DM de Mathématiques n° 2

Sujet adapté de X option P', 1989

Dans tout le problème, on considère des suites de nombres réels à propos desquelles on adopte les notations suivantes.

A toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on associe les deux suites $v = Tu$ et $w = T^2u$ de termes généraux respectifs :

$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k \quad \text{et} \quad w_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k .$$

Si $v = Tu$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, on dit que la suite *u* converge en moyenne vers ℓ, et si $w = T^2u$ converge vers ℓ, on dit que la suite *u* converge en moyenne itérée vers ℓ.

La suite *v* est appelée *moyenne de Césaro* de la suite *u*.

Partie 1

Soient ℓ un nombre réel et *u* une suite de nombres réels.

1°) a) Montrer que si la suite *u* converge vers 0, elle converge en moyenne vers 0.

b) Montrer que si la suite *u* converge vers ℓ, elle converge en moyenne vers ℓ.

c) Montrer que si *u* converge en moyenne vers ℓ, elle converge en moyenne itérée vers ℓ.

d) Donner un exemple de suite divergente qui converge en moyenne vers ℓ.

e) Donner un exemple de suite ne convergeant pas en moyenne vers ℓ mais convergeant en moyenne itérée vers ℓ.

f) Montrer que si la suite *u* diverge vers + ∞, il en est de même de $v = Tu$ et de $w = T^2u$.

2°) On suppose dans cette question que la suite *u* est à termes positifs.

a) Montrer que si *u* converge en moyenne vers 0, la suite de terme général $\sqrt{u_n}$ aussi.

☺ *On pourra penser à l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans* $\mathbb{R}^{n+1}$ *muni du produit scalaire canonique.*

b) Montrer que si *u* est décroissante, la suite de terme général $u_n\sqrt{n}$ converge vers 0 si et seulement si elle converge en moyenne vers 0.

c) Montrer que si *u* est décroissante, la suite de terme général nu_n converge vers 0 si et seulement si elle converge en moyenne itérée vers 0.

Partie 2

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On note $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles associées à la série $\sum u_n$ (pour $n\in\mathbb{N}$, $s_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$) et v la suite de terme général $n u_n$.

1°) **a)** Vérifier la formule $s-Ts=Tv$.

b) Si s converge vers $\ell\in\mathbb{R}$, montrer que v converge en moyenne vers 0.

c) Si s converge en moyenne vers ℓ, montrer que v converge en moyenne vers 0 si et seulement si la série de terme général u_n converge.

2°) **a)** Donner un exemple de suite de terme général u_n, telle que s converge en moyenne sans que v converge en moyenne vers 0.

b) Etudier la convergence en moyenne des suites s et v quand la suite u est définie par $u_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

c) Montrer que si s converge en moyenne, v converge en moyenne itérée vers 0. La réciproque est-elle exacte ?

Partie 3

On appelle E l'espace vectoriel des suites réelles convergentes.

On munit E de la norme infinie $\|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ pour tout u de E (toute suite convergente étant bornée, cette norme est bien définie sur E).

1°) Justifier que l'application T qui à tout u de E associe sa moyenne de Césaro Tu est un endomorphisme de E.

2°) Montrer que T est lipschitzienne. L'application T est-elle continue sur E ?

3°) Déterminer les points fixes de T.

4°) Soit $u\in E$, de limite $\ell\in\mathbb{R}$.

On définit la suite $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de E par $u^{(0)}=u$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u^{(k+1)}=Tu^{(k)}$.

a) Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u^{(k)}$ converge vers ℓ.

b) Montrer que la suite réelle $\left(\|u^{(k)}\|_\infty\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par $|u_0|$.

c) Montrer que si $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans E, alors c'est vers la suite constante dont tous les termes valent u_0.