$.

Supposons qu'il existe $x_2 \in E$ non nul tel que $r(x_2) = -x_2$. Alors, $r(x_1 + x_2) = r(x_1) + r(x_2) = x_1 - x_2$, mais d'après ce qui précède :

- soit $r(x_1 + x_2) = x_1 + x_2$, ce qui implique $x_2 = 0$: absurde ;
- soit $r(x_1 + x_2) = -(x_1 + x_2) = -x_1 - x_2$, ce qui implique $x_1 = 0$: absurde.

Ainsi, il n'existe pas de vecteur non nul transformé en son opposé et donc $r = id_E$.

Finalement, on a :

$$C' = \{id_E\}$$

Soit $s \in C$.

- Si s est une rotation, alors comme elle commute avec toutes les isométries de E , y compris les rotations, donc elle appartient à C' , soit $s = id_E$.
- Si s est une réflexion par rapport à un plan P , alors pour tout $x \in P^\perp$ et pour tout $u \in O(E)$, on a :

$$s \circ u(x) = u \circ s(x) \Leftrightarrow s(u(x)) = u(-x) = -u(x).$$

Donc $u(x) \in P^\perp$. Ceci prouve que P^\perp est stable par toutes les isométries de E , ce qui est absurde (pour s'en convaincre, il suffit de considérer une rotation d'axe dirigé par un vecteur de P et d'angle $\pi/2$). Ainsi, C ne contient pas de réflexion.

- Si s est la composée commutative d'une rotation r d'axe D et d'angle α par une réflexion σ par rapport au plan D^\perp , alors, la matrice de s dans une base orthonormée appropriée est :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Et pour tout $M \in O(3)$, on a $AM = MA$. En posant, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $M^T M = I_3$ donc $M \in O(3)$ et :

$$AM = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} = MA = \begin{pmatrix} 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Donc $\cos \alpha = -1$ et $\sin \alpha = 0$, soit $A = -I_3$ et donc $s = -id_E$.

Finalement, on a :

$$C = \{id_E, -id_E\}$$

Exercice 8

1) L'application $g : x \mapsto \langle x, u \rangle u$ est définie sur \mathbb{R}^3 , à images dans \mathbb{R}^3 (car $u \in \mathbb{R}^3$) et linéaire (par linéarité à gauche du produit scalaire), donc $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Ainsi, $f_a = id_{\mathbb{R}^3} + ag$ est une combinaison linéaire d'endomorphismes de \mathbb{R}^3 , donc f_a est un endomorphisme de \mathbb{R}^3 .

De plus, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f_a(x), y \rangle &= \langle x + a \langle x, u \rangle u, y \rangle = \langle x, y \rangle + a \langle x, u \rangle \langle u, y \rangle \\ \langle x, f_a(y) \rangle &= \langle x, y + a \langle y, u \rangle u \rangle = \langle x, y \rangle + a \langle y, u \rangle \langle x, u \rangle = \langle x, y \rangle + a \langle x, u \rangle \langle u, y \rangle \end{aligned}$$

Donc, $\langle f_a(x), y \rangle = \langle x, f_a(y) \rangle$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$ et ainsi :

$$\text{Pour tout } a \in \mathbb{R}, f_a \text{ est un endomorphisme autoadjoint de } \mathbb{R}^3.$$

2) Si f_a est une isométrie, alors pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $\|f_a(x)\| = \|x\|$. Or :

$$\begin{aligned} \|f_a(x)\| = \|x\| &\Leftrightarrow \|f_a(x)\|^2 = \|x\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|x + a\langle x, u \rangle u\|^2 = \|x\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 + 2\langle x, a\langle x, u \rangle u \rangle + \|a\langle x, u \rangle u\|^2 = \|x\|^2 \\ &\Leftrightarrow 2a\langle x, u \rangle^2 + a^2\langle x, u \rangle^2 = 0 \quad (\text{avec } \|u\| = 1) \\ &\Leftrightarrow (2a + a^2)\langle x, u \rangle^2 = 0 \end{aligned}$$

En particulier pour $x = u$, on a $\langle x, u \rangle = \|u\|^2 = 1 \neq 0$, et l'égalité ci-dessus donne $2a + a^2 = 0$.

Dans ce cas, la suite d'équivalences ci-dessus donne immédiatement : $\|f_a(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$.

Enfin, on cherche a non nul, donc $2a + a^2 = 0$ équivaut à $a = -2$.

Finalement :

Il existe un unique réel non nul $a_0 = -2$ tel que f_{a_0} est une isométrie.

Remarquons que pour $a = 0$, $f_0 = id_{\mathbb{R}^3}$ est une isométrie, mais pas passionnante...

