Corrigé du DS n° 1

Exercice 1

1) Soit $a\in\mathbb{R}$. Notons $n=\left\lfloor \dfrac{a}{T}\right\rfloor+1$. On a $a<nT\leq a+T$ et :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt=\int_a^{nT} f(t)\,dt+\int_{nT}^{a+T} f(t)\,dt.$$

La fonction $t\mapsto t-T$ est de classe C^1 et bijective de $[nT,a+T]$ dans $[(n-1)T,a]$, et en effectuant le changement de variable $u=t-T$ dans la seconde intégrale, on obtient :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt=\int_a^{nT} f(t)\,dt+\int_{(n-1)T}^{a} f(u+T)\,du=\int_a^{nT} f(t)\,dt+\int_{(n-1)T}^{a} f(u)\,du=\int_{(n-1)T}^{nT} f(t)\,dt.$$

La fonction $t\mapsto t-(n-1)T$ est de classe C^1 et bijective de $[(n-1)T,nT]$ dans $[0,T]$, et en effectuant le changement de variable $u=t-nT$, on obtient :

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt=\int_0^{T} f\big(u+(n-1)T\big)\,du=\int_0^{T} f(u)\,du.$$

Ainsi, on a bien pour tout $a\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{\int_a^{a+T} f(t)\,dt=\int_0^{T} f(t)\,dt}$$

2.1) Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $x\mapsto f(x+T)$ l'est aussi en tant que composée de fonctions dérivables, de dérivée $x\mapsto f'(x+T)$. Or, f est T-périodique sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x+T)=f(x)$ et la dérivée de $x\mapsto f(x+T)$ est aussi celle de f. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x+T)=f'(x)$, d'où :

$$\boxed{f' \text{ est } T\text{-périodique sur } \mathbb{R}.}$$

2.2) Soit f une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que f' est T-périodique sur $\mathbb{R}$.

Avec la question précédente, on a alors pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$f(x+T)-f(x)=\int_x^{x+T} f'(t)\,dt=\int_0^{T} f'(t)\,dt=f(T)-f(0).$$

Or, rien de dit que $f(T)=f(0)$, donc :

$$\boxed{\text{Si } f' \text{ est } T\text{-périodique sur } \mathbb{R},\ f \text{ ne l'est pas forcément.}}$$

Remarque : On pouvait répondre à cette question en considérant f affine. Sa dérivée est constante dont T-périodique (quel que soit T), mais f ne l'est pas.

2.3) On suppose ici que *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que f' est *T*-périodique.

Si *f* est la somme d'une fonction *T*-périodique et d'une fonction linéaire, alors il existe une fonction *g*, *T*-périodique sur $\mathbb{R}$ et un réel *a* tels que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=g(x)+ax$. On a alors $f(0)=g(0)$ et :

$$f(T)=g(T)+aT=g(0)+aT=f(0)+aT\ .$$

Ainsi, si $f:x\mapsto g(x)+ax$ avec *g* *T*-périodique sur $\mathbb{R}$, on a $a=\dfrac{f(T)-f(0)}{T}$.

On pose alors $g:x\mapsto f(x)-\dfrac{f(T)-f(0)}{T}x$.

Comme *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, *g* l'est aussi comme différence de telles fonctions, et comme f' est *T*-périodique sur $\mathbb{R}$, $g'=f'-\dfrac{f(T)-f(0)}{T}$ l'est aussi. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g(x+T)-g(x)=\int_x^{x+T}g'(t)\,dt=\int_x^{x+T}\left(f'(t)-\frac{f(T)-f(0)}{T}\right)dt=\int_x^{x+T}f'(t)\,dt-\frac{f(T)-f(0)}{T}T\ .$$

Et d'après la question a, $\int_x^{x+T}f'(t)\,dt=\int_0^T f'(t)\,dt$, donc :

$$g(x+T)-g(x)=\int_0^T f'(t)\,dt-\big(f(T)-f(0)\big)=0\ .$$

Ceci étant vrai pour tout $x\in\mathbb{R}$, $g:x\mapsto f(x)-\dfrac{f(T)-f(0)}{T}x$ est bien *T*-périodique sur $\mathbb{R}$, donc :

f est la somme d'une fonction *T*-périodique et d'une fonction linéaire.

3) Soit *F* une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$. La fonction *F* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de même que $x\mapsto F(x-1)$ (qui est la composée de $x\mapsto x-1$ par *F*). Or, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$U(f)(x)=\int_{x-1}^{x}f(t)\,dt=F(x)-F(x-1)\ .$$

Donc, $U(f)$ est la différence de deux fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$U(f)'(x)=F'(x)-F'(x-1)=f(x)-f(x-1)\ .$$

Ainsi :

$U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x\mapsto f(x)-f(x-1)$.

4) On vient de voir que pour toute fonction $f\in E=C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on a $U(f)\in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})\subset E$.

