Exercices d'entrainement chapitres 11 à 15 - Enoncés

Chapitre 11

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{1+nt+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt$.

2) Calculer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx}$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer l'existence de $J = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1}\,dx$, puis que $J = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{2}{n^3}$.

3) Montrer que $\int_0^1 x^x\,dx = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^n}$.

4) Donner l'intervalle de définition de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}\,dt$.

   Quelle est la limite de *f* en $+\infty$? Montrer que *f* est continue sur $\mathbb{R}_+$, puis qu'elle est de classe C^1 sur tout intervalle de la forme $[a,+\infty[$ avec $a>0$. En déduire que *f* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Trouver une équation différentielle vérifiée par *f*.

5) Donner le domaine de définition de $f : x \mapsto \int_0^1 \dfrac{t^x - 1}{1+t}\,dt$ et étudier sa monotonie.

   Calculer $f(x+1)+f(x)$. Déterminer la limite et un équivalent de *f* en -1^+ et $+\infty$.

6) Montrer que $f : x \mapsto \int_0^1 \dfrac{(t-1)t^x}{\ln t}\,dt$ est définie sur $D =]-1,+\infty[$.

   Prouver que *f* est de classe C^1 sur *D* et en trouver une expression simple.

Chapitres 12-13-14

1) On donne une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

   Trouver trois réels *a*, *b* et *c* tels que $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)} = \dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1} + \dfrac{c}{k+2}$.

   On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que tel que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = \dfrac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}$. Déterminer α.

   La variable X admet-elle une espérance ? une variance ? Si oui, la (les) calculer.

2) *n* personnes lancent simultanément *n* pièces équilibrées.

   Déterminer la probabilité qu'une personne au moins n'ait pas le même résultat que les autres.

   On note *X* la variable aléatoire représentant le nombre de lancers nécessaires pour qu'au moins une personne n'ait pas le même résultat que les autres. Déterminer l'espérance et la variance de *X*.

3) Deux variables aléatoires indépendantes *X* et *Y* suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs *a* et *b*.

   Trouver la loi suivie par leur somme, d'abord en utilisant la somme des probabilités, puis en utilisant les fonctions génératrices.

   Application : Calculer $\dfrac{Cov(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)}$ avec $U = X+Y$ et $V = X-Y$.

4) On tire simultanément deux cartes dans un jeu de 52. Chaque carte tirée rapporte sa valeur en points, le valet valant 11 points, la dame 12, le roi 13.

   On note respectivement X et Y les variables aléatoires représentant le nombre de points de la carte de plus basse et de plus haute valeur tirées.

   Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y), les lois marginales et la covariance.

5) On lance une pièce équilibrée une infinité de fois et on note X_n la variable aléatoire valant 1 si on obtient pile au $n^{\text{ième}}$ tirage et 0 sinon. On obtient ainsi une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. On note T la variable aléatoire égale au plus petit entier n tel qu'on ait deux 1 consécutifs aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ tirages.

   On définit les évènements :

   A_n = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n = 0$ » ;

   B_n = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n = 1$ ».

   On pose $p_n = P(A_n)$ et $q_n = P(B_n)$.

   a. Calculer $P(T=1)$ et $P(T=2)$.

   b. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}$, puis calculer p_n et q_n.

   c. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $P(T=n) = \dfrac{F_n}{2^{n+1}}$ où $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de Fibonacci ($F_0 = 0$ et $F_1 = 1$).

6) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi géométrique de paramètres respectifs p et q dans $]0,1[$. On pose $Z = \min(X,Y)$.

   Pour $n\in\mathbb{N}^*$, donner $P(X>n)$. Donner la loi de Z et son espérance.

7) On note S_n la somme de n variables aléatoires indépendantes $X_1,\dots,X_n$, suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $p\in\,]0,1[$.

   Donner l'espérance et la variance de $\frac{1}{n}S_n$.

   Pour tout réel $\varepsilon>0$, établir que $P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \dfrac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}$.

   Quel résultat de cours ne retrouve-t-on quand n tend vers l'infini ?

8) Deux variables aléatoires indépendantes X et Y suivent une loi de Poisson de paramètres respectifs λ et μ, réels strictement positifs.

   Montrer que $Z = X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

   Pariez-vous que X est pair ou impair ?

9) On lance une infinité de fois une pièce qui donne pile avec une probabilité $p\in\,]0,1[$.

   On définit les évènements A : « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre pair de lancers » et B : « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 3 ».

   Calculer $P(A)$ et $P(B)$. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

10) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, suivant toutes deux une loi de Poisson de paramètre $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. On pose $M = \begin{pmatrix} (-1)^X & 1 \\ (-1)^Y & 1 \end{pmatrix}$.