On a alors $f_{-2} : x \mapsto x - 2\langle x, u \rangle u$ et :

$$f_{-2}(x) = x \Leftrightarrow 2\langle x, u \rangle u = 0 \Leftrightarrow \langle x, u \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in \{u\}^\perp.$$

De plus :

$$f_{-2}(u) = u - 2\langle u, u \rangle u = u - 2\|u\|^2 u = u - 2u = -u.$$

Donc :

f_{-2} est la réflexion par rapport au plan $\{u\}^\perp$.

3) Comme f_{-2} est une réflexion, on a $f_{-2}^2 = id_{\mathbb{R}^3}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} f_{-2}^{2k} = id_{\mathbb{R}^3} \\ f_{-2}^{2k+1} = f_{-2} \end{cases}$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{k!} f_{-2}^k &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} f_{-2}^{2k} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} f_{-2}^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} id_{\mathbb{R}^3} + \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} f_{-2} \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!} \right) id_{\mathbb{R}^3} + \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)!} \right) f_{-2} \end{aligned}$$

Or, les séries $\sum \frac{1}{(2k)!}$ et $\sum \frac{1}{(2k+1)!}$ convergent avec $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k)!} = \text{ch } 1$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)!} = \text{sh } 1$, donc :

$$\exp(f_{-2}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} f_{-2}^k = (\text{ch } 1) id_{\mathbb{R}^3} + (\text{sh } 1) f_{-2}$$

Exercice 9

1) Notons $P = \text{Vect}(e_1, e_2)$. Comme la famille (e_1, e_2) est libre, P est un plan.

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$:

$$f(x) = \langle x, e_2 \rangle e_1 + \langle x, e_1 \rangle e_2 = 0 \Leftrightarrow \langle x, e_2 \rangle = \langle x, e_1 \rangle = 0 \Leftrightarrow x \in P^\perp.$$

Donc : $\ker f = P^\perp$.

De plus, $\text{Im } f \subset P$ et, avec le théorème du rang, on a $\text{rg}(f) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \ker f = 3 - 1 = 2 = \dim P$.

Donc : $\text{Im } f = P$.

Si on pose $P^\perp = \text{Vect}(e_3)$, la famille $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 avec :

$$\begin{cases} f(e_1) = \langle e_1, e_2 \rangle e_1 + \langle e_1, e_1 \rangle e_2 = \langle e_1, e_2 \rangle e_1 + \|e_1\|^2 e_2 \\ f(e_2) = \langle e_2, e_2 \rangle e_1 + \langle e_2, e_1 \rangle e_2 = \|e_2\|^2 e_1 + \langle e_1, e_2 \rangle e_2 \\ f(e_3) = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$M_{\mathcal{B}_0}(f) = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_2 \rangle & \|e_2\|^2 & 0 \\ \|e_1\|^2 & \langle e_1, e_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le polynôme caractéristique χ_f de f est alors :

$$\chi_f = X \left[(X - \langle e_1, e_2 \rangle)^2 - \|e_1\|^2 \|e_2\|^2 \right] = X (X - \langle e_1, e_2 \rangle - \|e_1\| \|e_2\|) (X - \langle e_1, e_2 \rangle + \|e_1\| \|e_2\|).$$

Or, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne $-\|e_1\| \|e_2\| < \langle e_1, e_2 \rangle < \|e_1\| \|e_2\|$ (les inégalités sont strictes car e_1 et e_2 ne sont pas colinéaires), donc $\langle e_1, e_2 \rangle + \|e_1\| \|e_2\| > 0$ et $\langle e_1, e_2 \rangle - \|e_1\| \|e_2\| < 0$.

Ainsi, f admet trois valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = \langle e_1, e_2 \rangle - \|e_1\| \|e_2\| < 0$, $\lambda_2 = \langle e_1, e_2 \rangle + \|e_1\| \|e_2\| > 0$ et 0, donc f est diagonalisable.

Enfin, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$\begin{aligned} \langle f(x), y \rangle &= \langle \langle x, e_2 \rangle e_1 + \langle x, e_1 \rangle e_2, y \rangle = \langle x, e_2 \rangle \langle e_1, y \rangle + \langle x, e_1 \rangle \langle e_2, y \rangle = \langle x, e_1 \rangle \langle e_2, y \rangle + \langle x, e_2 \rangle \langle e_1, y \rangle \\ \langle x, f(y) \rangle &= \langle x, \langle y, e_2 \rangle e_1 + \langle y, e_1 \rangle e_2 \rangle = \langle y, e_2 \rangle \langle x, e_1 \rangle + \langle y, e_1 \rangle \langle x, e_2 \rangle = \langle x, e_1 \rangle \langle e_2, y \rangle + \langle x, e_2 \rangle \langle e_1, y \rangle = \langle f(x), y \rangle \end{aligned}$$

Donc, f est autoadjoint. D'après le théorème spectral, f est alors diagonalisable dans une base orthonormée.