De plus, pour tout $(f,g)\in E^2$ et tout $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$, on a pour tout réel *x* :

$$U(\lambda f+\mu g)(x)=\int_{x-1}^{x}(\lambda f+\mu g)(t)\,dt=\int_{x-1}^{x}\big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,dt=\lambda\int_{x-1}^{x}f(t)\,dt+\mu\int_{x-1}^{x}g(t)\,dt=\lambda U(f)(x)+\mu U(g)(x)$$

Donc, $U(\lambda f+\mu g)=\lambda U(f)+\mu U(g)$ et ainsi, *U* est linéaire. Comme *U* est définie sur *E* et à images dans *E* :

U est un endomorphisme de *E*.

5.1) Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, si on note $p_k : x \mapsto x^k$, on a, pour tout réel x :

$$U(p_k)(x) = \int_{x-1}^{x} p_k(t)\,dt = \int_{x-1}^{x} t^k\,dt = \left[\frac{t^{k+1}}{k+1}\right]_{x-1}^{x} = \frac{x^{k+1}-(x-1)^{k+1}}{k+1}$$

$$= \frac{1}{k+1}\left[x^{k+1} - \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}(-1)^{k+1-i}x^i\right] = \frac{1}{k+1}\sum_{i=0}^{k}\binom{k+1}{i}(-1)^{k-i}x^i$$

Donc, $U(p_k) \in E_n$. Ceci étant vrai pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, donc pour tour vecteur de la base $\mathcal{B}_n$ de E_n, on peut conclure que E_n est stable par U et donc que :

La restriction de U à E_n induit un endomorphisme de E_n.

5.2) On vient de voir que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$U(X^k) = \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}(-1)^{k-i}X^i$$

$$= \frac{(-1)^k}{k+1} + (-1)^{k-1}X + \frac{(-1)^{k-2}k}{2}X^2 + \ldots + \frac{1}{k+1}\binom{k+1}{i}(-1)^{k-i}X^i + \ldots - \frac{k}{2}X^{k-1} + X^k$$

Donc, la matrice de U_n dans la base $\mathcal{B}_n$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \cdots & \frac{(-1)^k}{k+1} & \cdots & \frac{(-1)^{n-1}}{n} & \frac{(-1)^n}{n+1} \\ 0 & 1 & \cdots & (-1)^{k-1} & \cdots & (-1)^{n-2} & \frac{(-1)^{n-1}n}{2} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & & \vdots & \frac{(-1)^{n-i}}{n+1}\binom{n+1}{i} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{2} & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & 1 & -\frac{n}{2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3) La matrice A est triangulaire supérieure et tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 1, donc :

$$\det A = 1 \neq 0.$$

Alors, A est inversible, donc :

L'endomorphisme U_n est bijectif.

6) Soit $f \in \ker U$. On a $U(f) = 0$, soit pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{x-1}^{x} f(t)\,dt = 0 \quad (1).$$

En prenant $x = 1$, on obtient $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$.

Si F est une primitive de f (il y en a, car $f \in E$, donc f est continue sur $\mathbb{R}$), alors la relation (1) se récrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) - F(x-1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = F(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ F(x+1) = F(x).$$

Donc, F est 1-périodique sur $\mathbb{R}$. D'après la question 2, il en va de même pour $F' = f$. Ainsi :

$$\boxed{\text{Si } f \in \ker U \text{, alors } \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \text{ et } f \text{ est 1-périodique sur } \mathbb{R}.}$$

7) Notons $K = \left\{ f \in E,\ f \text{ périodique de période 1 et } \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$.

On vient de voir que si $f \in \ker U$, alors $f \in K$, donc : $\underline{\ker U \subset K}$.

Soit $f \in K$ et F une primitive de f, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (car f est continue). La fonction $F' = f$ est 1-périodique, donc, comme on l'a vu dans la question 2, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F(x+1) - F(x) = \int_x^{x+1} F'(t)\,dt = \int_0^1 F'(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = 0.$$

Ainsi, F est 1-périodique, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$U(f)(x) = \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(x-1) = 0.$$

Donc, $f \in \ker U$, d'où : $\underline{K \subset \ker U}$.

Finalement, on a $\ker U = K$, soit :

$$\boxed{\ker U = \left\{ f \in E,\ f \text{ périodique de période 1 et } \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}}$$

8) On veut donc ici une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 1-périodique et d'intégrale nulle entre 0 et 1.