Quelle est la probabilité que M soit inversible ? Qu'elle admette 1 pour valeur propre ? Quelle soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$? sur $\mathbb{C}$?

11) Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, soit un système complet d'évènements $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ (avec $n \geq 2$) tel que $P(A_1) = \dfrac{1}{2n}$ et $(P(A_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ est arithmétique.

Déterminer $P(A_i)$, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Déterminer $P(B)$ où B est un évènement tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(B \mid A_i) = \dfrac{i}{2n}$.

12) Une poule pond un nombre N d'œufs suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. K d'entre eux éclosent avec une probabilité $p \in]0,1[$, de manière indépendante les uns des autres.

Donner l'ensemble des valeurs prises par N, la probabilité de $K = k$ sachant que n œufs ont été pondus et en déduire la loi de K.

13) On lance n fois 2 dés non truqués A et B. On note X la variable aléatoire associée au nombre de fois où le chiffre de A est strictement supérieur à celui de B.

Donner la loi de X, son espérance et sa variance.

Rappeler l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev.

Exprimer $p_n = P\left(0,9 \leq \dfrac{X}{E(X)} \leq 1,1\right)$ à l'aide de $|X - E(X)|$ et trouver n tel que $p_n \geq 0,99$.

14) c chasseurs se trouvent face à ℓ lapins munis de fusils à carottes. Les lapins touchent les chasseurs indépendamment avec une probabilité $p \in]0,1[$.

On note X_i l'indicatrice de l'évènement C_i : « le i-ème chasseur est touché » et T la variable aléatoire représentant le nombre de chasseurs touchés par les lapins.

Déterminer la loi de T et la probabilité que C_i se produise.

Chapitre 15

1) Soit $E = C^1([0,1], \mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose :

$$\varphi(f, g) = f(0)g(0) + f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt.$$

Montrer que φ définit un produit scalaire sur E.

2) Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique, orthonormaliser en suivant le procédé de Gram-Schmidt, la famille (u, v, w) avec $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (-1,1,0)$.

3) Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire canonique, déterminer l'orthogonal de :

$$F = \{(X^2 - X)P, P \in \mathbb{R}_1[X]\}.$$

4) Soient E un espace euclidien et $e_1, \dots, e_n$ des vecteurs unitaires de E.

Montrer que si, pour tout $x \in E$, $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2$, alors $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de E.

5) Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien E.

Exprimer $(F \cup G)^\perp$ en fonction de $F^\perp$ et $G^\perp$.

Exercices d'entrainement chapitres 11 à 15 - Corrigés

Chapitre 11

1) Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $f_n : t \mapsto \dfrac{\sin(nt)}{1+nt+t^2}$ définie sur $\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$ (comme quotient de telles fonctions).
- Comme pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ et tout $n\in\mathbb{N}$, on a $|f_n(t)|\leq \dfrac{1}{1+nt}$ et $\dfrac{1}{1+nt}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle, qui est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$, $|f_n(t)|\leq \dfrac{1}{1+t^2}$ et la fonction $t\mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de convergence dominée, on peut alors conclure que :

$$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \text{ et } \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 0.}$$

2) Soit $x\in\mathbb{R}_+$. Pour $x=0$, on a $\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx} = \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$ et pour $x>0$, on a $0<e^{-x}<1$ et :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx} = x^2\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-x})^n = x^2\,\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x^2}{e^x-1}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} x^2 e^{-nx} = \begin{cases} 0 & \text{pour } x=0 \\ \dfrac{x^2}{e^x-1} & \text{pour } x\in\mathbb{R}_+^* \end{cases}}$$

Remarquons que $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^x-1} = \lim_{x\to0} x\dfrac{x}{e^x-1} = 0\times1 = 0$.

La fonction $x\mapsto \dfrac{x^2}{e^x-1}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Comme ci-dessus, on a $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2}{e^x-1}=0$, donc $\int_0 \dfrac{x^2}{e^x-1}dx$ converge.
- On a $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^4}{e^x} = 0$ par croissances comparées, donc $\dfrac{x^2}{e^x-1} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, et comme $\int^{+\infty}\dfrac{dx}{x^2}$ converge, $\int^{+\infty}\dfrac{x^2}{e^x-1}dx$ converge.

