DS de Mathématiques n° 1

4 heures

Calculatrices autorisées

Sujet adapté de E3A - PSI - 2016 et 2019

N.B. Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

****

Le sujet comporte 5 pages.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on identifie $\mathbb{R}[X]$ à l'ensemble des fonctions polynomiales.

On note *E* l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit $E = C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Pour tout élément *f* de *E*, on pose :

$$U(f):\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,;\, x\mapsto \int_{x-1}^{x} f(t)\,dt\,.$$

Soit $f\in E$.

1) On suppose *f* est *T*-périodique. Montrer que pour tout $a\in\mathbb{R}$:

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt\,.$$

2) On suppose dans cette question uniquement que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2.1) Prouver que si *f* est *T*-périodique, il en est de même pour f'.

2.2) Montrer que la réciproque est fausse.

2.3) On suppose *f* de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et f' *T*-périodique.

Montrer que *f* est la somme d'une fonction *T*-périodique et d'une fonction linéaire.

3) Montrer que la fonction $U(f)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

4) Montrer que l'application *U* qui à $f\in E$ associe $U(f)$ est un endomorphisme de *E*.

5) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}_n = \left(1, X, \ldots, X^n\right)$ sa base canonique (on rappelle que l'on identifie E_n à $\mathbb{R}_n[x]$).

5.1) Montrer que la restriction de U à E_n induit un endomorphisme de E_n, noté U_n.

5.2) Ecrire la matrice de U_n dans la base $\mathcal{B}_n$.

5.3) L'endomorphisme U_n est-il bijectif ?

6) Justifier que si $f \in \ker U$, alors :

(i) $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$;

(ii) f est périodique de période 1.

7) A-t-on : $\ker U = \left\{ f \in E,\, f \text{ périodique de période 1 et } \int_0^1 f(t)\,dt = 0 \right\}$?

8) Donner explicitement une fonction non nulle de $\ker U$ et en donner une représentation graphique sur l'intervalle $\left[-1\,;2\right]$.

9) L'endomorphisme U est-il surjectif ?

10) Soient a un réel non nul et $f_a : t \mapsto e^{at}$, définie sur $\mathbb{R}$.

10.1) Déterminer $F_a = U(f_a)$.

10.2) Dresser le tableau de variations de la fonction réelle $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$.

10.3) Montrer alors que pour tout réel $\lambda > 0$, il existe $f_\lambda \in E \setminus \{0\}$ telle que $U(f_\lambda) = \lambda f_\lambda$.

Exercice 2

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $E_n = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B} = \left(E_{i,j}\right)_{(i,j) \in [\![1,n]\!]^2}$ la base canonique de E_n. On rappelle que pour tous $r, t, u, v \in [\![1,n]\!]$:

$$E_{r,t}E_{u,v} = \begin{cases} 0_n & \text{quand } t \neq u \\ E_{r,v} & \text{quand } t = u \end{cases} = \delta_{t,u} E_{r,v}$$

où $\delta_{t,u}$ est le symbole de Kronecker.

Pour $M = (m_{i,j}) \in E_n$, on notera dans tout l'exercice, ${}^tM$ la transposée de M.

On dira qu'une matrice M de E_n est <u>*nilpotente*</u> s'il existe un entier naturel non nul r tel que $M^r = 0_n$.

Par exemple, la matrice $E_{1,2}$ de $\mathcal{B}$ est nilpotente car $E_{1,2}^2 = 0_n$.

On dira qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$ (assimilé à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$) est <u>*stable pour une matrice A*</u> de E_n si, pour tout $X \in V$, on a $AX \in V$.

Partie 1

Soit H un hyperplan de E_n.

On veut montrer que H contient au moins une matrice inversible de E_n.

1) Soit T une matrice n'appartenant pas à H. Justifier que l'on a $E_n = H \oplus \text{Vect}(T)$.
2) Déterminer les matrices nilpotentes de la base canonique.
3) On pose $U = \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} (E_{i,j} + E_{j,i})$.

   Montrer que U est inversible et donner son inverse en fonction de U.
4) On suppose que H ne contient pas de matrice inversible.

   Soit N une matrice nilpotente.

   4.1) Justifier qu'il existe une matrice A de H et un réel α tels que $N = A + \alpha I_n$.

   4.2) Montrer alors qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $AQ(A) = \alpha^p I_n$.

   4.3) En déduire que $N \in H$.
5) Montrer alors que H contient au moins une matrice inversible de E_n.

Partie 2

Dans cette partie et la suivante, on suppose que H est stable par multiplication, autrement dit que pour toutes matrices M et N de H, la matrice MN est encore dans H.