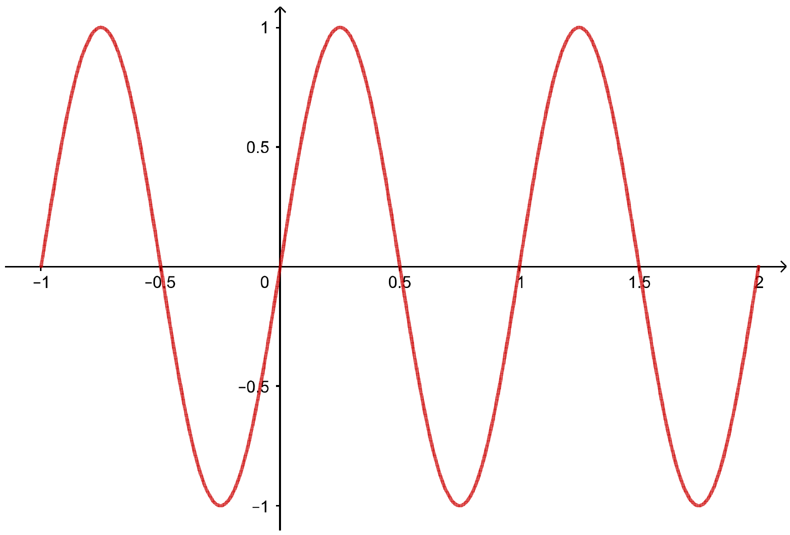
La fonction sinus est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 2π-périodique et d'intégrale nulle entre 0 et 2π, donc la fonction $x \mapsto \sin(2\pi x)$ vérifie les conditions requises : elle est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, 1-périodique et :

$$\int_0^1 \sin(2\pi t)\,dt = \left[-\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi t) \right]_0^1 = -\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi) + \frac{1}{2\pi}\cos 0 = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } x \mapsto \sin(2\pi x) \text{ est non nulle de } \ker U.}$$

La représentation graphique de cette fonction sur l'intervalle $[-1;2]$ est :



9) On a vu dans la question 3 que pour toute fonction $f \in E$, la fonction $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Alors, toute fonction de E (donc continue sur $\mathbb{R}$) mais non C^1 sur $\mathbb{R}$ n'admet pas d'antécédent par U (par exemple la fonction valeur absolue, qui n'est pas dérivable en 0).

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } U \text{ n'est pas surjectif.}}$$

10) On a $a \in \mathbb{R}^*$ et $f_a : t \mapsto e^{at}$, sur $\mathbb{R}$.

10.1) Comme la fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, $f_a \in E$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F_a(x) = U(f_a)(x) = \int_{x-1}^{x} f_a(t)\,dt = \int_{x-1}^{x} e^{at}\,dt = \left[\frac{1}{a}e^{at}\right]_{x-1}^{x} = \frac{1}{a}e^{ax} - \frac{1}{a}e^{a(x-1)}.$$

Soit :

$$\boxed{F_a = U(f_a) : x \mapsto \frac{1-e^{-a}}{a}e^{ax}}$$

10.2) La fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en tant que quotient de telles fonctions et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$:

$$g'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2}.$$

$g'(x)$ est du signe de $h(x) = xe^x - e^x + 1$ et h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de telles fonctions, avec pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = xe^x$, donc $h'(x)$ est du signe de x. On obtient le tableau de variations de h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ce tableau prouve que $h(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$ et donc que $g'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

Avec $\lim\limits_{-\infty} g = 0$, $\lim\limits_{0} g = 1$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ (par croissances comparées), on obtient alors le tableau de variations de g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g	0	$\nearrow$	$\Vert$ 1 $\Vert$	$\nearrow$	$+\infty$

10.3) On a vu que pour tout $a \in \mathbb{R}^*$:

$$F_a = U(f_a) = \frac{1-e^{-a}}{a}f_a = \frac{e^{-a}-1}{-a}f_a = g(-a)f_a.$$

En prolongeant la fonction g par continuité en 0 (en posant $g(0)=1$), la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante de 0 à $+\infty$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Alors, pour tout réel $\lambda>0$, il existe $x_\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $g(x_\lambda)=\lambda$ et en posant $a_\lambda=-x_\lambda$, on a $g(-a_\lambda)=\lambda$.

La fonction non nulle $f_\lambda : t\mapsto e^{a_\lambda t}$ vérifie alors $U(f_\lambda)=g(-a_\lambda)f_\lambda=\lambda f_\lambda$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \lambda>0, \text{ il existe } f_\lambda\in E\setminus\{0\} \text{ telle que } U(f_\lambda)=\lambda f_\lambda.}$$

Exercice 2

Partie 1

1) Comme H est un sous-espace de E_n, il contient la matrice nulle, donc $T\neq 0_n$ car $T\notin H$.