Finalement :

Il existe bien une base orthonormée \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 telle que $M_{\mathcal{B}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ avec $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$.

2) On vient de voir que : si e_1 et e_2 sont linéairement indépendants, alors il existe une base orthonormée de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ avec $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$.

La réciproque est : s'il existe une base orthonormée de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ avec $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors e_1 et e_2 sont linéairement indépendants.

On suppose donc qu'il existe $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, une base orthonormée de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de f est $\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, 0)$ avec $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$.

On a alors $\text{Im } f = \text{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, donc $\text{rg}(f) = 2$.

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = \langle x, e_2 \rangle e_1 + \langle x, e_1 \rangle e_2 \in \text{Vect}(e_1, e_2)$, donc $\text{Im } f \subset \text{Vect}(e_1, e_2)$. Ceci prouve que :

$$\text{rg}(e_1, e_2) \geq 2.$$

Comme $\text{rg}(e_1, e_2) \leq 2$, on obtient $\text{rg}(e_1, e_2) = 2$ et les vecteurs e_1 et e_2 engendrent un plan. Ils sont donc linéairement indépendants, ce qui permet de conclure que :

La réciproque est vraie.

Exercice 10

1) Déterminons le rang de A par équivalences par lignes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 4L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

On obtient trois pivots (non nuls), donc $\text{rg}(A) = \text{rg}(c_1, c_2, c_3) = 3$, ce qui prouve que :

La famille (c_1, c_2, c_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

2) On a $\|c_1\| = \sqrt{6}$, donc on pose : $u = \frac{1}{\sqrt{6}}c_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

On cherche alors $V = \lambda c_1 + c_2$ tel que $\langle V, c_1 \rangle = 0$, soit :

$$\langle \lambda c_1 + c_2, c_1 \rangle = \lambda \langle c_1, c_1 \rangle + \langle c_2, c_1 \rangle = 6\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3}.$$

Donc, $V = -\frac{2}{3}c_1 + c_2 = -\frac{2}{3} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ -11 \end{vmatrix}$. Alors, $\|V\| = \frac{7}{\sqrt{3}}$ et on prend : $v = \frac{\sqrt{3}}{21} \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ -11 \end{vmatrix}$.

Enfin, on cherche $W = \alpha c_1 + \beta c_2 + c_3$ tel que $\langle W, c_1 \rangle = \langle W, c_2 \rangle = 0$, soit :

$$\begin{cases} \alpha \langle c_1, c_1 \rangle + \beta \langle c_2, c_1 \rangle + \langle c_3, c_1 \rangle = 6\alpha + 4\beta + 5 = 0 \\ \alpha \langle c_1, c_2 \rangle + \beta \langle c_2, c_2 \rangle + \langle c_3, c_2 \rangle = 4\alpha + 19\beta + 25 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5}{98} \\ \beta = -\frac{65}{49} \end{cases}$$

Donc, $W = \frac{5}{98}c_1 - \frac{65}{49}c_2 + c_3 = \frac{5}{98} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} - \frac{65}{49} \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \end{vmatrix} = \frac{3}{98} \begin{vmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}$. Alors, $\|W\| = \frac{3\sqrt{2}}{14}$ et on prend : $w = \frac{1}{7\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Ainsi :

$$\boxed{u = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix} \quad v = \frac{\sqrt{3}}{21} \begin{vmatrix} 1 \\ 5 \\ -11 \end{vmatrix} \quad w = \frac{1}{7\sqrt{2}} \begin{vmatrix} -9 \\ 4 \\ 1 \end{vmatrix}}$$

3) Les matrices de $SO_2(\mathbb{R})$ sont les matrices de rotation : on cherche $S = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Alors :

$$S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta = \gamma \\ \alpha \sin \theta + \beta \cos \theta = 0 \end{cases}$$

Il suffit alors de choisir θ tel que $\alpha \sin \theta + \beta \cos \theta = 0$, soit $\theta = -\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)$ si $\alpha \neq 0$, ou $\theta = \frac{\pi}{2}$ si $\alpha = 0$.

Dans les deux cas, on a $\gamma = \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta$. Ainsi, on peut prendre :

$$S = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{cases} \theta = -\arctan\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \text{ et } \gamma = \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta & \text{quand } \alpha \neq 0 \\ \theta = \frac{\pi}{2} \text{ et } \gamma = -\beta & \text{quand } \alpha = 0 \end{cases}$$

Et donc :

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } S \in SO_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } S \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } \gamma \text{ comme ci-dessus.}}$$

4) Remarquons déjà que si $S \in SO_2(\mathbb{R})$, alors $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$ sont dans $SO_3(\mathbb{R})$.