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'intégrale } J=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx \text{ existe bien.}}$$

On a :

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx=\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}\right)dx.$$

Or :

- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $x\mapsto x^2e^{-nx}$ est continue (produit), donc continue par morceaux, et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car $x^2e^{-nx}\underset{x\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{x^2}\right)$) ;
- pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, $\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}=\frac{x^2}{1-e^{-x}}$ et la fonction $x\mapsto\frac{x^2}{1-e^{-x}}$ est continue (quotient), donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$;
- pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, une double intégration par parties entre 0 et $X>0$, puis un passage à la limite que $X\to+\infty$, donne $\int_0^{+\infty}\left|x^2e^{-nx}\right|dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-nx}dx=\frac{2}{n}\int_0^{+\infty}xe^{-nx}dx=\frac{2}{n^2}\int_0^{+\infty}e^{-nx}dx=\frac{2}{n^3}$ et la série $\sum\frac{2}{n^3}$ converge.

Le théorème d'intégration terme à terme donne alors :

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}\right)dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty}x^2e^{-nx}dx=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}.$$

Donc, on a bien :

$$\boxed{J=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3}}$$

3) On a $x^x=e^{x\ln x}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(x\ln x)^n}{n!}$ pour tout $x\in\left]0,1\right]$, et $\lim_{x\to0}x^x=\lim_{x\to0}e^{x\ln x}=e^0=1$.

Posons $f_0:x\mapsto1$ sur $[0,1]$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$f_n:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{(x\ln x)^n}{n!} & \text{quand } x\in\left]0,1\right]\\ 0 & \text{quand } x=0\end{cases}$$

Comme $\lim_{x\to0}x\ln x=0$, les fonctions f_n sont continues en 0 et elles le sont aussi sur $\left]0,1\right]$ comme produits de telles fonctions. De plus, une étude rapide de $x\mapsto x\ln x$ sur $\left]0,1\right]$, montre que $\max_{x\in\left]0,1\right]}|x\ln x|=\frac{1}{e}$ et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\max_{[0,1]}|f_n|=\frac{(1/e)^n}{n!}$. Comme la série $\sum\frac{(1/e)^n}{n!}$ converge, $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

On a alors toutes les hypothèses pour intervertir somme et intégrale :

$$\int_0^1x^xdx=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{+\infty}f_n(x)\right)dx=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1f_n(x)\,dx.$$

On a $\int_0^1f_0(x)\,dx=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\int_0^1f_n(x)\,dx=\int_0^1\frac{(x\ln x)^n}{n!}dx=\frac{1}{n!}\int_0^1x^n(\ln x)^n\,dx$.

Les fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ et $x \mapsto (\ln x)^n$ sont de classe C^1 sur $]0,1]$, donc pour tout $a \in]0,1]$, on peut intégrer par parties entre a et 1, ce qui donne :

$$\int_a^1 x^n (\ln x)^n\,dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}(\ln x)^n\right]_a^1 - \int_a^1 \frac{1}{n+1}x^{n+1}\left(n\frac{1}{x}(\ln x)^{n-1}\right)dx.$$

Et comme $\lim\limits_{x\to 0} x^{n+1}(\ln x)^n = 0$, on peut écrire :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^n\,dx = -\frac{n}{n+1}\int_a^1 x^n (\ln x)^{n-1}\,dx.$$

En recommençant, on obtient $\int_0^1 x^n (\ln x)^n\,dx = \left(-\dfrac{n}{n+1}\right)\left(-\dfrac{n-1}{n+1}\right)\int_0^1 x^n (\ln x)^{n-2}\,dx$ et une récurrence finie sur k permet de prouver que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$:

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^n\,dx = \left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(-\frac{n-1}{n+1}\right)\cdots\left(-\frac{n-k+1}{n+1}\right)\int_0^1 x^n (\ln x)^{n-k}\,dx.$$

En particulier pour $k=n$, on obtient :

$$\int_0^1 x^n (\ln x)^n\,dx = \left(-\frac{n}{n+1}\right)\left(-\frac{n-1}{n+1}\right)\cdots\left(-\frac{1}{n+1}\right)\int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^n}\int_0^1 x^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}.$$

Alors :

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1 x^n (\ln x)^n\,dx = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

Et en réindexant, on obtient :

$$\boxed{\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^n}}$$

4) Soit $x \in \mathbb{R}$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que quotient de telles fonctions et :

- si $x \geq 0$, on a $0 < \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ converge (car $\int_0^{+\infty}\dfrac{dt}{1+t^2}$ converge) ;
- si $x < 0$, on a $t\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, donc $\dfrac{1}{t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}\right)$ et $\int_0^{+\infty}\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ diverge (car $\int^{+\infty}\dfrac{dt}{t}$ diverge).