Alors, $\operatorname{Vect}(T)$ est une droite non incluse dans H (donc $H\cap\operatorname{Vect}(T)=\{0_n\}$) et ainsi :

$$\boxed{E_n=H\oplus\operatorname{Vect}(T)}$$

2) D'après ce qui est rappelé dans l'énoncé, pour tous $i,j\in[\![1,n]\!]$:

$$E_{i,j}^2=E_{i,j}E_{i,j}=\begin{cases}0_n & \text{quand } i\neq j\\ E_{i,i} & \text{quand } i=j\end{cases}$$

Donc, $E_{i,j}^2=0_n$ si et seulement si $i\neq j$, donc :

$$\boxed{\text{Les matrices nilpotentes de la base canonique sont les matrices } E_{i,j} \text{ telles que } i\neq j.}$$

3) On a $U=\sum\limits_{1\le i<j\le n}^{n}(E_{i,j}+E_{j,i})$. Alors, $U+I_n$ est la matrice qui ne contient que des 1 et :

$$\left(U+I_n\right)^2=\begin{pmatrix} n & \cdots & n\\ \vdots & & \vdots\\ n & \cdots & n\end{pmatrix}=n\left(U+I_n\right).$$

Ceci donne $U^2-(n-2)U=\left[U-(n-2)I_n\right]U=(n-1)I_n$ et comme $n\ge 2$, on a $n-1\neq 0$, donc :

$$\frac{1}{n-1}\left[U-(n-2)I_n\right]U=I_n.$$

Ainsi, il existe une matrice $V=\dfrac{1}{n-1}\left[U-(n-2)I_n\right]$ telle que $VU=I_n$, ce qui prouve que :

$$\boxed{U \text{ est inversible, d'inverse } U^{-1}=\frac{1}{n-1}\left[U-(n-2)I_n\right].}$$

4.1) Si H ne contient pas de matrice inversible, alors $I_n \notin H$ car I_n est inversible. D'après la question 1, on a alors :

$$E_n = H \oplus \text{Vect}(I_n).$$

Comme $N \in E_n$:

$$\boxed{\text{Il existe une matrice } A \in H \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tels que } N = A + \alpha I_n.}$$

4.2) Comme N est nilpotente, il existe un entier naturel p non nul tel que $N^p = (A + \alpha I_n)^p = 0_n$ et comme A et I_n commutent, on peut utiliser la formule de binôme qui donne :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \alpha^{p-k} A^k = \alpha^p I_n + \sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \alpha^{p-k} A^k = \alpha^p I_n + A\left(\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \alpha^{p-k} A^{k-1}\right) = 0_n.$$

En posant $Q = -\sum_{k=1}^{p} \binom{p}{k} \alpha^{p-k} X^{k-1} \in \mathbb{R}[X]$, on a alors $\alpha^p I_n - AQ(A) = 0_n$, soit :

$$\boxed{AQ(A) = \alpha^p I_n}$$

4.3) Si $\alpha \neq 0$, alors $A\left[\frac{1}{\alpha^p} Q(A)\right] = I_n$, ce qui prouve que A est inversible. Or, $A \in H$ et on a supposé que H ne contient pas de matrice inversible, donc $\alpha = 0$ et ainsi $N = A \in H$, donc :

$$\boxed{N \in H}$$

5) On a vu que toute matrice $E_{i,j}$ avec $i \neq j$ est nilpotente. Or, la question précédente a prouvé que toute matrice nilpotente est dans H, donc $E_{i,j} \in H$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.

Mais H est un sous-espace de E_n, donc stable par somme. Alors, $U = \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} (E_{i,j} + E_{j,i}) \in H$.

Ainsi, si H ne contient pas de matrice inversible, alors la matrice U, qui est inversible (question 3), appartient à H. Ceci est absurde, donc :

$$\boxed{H \text{ contient au moins une matrice inversible de } E_n.}$$

Partie 2

6) D'après la partie précédente, si $I_n \notin H$, alors $E_n = H \oplus \text{Vect}(I_n)$, donc p la projection sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à H est bien définie.

Soient M, N deux matrices de E_n. On a $M = A + \alpha I_n$ et $N = B + \beta I_n$ avec $A, B \in H$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$MN = (A + \alpha I_n)(B + \beta I_n) = AB + \beta A + \alpha B + \alpha\beta I_n.$$

Et, $AB \in H$ (car H est stable par multiplication) donc $AB + \beta A + \alpha B \in H$ (car H est stable par combinaison linéaire).

Ainsi :

$$p(MN)=\alpha\beta I_n.$$

Or :

$$\begin{cases} p(M)=\alpha I_n \\ p(N)=\beta I_n \end{cases} \text{ donc } p(M)p(N)=\alpha\beta I_n.$$

Finalement, on a bien pour toutes matrices M, N de E_n :

$$\boxed{p(MN)=p(M)p(N)}$$

7) Posons $M=A+\alpha I_n$ avec $A\in H$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. On a $p(M)=\alpha I_n$.