On se propose de prouver que $I_n \in H$. On raisonne par l'absurde en supposant que $I_n \notin H$.

6) On note p la projection sur $\text{Vect}(I_n)$ parallèlement à H.

   Prouver que pour toutes matrices M, N de E_n, on a $p(MN) = p(M)p(N)$.
7) Démontrer que : $M^2 \in H \quad \Rightarrow \quad M \in H$.
8) Prouver alors que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $E_{i,j} \in H$.
9) Conclure.

Partie 3

Dans cette partie, on se propose de prouver que $n = 2$, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par produit quand $n \ge 3$.

Pour toute matrice $M = (m_{i,j})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$, ce réel est appelé la <u>trace</u> de M.

10) On prend ici $n = 2$. Exhiber un hyperplan de E_2 stable par multiplication de matrices.
11) Prouver que pour toutes matrices A, B de E_n, on a :
    - $tr(\lambda A + B) = \lambda\, tr(A) + tr(B)$ pour tout reél λ ;
    - $tr(AB) = tr(BA)$.

On admet dans la suite que l'application qui à tout couple (A,B) de E_n associe $\left(A \mid B\right) = tr({}^tAB)$ définit un produit scalaire sur E_n (c'est le produit scalaire canonique, pour lequel la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée). Ce produit scalaire munit E_n d'une structure d'espace euclidien.

Soit *A* un élément non nul de $H^{\perp}$, l'orthogonal de *H* (qui est toujours un hyperplan de E_n stable par produit matriciel) pour le produit scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donné ci-dessus.

12) Rappelez la formule liant $\dim H^{\perp}$ et $\dim H$ (on ne demande pas de preuve) et en déduire la dimension de $H^{\perp}$.
13) Montrer que pour toute matrice *B* de *H*, $B\,{}^tA$ est proportionnelle à ${}^tA$.
14) Montrer que ${}^tA$ n'est pas inversible.
15) Montrer que le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, $W = \mathrm{Im}({}^tA)$ est stable pour *B*, quel que soit *B* dans *H* (*W* est stable pour tous les éléments de *H*).

On pose $p = rg({}^tA)$ et on considère $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $W = \mathrm{Im}({}^tA)$, complétée en une base $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. On appelle *P* la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à la base $\mathcal{B}_1$.

16) Montrer que l'application $\varphi_P : E_n \to E_n\,; M \mapsto P^{-1}MP$ est un automorphisme de E_n.
17) En déduire que l'on a :

$$\dim H \leq n^2 - p(n-p).$$

18) Conclure.

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}),\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \ \text{ et } \ B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k .$$

1. On prend, ***dans cette question***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

1.1 Vérifier que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.

1.2 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1[$, on pose $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.

Après avoir justifié son existence, calculer $f'(x)$ de deux façons différentes.

1.3 Montrer alors que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge et calculer sa somme.

1.4 Soit $N \in \mathbb{N}^*$. En écrivant $n = \sum_{k=1}^{n} 1$, montrer que $\sum_{n=1}^{N} n \frac{1}{2^n} = 2\left(1 - \frac{1}{2^N}\right) - \frac{N}{2^N}$.

Retrouver alors la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$.

2. On prend, ***<u>dans cette question</u>***, $a_1 = 0$ et pour tout entier $n \geq 2$, $a_n = \frac{1}{n \ln n}$.

2.1 Etudier la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ (monotonie, limite).

2.2 Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} a_n$?

2.3 Calculer $\lim_{n \to +\infty} n\,a_n$.

2.4 Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} b_n$?

3. On suppose, ***<u>dans cette question</u>***, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et positive, et que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

3.1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n\,a_{2n} \leq u_n$.

3.2 En déduire $\lim_{n \to +\infty} n\,a_{2n}$.

3.3 Démontrer alors que $\lim_{n \to +\infty} n\,a_n = 0$.

3.4 Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge et comparer sa somme avec celle la série $\sum_{n\geq 1} a_n$.

4. On suppose, ***<u>dans cette question</u>***, que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante, de limite nulle, et que la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

4.1 Prouver que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite positive.

4.2 Vérifier que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout entier $n \geq m$, on a $B_n \geq A_m - m\,a_{n+1}$.

4.3 En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge. A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?

4.4 Enoncer une équivalence avec les résultats des questions 3 et 4.

5. On prend, ***<u>dans cette question</u>***, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5.1 Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.

5.2 La série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge-t-elle ? Que conclure pour le résultat énoncé à la question *4.4* ?