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+.}$$

Pour tout réel $x > 0$, on a :

$$0 \leq f(x) = \int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \left[\frac{1}{-x}e^{-xt}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{x}.$$

Avec le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0}$$

La fonction $g:(x,t)\mapsto \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est définie sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$.

- Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $(x,t)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+$, on a $0<g(x,t)\leq\dfrac{1}{1+t^2}$ et la fonction $t\mapsto\dfrac{1}{1+t^2}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors :

$$\boxed{f:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+.}$$

Soit $a>0$.

- Pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, avec $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)=-t\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$.
- Pour tout $x\in[a,+\infty[$, $t\mapsto\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.
- Pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times\mathbb{R}_+$, on ait $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|\leq e^{-at}$ (car $\dfrac{t}{1+t^2}\leq 1$) et la fonction $t\mapsto e^{-at}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Alors :

$$\boxed{\text{La fonction } f:x\mapsto\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [a,+\infty[\text{ pour tout réel } a>0.}$$

Comme $\mathbb{R}_+^*=\bigcup_{a\in\mathbb{R}_+^*}[a,+\infty[$ et *f* est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$ pour tout réel $a>0$:

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

Comme, pour tout réel $a>0$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^2 sur $[a,+\infty[$, avec $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,t)=t^2\dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}$, on montre comme pour la classe C^1 que *f* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $f'':x\mapsto\displaystyle\int_0^{+\infty}t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$.

On a alors, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$:

$$f''(x)+f(x)=\int_0^{+\infty}t^2\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt+\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-xt}dt=\frac{1}{x}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est solution de } y''+y=\frac{1}{x} \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.}$$

5) La fonction $t \mapsto \dfrac{t^x - 1}{1+t}$ est définie et continue sur $]0,1]$ en tant que quotient de telles fonctions.

Comme $\int_0^1 \dfrac{1}{1+t}dt$ converge, $\int_0^1 \dfrac{t^x-1}{1+t}dt$ converge si et seulement si c'est le cas de $\int_0^1 \dfrac{t^x}{1+t}dt$. Or, $\dfrac{t^x}{1+t} \underset{t\to 0}{\sim} t^x$, donc $\int_0^1 \dfrac{t^x}{1+t}dt$ converge si et seulement si $\int_0^1 t^x dt$ converge, c'est-à-dire si et seulement si $x > -1$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x-1}{1+t}dt \text{ est définie sur }]-1,+\infty[.}$$

Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $x+1>0$ (donc $x+1 \in]-1,+\infty[$) et :

$$f(x+1)+f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x+1}-1}{1+t}dt + \int_0^1 \frac{t^x-1}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^{x+1}+t^x-2}{1+t}dt = \int_0^1 \left(t^x - \frac{2}{1+t}\right)dt = \left[\frac{1}{x+1}t^{x+1} - 2\ln(1+t)\right]_0^1.$$

Soit, pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$\boxed{f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x+1} - 2\ln 2}$$

- Pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{t^x-1}{1+t}$ est continue, donc continue par morceaux sur $]0,1]$.
- Pour tout $t \in]0,1]$, $x \mapsto \dfrac{t^x-1}{1+t}$ est continue sur $]-1,+\infty[$.
- Pour tout $(x,t) \in]-1,+\infty[\times]0,1]$, on a $\left|\dfrac{t^x-1}{1+t}\right| \leq \dfrac{t^x+1}{1+t} \leq \dfrac{2}{1+t}$ et la fonction $t \mapsto \dfrac{2}{1+t}$ est positive, continue par morceaux et intégrable sur $]0,1]$.

Alors, $f : x \mapsto \int_0^1 \dfrac{t^x-1}{1+t}dt$ est continue sur $]-1,+\infty[$ et en particulier en 0, donc :

$$\lim_{x\to -1^+} f(x+1) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0.$$

Or, pour tout $x \in]-1,+\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 2\ln 2 - f(x+1)$ et $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to -1^+}{\sim} \frac{1}{x+1}.}$$

Pour tout $x \in]-1,+\infty[$:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x-1}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt - \ln 2.$$

Et :

$$0 \leq \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^x dt = \frac{1}{x+1}.$$

Le théorème des gendarmes donne alors $\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt=0$ et donc :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\ln 2 \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\ln 2.}$$

6) Pour tout réel *x*, la fonction $g : t \mapsto \frac{(t-1)t^x}{\ln t}$ est définie et continue sur $]0,1[$ en tant que quotient de telles fonctions.