Si $M^2\in H$, alors $p(M^2)=0_n$. Or, d'après la question précédente, $p(M^2)=p(M)^2=(\alpha I_n)^2=\alpha^2 I_n$, donc :

$$p(M^2)=0_n \quad\Leftrightarrow\quad \alpha^2 I_n=0_n \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=0.$$

Alors, $M=A\in H$. Ainsi, on a bien :

$$\boxed{M^2\in H \quad\Rightarrow\quad M\in H}$$

8) Soit $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$ tel que $i\neq j$. On a vu que $E_{i,j}^2=0_n\in H$, donc d'après la question précédente :

$$E_{i,j}\in H.$$

Soit maintenant $i\in[\![1,n]\!]$. Pour $j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}$, on a :

$$E_{i,i}=E_{i,j}E_{j,i}.$$

Comme $E_{i,j}\in H$, $E_{j,i}\in H$ et H est stable par multiplication :

$$E_{i,i}\in H.$$

Finalement :

$$\boxed{E_{i,j}\in H \text{ pour tout } (i,j)\in[\![1,n]\!]^2.}$$

9) Comme pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $E_{i,i}\in H$, on a $I_n=\sum_{i=1}^{n}E_{i,i}\in H$ car H est stable par somme.

Ainsi, supposer que $I_n\notin H$ mène à $I_n\in H$, ce qui est absurde et donc :

$$\boxed{I_n\in H}$$

Partie 3

10) Si on prend $H=\mathcal{T}_2^{\text{sup}}(\mathbb{R})$, le sous-espace des matrices triangulaires supérieures de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a :

$$\dim H=\frac{2(2+1)}{2}=3=\dim\mathcal{M}_2(\mathbb{R})-1.$$

Donc, H est un hyperplan de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

De plus le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure.

Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{T}_2^{\text{sup}}(\mathbb{R})\text{ est un hyperplan de }E_2\text{ stable par multiplication de matrices.}}$$

11) Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A=\left(a_{i,j}\right)_{i,j\le[\![1,n]\!]}$ et $B=\left(b_{i,j}\right)_{i,j\le[\![1,n]\!]}$.

- Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, on a $\lambda A+B=\left(\lambda a_{i,j}+b_{i,j}\right)_{i,j\le[\![1,n]\!]}$ et :

$$tr(\lambda A+B)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{i,i}+b_{i,i})=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_{i,i}+\sum_{i=1}^{n}b_{i,i}=\lambda\,tr(A)+tr(B).$$

  Donc :

$$\boxed{tr(\lambda A+B)=\lambda\,tr(A)+tr(B)}$$

- Posons $AB=\left(c_{i,j}\right)_{i,j\le[\![1,n]\!]}$ et $BA=\left(d_{i,j}\right)_{i,j\le[\![1,n]\!]}$.

  Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, on a $c_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,j}$ et $d_{i,j}=\sum_{k=1}^{n}b_{i,k}a_{k,j}$, donc :

$$tr(AB)=\sum_{i=1}^{n}c_{i,i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}b_{k,i}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}b_{k,i}a_{i,k}=\sum_{k=1}^{n}d_{k,k}=tr(BA).$$

  Ainsi :

$$\boxed{tr(AB)=tr(BA)}$$

12) On a :

$$\boxed{\dim H+\dim H^{\perp}=\dim E_n}$$

Comme H est un hyperplan, on a $\dim H=\dim E_n-1$, et donc :

$$\boxed{\dim H^{\perp}=1}$$

13) Soit une matrice B de H.

Montrer que $B\,{}^tA$ est proportionnelle à ${}^tA$ revient à montrer que ${}^t(B\,{}^tA) = A\,{}^tB$ est proportionnelle à A.

Or, comme $\dim H^{\perp} = 1$ et A est un élément non nul de $H^{\perp}$, on a $H^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)$, donc montrer que $A\,{}^tB$ est proportionnelle à A revient à montrer $A\,{}^tB \in H^{\perp}$.

Soit $M \in H$. On a :

$$\left(M \mid A\,{}^tB\right) = tr\left({}^tM\,(A\,{}^tB)\right) = tr\,({}^tMA\,{}^tB) = tr\,({}^tB\,{}^tMA) = tr\left({}^t(MB)A\right) = \left(MB \mid A\right).$$

Or, $M \in H$, $B \in H$ et H est stable par multiplication, donc $MB \in H$ et comme $A \in H^{\perp}$, on a $\left(MB \mid A\right) = 0$.

Ainsi, pour toute $M \in H$, $\left(M \mid A\,{}^tB\right) = 0$, donc $A\,{}^tB \in H^{\perp}$, et ainsi :

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } B \text{ de } H,\ B\,{}^tA \text{ est proportionnelle à } {}^tA.}$$

14) On vient de prouver que pour toute matrice B de H, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B\,{}^tA = \lambda\,{}^tA$.

Si ${}^tA$ est inversible, alors pour toute matrice B de H, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$B = B\,{}^tA({}^tA)^{-1} = \lambda\,{}^tA({}^tA)^{-1} = \lambda I_n.$$

Autrement dit, pour tout $B \in H$, $B \in \mathrm{Vect}(I_n)$, donc $H \subset \mathrm{Vect}(I_n)$ et $\dim H \leq 1$.