De plus, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à $O_3(\mathbb{R})$ (c'est une matrice de symétrie orthogonale).

$$\text{On a } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}.$$

Commençons par chercher $S_1 \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $S_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'après la question précédente, si on prend $\theta_1 = -\arctan\left(\frac{2}{1}\right) = -\arctan(2)$, on a $\theta_1 \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$ et :

$$\begin{cases} \cos \theta_1 = \sqrt{\cos^2 \theta_1} = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta_1}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin \theta_1 = \cos \theta_1 \tan \theta_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \text{ donc } S_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on pose $R_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})$, on a :

$$R_1 A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \\ \sqrt{5} & -3\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Et :

$$XR_1 A = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ \sqrt{5} & -3\sqrt{5} & -4\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On prend maintenant $S_2 \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $S_2 \begin{pmatrix} 5 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$.

En procédant comme plus haut avec $\theta_2 = -\arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, on obtient :

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Avec $R_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 1 & 0 \\ -1 & \sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})$, on a :

$$R_2 XR_1 A = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 6\sqrt{5} & 4\sqrt{5} & 5\sqrt{5} \\ 0 & -22 & -29 \\ 0 & \sqrt{6} & 2\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Enfin, soit $S_3 \in SO_2(\mathbb{R})$ telle que $S_3 \begin{pmatrix} -22 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 0 \end{pmatrix}$. On obtient $\theta_2 = \arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{22}\right)$ et :

$$S_3 = \frac{1}{7\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 11\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 11\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Alors, avec $R_3 = \frac{1}{7\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 7\sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 11\sqrt{2} & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 11\sqrt{2} \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})$, on a :

$$R_3 R_2 XR_1 A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{7}{\sqrt{3}} & -\frac{65}{7\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Enfin, si $Q = R_3 R_2 XR_1$, on a $Q \in O_3(\mathbb{R})$ car $R_3, R_2, X, R_1 \in O_3(\mathbb{R})$ et $O_3(\mathbb{R})$ est stable par produit, donc :

Il existe bien $Q \in O_3(\mathbb{R})$ telle que QA soit triangulaire supérieure.

5) En multipliant à gauche la relation $QA = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{7}{\sqrt{3}} & -\frac{65}{7\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ par $D = \text{diag}(1, -1, 1) \in O_3(\mathbb{R})$, on obtient :

$$Q'A = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & \frac{4}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{7}{\sqrt{3}} & \frac{65}{7\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{7\sqrt{2}} \end{pmatrix} = T \quad \text{avec} \quad Q' = DR_3R_2XR_1 = \frac{1}{7\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 7 & 14 & 7 \\ \sqrt{2} & 5\sqrt{2} & -11\sqrt{2} \\ -9\sqrt{3} & 4\sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Avec la base (u, v, w) obtenue dans la question 2, P , la matrice de passage de la base canonique \mathcal{B}_c de \mathbb{R}^3 à la base (u, v, w) est :

$$P = P_{\mathcal{B}_c}^{(u,v,w)} = \frac{1}{7\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 7 & \sqrt{2} & -9\sqrt{3} \\ 14 & 5\sqrt{2} & 4\sqrt{3} \\ 7 & -11\sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Et on a :

$$Q' = P^T = (P_{\mathcal{B}_c}^{(u,v,w)})^T$$

De plus, on a avait :

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{6}}c_1 \\ v = -\frac{2\sqrt{3}}{21}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{7}c_2 \\ w = \frac{5\sqrt{2}}{42}c_1 - \frac{65\sqrt{2}}{21}c_2 + \frac{7\sqrt{2}}{3}c_3 \end{cases}$$

Comme (u, v, w) et (c_1, c_2, c_3) sont des bases, on a $P_{\mathcal{B}_c}^{(c_1, c_2, c_3)} = A$ (car c_1, c_2, c_3 sont les colonnes de A) et les relations ci-dessus donnent :

$$R = P_{(c_1, c_2, c_3)}^{(u, v, w)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2\sqrt{3}}{21} & \frac{5\sqrt{2}}{42} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{7} & -\frac{65\sqrt{2}}{21} \\ 0 & 0 & \frac{7\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}.$$

Avec la relation de Chasles, on a :

$$A = P_{\mathcal{B}_c}^{(c_1, c_2, c_3)} = P_{\mathcal{B}_c}^{(u, v, w)} P_{(u, v, w)}^{(c_1, c_2, c_3)} = PR^{-1}.$$

Et, comme \mathcal{B}_c et (u, v, w) sont orthonormées, on a $P = P_{\mathcal{B}_c}^{(u, v, w)} \in O_3(\mathbb{R})$, $P^{-1} = P^T$ et :

$$R^{-1} = P^T A.$$

Or, le calcul donne $TR = I_3$, donc $R^{-1} = T$ et $Q'A = T$ se récrit $Q'A = R^{-1}$. Ainsi, $R^{-1} = Q'A = P^T A$ et comme A est inversible, on retrouve :

$$Q' = P^T.$$

Ouf!