Or, $\dim H = \dim E_n - 1 = n^2 - 1 \geq 3$ car $n \geq 2$. Ceci est donc absurde et :

$$\boxed{{}^tA \text{ n'est pas inversible.}}$$

15) Soit $B \in H$.

On veut montrer que $W = \mathrm{Im}\,({}^tA)$ est stable pour B, c'est-à-dire que pour tout $Y \in W = \mathrm{Im}\,({}^tA)$, $BY \in W$ ou encore que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, $B({}^tAX) \in W$.

Or, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $B\,{}^tA = \lambda\,{}^tA$, donc pour tout $X \in \mathbb{R}^n$:

$$B({}^tAX) = (B\,{}^tA)X = \lambda\,{}^tAX = {}^tA(\lambda X) \in W = \mathrm{Im}\,({}^tA).$$

Ainsi, quel que soit B dans H :

$$\boxed{W = \mathrm{Im}\,({}^tA) \text{ est stable pour } B.}$$

16) Pour toute matrice A de E_n, les applications $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ sont des endomorphismes de E_n, donc φ_P, qui est la composée de $M \mapsto P^{-1}M$ par $N \mapsto NP$, est un endomorphisme de E_n.

De plus, pour toute $N \in E_n$, on a :

$$\varphi_P(M) = N \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}MP = N \quad \Leftrightarrow \quad M = PNP^{-1}.$$

Donc, toute matrice N de E_n admet un unique antécédent par φ_P, ce qui prouve que φ_P est bijective.

Finalement, φ_P est un endomorphisme bijectif de E_n, soit :

$$\boxed{\varphi_P \text{ est un automorphisme de } E_n.}$$

17) Comme φ_P est un automorphisme de E_n, on a $\dim \varphi_P(H) = \dim H$.

Soit $B \in H$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à B. On a donc $B = M_{\mathcal{B}_c}(u)$ où $\mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Comme P est la matrice de passage de $\mathcal{B}_c$ à $\mathcal{B}_1$, on a :

$$M_{\mathcal{B}_1}(u) = P^{-1}BP = \varphi_P(B).$$

Or, d'après la question 15, $\operatorname{Im}({}^tA)$ est stable pour B, donc pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, $e_k \in \operatorname{Im}({}^tA)$ et :

$$Be_k \in \operatorname{Im}({}^tA) = \operatorname{Vect}\left(e_1, \dots, e_p\right).$$

Ceci prouve que la matrice $M_{\mathcal{B}_1}(u)$ est de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline 0_{n-p,p} & A_3 \end{array}\right) \text{ avec } A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}),\ A_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R}) \text{ et } A_3 \in \mathcal{M}_{n-p,n-p}(\mathbb{R}).$$

Si on appelle F le sous-espace vectoriel de E_n des matrices de cette forme, on a alors :

$$\forall\, B \in H\ ,\ M_{\mathcal{B}_1}(u) = \varphi_P(B) \in F.$$

Soit :

$$\varphi_P(H) \subset F.$$

Or :

$$F = \operatorname{Vect}\left(E_{i,j}, (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \cup [\![1,n]\!] \times [\![p+1,n]\!]\right).$$

La famille $\left(E_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2 \cup [\![1,n]\!]\times[\![p+1,n]\!]}$ est génératrice de F et, comme elle est extraite de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, elle est libre. Ainsi, c'est une base de F et :

$$\dim F = \operatorname{Card}\left(E_{i,j}, (i,j) \in [\![1,p]\!]^2 \cup [\![1,n]\!] \times [\![p+1,n]\!]\right) = \operatorname{Card}\left([\![1,p]\!]^2 \cup [\![1,n]\!] \times [\![p+1,n]\!]\right).$$

Les ensembles $[\![1,p]\!]^2$ et $[\![1,n]\!] \times [\![p+1,n]\!]$ étant disjoints, on obtient :

$$\dim F = \operatorname{Card}\left([\![1,p]\!]^2\right) + \operatorname{Card}\left([\![1,n]\!] \times [\![p+1,n]\!]\right) = p^2 + n(n-p) = n^2 - p(n-p).$$

Finalement, comme $\dim \varphi_P(H) = \dim H$ et $\varphi_P(H) \subset F$, on a $\dim H = \dim \varphi_P(H) \le \dim F$, d'où :

$$\boxed{\dim H \le n^2 - p(n-p)}$$

18) On a vu que $\dim H = \dim E_n - 1 = n^2 - 1$, donc :

$$n^2 - 1 \le n^2 - p(n-p) \quad \Leftrightarrow \quad p(n-p) \le 1.$$

Remarquons que A n'est pas nulle, donc ${}^tA$ non plus et $p = rg\,({}^tA) \ge 1$.

D'après le théorème dur rang :

$$\dim \mathbb{R}^n = rg\,({}^tA) + \dim(\ker {}^tA) \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\ker {}^tA) = \dim \mathbb{R}^n - rg\,({}^tA) = n - p.$$

De plus, d'après la question 14, ${}^tA$ n'est pas inversible donc $\dim(\ker {}^tA) = n - p \ge 1$.

Ainsi, $p \geq 1$ et $n-p \geq 1$, donc $p(n-p) \geq 1$ et avec $p(n-p) \leq 1$, on obtient :

$$p(n-p) = 1.$$

Comme p et $n-p$ sont des entiers naturels, on obtient :

$$p = n-p = 1.$$

Ceci implique que $n = 2$.

Ainsi, l'existence d'un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit implique que $n = 2$, donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'hyperplan de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ stable par produit quand } n \geq 3.}$$

Exercice 3

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

1.1 La série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ est une série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, elle converge et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2.}$$

1.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1[$, $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k$.

La fonction *f* est polynomiale, donc dérivable sur $[0,1[$, avec pour tout $x \in [0,1[$, $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$.

Mais, on a aussi pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$, donc :

$$f'(x) = \frac{(n+1)x^n(x-1) - x^{n+1} + 1}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in [0,1[$:

$$\boxed{f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}}$$

1.3 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} k\,(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{n} k\,\frac{1}{2^{k-1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} k\,\frac{1}{2^k}.$$

D'après la question précédente avec $x = \frac{1}{2} \in [0,1[$:

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1}{2}\,\frac{n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{n}{2^n} - 2\,\frac{n+1}{2^n} + 2.$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n+1}{2^n} = 0$, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n \geq 1} b_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 2.}$$

1.4 Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} n\,\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{k=1}^{n} 1\right)\frac{1}{2^n} = \sum_{1 \leq k \leq n \leq N} \frac{1}{2^n} = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{n=k}^{N} \frac{1}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}\,\frac{1 - \frac{1}{2^{N-k+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^{k-1}}\left(1 - \frac{1}{2^{N-k+1}}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^N}\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^N} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2^N}\,N = \frac{1 - \frac{1}{2^N}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1}{2^N}\,N$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{N} n\,\frac{1}{2^n} = 2\left(1 - \frac{1}{2^N}\right) - \frac{N}{2^N}}$$

On a vu que $\sum_{n=1}^{N} b_n = \sum_{n=1}^{N} n\,\frac{1}{2^n}$ et, comme $\lim\limits_{N \to +\infty} \frac{1}{2^N} = \lim\limits_{N \to +\infty} \frac{N}{2^N} = 0$, on retrouve bien :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 2}$$

2. Pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{n \ln n}$ et $a_1 = 0$.

2.1 La suite $(n \ln n)_{n \geq 2}$ est strictement croissante, strictement positive et de limite égale à $+\infty$, donc :

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n \geq 2} \text{ est strictement décroissante et de limite nulle.}}$$

2.2 Posons $g(t)=\dfrac{1}{t\ln t}$.

La fonction g est continue strictement décroissante et strictement positive sur $[2;+\infty[$.

Par comparaison série-intégrale, la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ et la suite $(I_n)_{n\geq 2}$ avec $I_n=\int_2^n g(t)\,dt=\int_2^n \dfrac{dt}{t\ln t}$ sont de même nature. Or :

$$I_n=\int_2^n \frac{dt}{t\ln t}=\big[\ln(\ln t)\big]_2^n=\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty.$$

Donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} a_n \text{ diverge.}}$$

2.3 Pour tout entier $n\geq 2$, $n\,a_n=\dfrac{1}{\ln n}$, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,a_n=0}$$

2.4 Pour tout entier $n\geq 2$:

$$B_n=\sum_{k=1}^n b_k=\sum_{k=1}^n k\,(a_k-a_{k+1})=\sum_{k=1}^n\big(k\,a_k-k\,a_{k+1}\big)=\sum_{k=1}^n\big(k\,a_k-(k+1)\,a_{k+1}+a_{k+1}\big)$$
$$=\sum_{k=1}^n\big(k\,a_k-(k+1)\,a_{k+1}\big)+\sum_{k=1}^n a_{k+1}=\sum_{k=1}^n\big(k\,a_k-(k+1)\,a_{k+1}\big)+\sum_{k=2}^{n+1} a_k$$

On obtient par télescopage :

$$B_n=a_1-(n+1)\,a_{n+1}+\sum_{k=2}^{n+1}a_k=\sum_{k=1}^{n+1}a_k-(n+1)\,a_{n+1}=A_{n+1}-(n+1)\,a_{n+1}.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} n\,a_n=0$ et $\lim_{n\to+\infty} A_n=\lim_{n\to+\infty} I_n=+\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} B_n=+\infty$ et donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} b_n \text{ diverge.}}$$

3. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, positive et la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

3.1 Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, on a pour tout $k\in[\![n+1,2n]\!]$, $a_{2n}\leq a_k$ donc :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n}\leq\sum_{k=n+1}^{2n} a_k.$$

Soit :

$$\boxed{n\,a_{2n}\leq u_n}$$

3.2 Comme la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est positive et la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, on a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$0 \leq n\,a_{2n} \leq u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k = R_n\,.$$

Or, $R_n \to 0$ (car la série des a_n converge), donc d'après le théorème des gendarmes, on a :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,a_{2n} = 0}$$

3.3 On a alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\,a_{2n} = 0$ et pour tout pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$(2n+1)\,a_{2n+2} \leq (2n+1)\,a_{2n+1} \leq (2n+1)\,a_{2n}\,.$$

Or, $a_n \to 0$ (car la série des a_n converge) et $2n\,a_{2n} \to 0$, donc :

- $(2n+1)\,a_{2n+2} = (2n+2)\,a_{2n+2} - a_{2n+2} \to 0-0=0$;
- $(2n+1)\,a_{2n} = 2n\,a_{2n} + a_{2n} \to 0+0=0$.

Alors, à nouveau à l'aide du théorème des gendarmes, on obtient : $\lim\limits_{n\to+\infty}(2n+1)\,a_{2n+1} = 0$.

Ainsi, les deux suites extraites $\left(2n\,a_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left((2n+1)\,a_{2n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers 0, donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,a_n = 0}$$

3.4 On a plus haut que, pour tout entier $n\geq 2$, $B_n = A_{n+1} - (n+1)\,a_{n+1}$ (le calcul fait dans la question *2.4* est valable quelle que soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Ici, la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge, donc $A_{n+1} \to \sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ et on vient de voir que $n\,a_n \to 0$, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} B_n = \lim_{n\to+\infty}\left(A_{n+1} - (n+1)\,a_{n+1}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge et } \sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k\,.}$$

4. La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, de limite nulle et la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

4.1 On veut prouver que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n \geq 0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $a_{n_0} < 0$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, on a alors pour tout entier $n\geq n_0$, $a_n \leq a_{n_0} < 0$ et en passant à la limite quand *n* tend vers l'infini, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \leq a_{n_0} < 0\,.$$

Ceci est absurde, donc :

$$\boxed{(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est une suite positive.}}$$

4.2 On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$B_n = A_{n+1} - (n+1)\,a_{n+1} = A_n + a_{n+1} - n\,a_{n+1} - a_{n+1} = A_n - n\,a_{n+1}.$$

Et, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \geq m$, on a $B_n = A_m - m\,a_{n+1}$ pour $n = m$ et pour $n > m$:

$$B_n - A_m = A_n - A_m - n\,a_{n+1} = \sum_{k=m+1}^{n} a_k - n\,a_{n+1}.$$

Or, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, donc pour tout $k \in [\![m+1, n]\!]$, $a_k \geq a_{n+1}$, donc :

$$B_n - A_m \geq \sum_{k=m+1}^{n} a_{n+1} - n\,a_{n+1} = (n-m)\,a_{n+1} - n\,a_{n+1} = -\,m\,a_{n+1}.$$

Et ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \geq m$:

$$\boxed{B_n \geq A_m - m\,a_{n+1}}$$

4.3 On a alors, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \geq m$:

$$A_m \leq B_n + m\,a_{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = B$ (car $\sum\limits_{n\geq1} b_n$ converge), on obtient passant à la limite quand n tend vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$A_m \leq B.$$

Ainsi, la suite de somme partielles $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée et comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq1} a_n \text{ converge.}}$$

Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive, et que la série $\sum\limits_{n\geq1} a_n$ converge. On retrouve les hypothèses de ma question précédente, donc les résultats qui en découlent, d'où :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n}$$

4.4 Remarquons que dans la question 3, l'hypothèse « $\sum\limits_{n\geq1} a_n$ converge » entraine la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0. Avec les questions 3 et 4, on peut donc énoncé le résultat :

> Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle, alors la convergence de $\sum\limits_{n\geq1} a_n$ équivaut à celle de $\sum\limits_{n\geq1} b_n$ (et dans ce cas, les sommes sont égales).

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5.1 La série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ est alternée. Comme la suite $\left(|a_n|\right)_{n\in\mathbb{N}^*} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et de limite nulle, la série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ vérifie le critère spécial des séries alternées, donc :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge.}}$$

5.2 Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$b_n = n\,(a_n - a_{n+1}) = n\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}}\right) = (-1)^n\left(\sqrt{n} + \frac{n}{n+1}\sqrt{n+1}\right).$$

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} |b_n| = +\infty$, donc $\left(|b_n|\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne tend pas vers 0 et :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} b_n \text{ diverge.}}$$

Ici, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de limite nulle, mais non décroissante, donc :

$$\boxed{\text{Si on enlève l'hypothèse décroissance le résultat énoncé à la question } \textit{4.4} \text{ n'est plus valable.}}$$