- <u>*En 0*</u> :
    - quand $x>-1$, on a $g(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(t^x\right)$ et $\int_0 t^x dt$ converge, donc $\int_0 g(t)dt$ converge ;
    - quand $x<-1$, $\lim_{t\to 0^+} \frac{g(t)}{t^{\frac{x-1}{2}}} = \lim_{t\to 0^+} \frac{t-1}{t^{-\frac{x+1}{2}}\ln t}=+\infty$ (car $-\frac{x+1}{2}>0$ donc $\lim_{t\to 0^+} t^{-\frac{x+1}{2}}\ln t=0^-$), donc $t^{\frac{x-1}{2}} \underset{t\to 0^+}{=} o\left(g(t)\right)$ et $\int_0 t^{\frac{x-1}{2}}dt$ diverge (car $\frac{x-1}{2}<-1$), donc $\int_0 g(t)dt$ diverge ;
    - quand $x=-1$, $g(t)=\frac{t-1}{t\ln t} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{-1}{t\ln t}$ et $\int_0 \frac{1}{t\ln t}dt$ diverge (une primitive de $t\mapsto \frac{1}{t\ln t}$ est $t\mapsto \ln|\ln t|$ qui diverge en 0), donc $\int_0 g(t)dt$ diverge.

  Ainsi, $\int_0 g(t)dt$ converge si et seulement si $x\in\,]-1,+\infty[$.

- <u>*En 1*</u> :

  On a $\lim_{t\to 1} g(t)=1$, donc *g* est prolongeable par continuité en 1, et $\int^1 g(t)dt$ converge pour tout réel *x*.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } f : x \mapsto \int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ln t}dt \text{ est définie sur }]-1,+\infty[\,.}$$

Soit $g : (x,t) \mapsto \frac{(t-1)t^x}{\ln t} = \frac{t-1}{\ln t}e^{x\ln t}$ une fonction définie sur $]-1,+\infty[\times]0,1[$.

- Pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, $t\mapsto g(x,t)$ est continue, donc continue par morceaux, et intégrable sur $]0,1[$ (on vient de le voir).
- Pour tout $t\in\,]0,1[$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$ avec $\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)=(t-1)e^{x\ln t}=t^{x+1}-t^x$.
- Pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, $t\mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,1[$.
- Pour tout $a\in\,]-1,+\infty[$ et pour tout $(x,t)\in[a,+\infty[\times]0,1[$, on a $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right|=\left|t^{x+1}-t^x\right|\le t^{x+1}+t^x\le 1+t^a$ et la fonction $t\mapsto 1+t^a$ est positive, continue par morceaux et intégrable (car $a>-1$) sur $]0,1[$.

Alors, la fonction *f* est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, de dérivée $f' : x\mapsto \int_0^1 (t^{x+1}-t^x)dt$.

Ceci étant vrai pour tout $a \in \left]-1,+\infty\right[$ et avec $\bigcup_{a\in]-1,+\infty[} [a,+\infty[=]-1,+\infty[$, on peut conclure que :

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } D = \left]-1,+\infty\right[\text{, de dérivée } f' : x \mapsto \int_0^1 (t^{x+1}-t^x)\,dt.}$$

On vient de voir que, pour tout $x \in \left]-1,+\infty\right[$:

$$f'(x) = \int_0^1 (t^{x+1}-t^x)\,dt = \left[\frac{1}{x+2}t^{x+2} - \frac{1}{x+1}t^{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}.$$

On a alors pour tout $x \in \left]-1,+\infty\right[$:

$$f(x) = \ln(x+2) - \ln(x+1) + K = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + K$$

avec $K \in \mathbb{R}$.

Remarquons que la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est continue sur $\left]0,1\right[$ avec $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{t-1}{\ln t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to 1^-} \frac{t-1}{\ln t} = 1$. Donc, la fonction $t \mapsto \frac{t-1}{\ln t}$ est bornée sur $\left]0,1\right[$, et il existe une réel $M > 0$ tel que pour tout $t \in \left]0,1\right[$, $\left|\frac{t-1}{\ln t}\right| \le M$.

Alors, pour tout $x \in \left]-1,+\infty\right[$, on a $\left|\frac{(t-1)t^x}{\ln t}\right| \le M\,t^x$ pour tout $t \in \left]0,1\right[$ et :

$$|f(x)| = \left|\int_0^1 \frac{(t-1)t^x}{\ln t}\,dt\right| \le \int_0^1 \left|\frac{(t-1)t^x}{\ln t}\right| dt \le \int_0^1 M\,t^x\,dt = \frac{M}{x+1}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{M}{x+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Or :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + K\right] = K.$$

Ainsi, $K = 0$ et finalement, pour tout $x \in \left]-1,+\infty\right[$:

$$\boxed{f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right)}$$

Chapitres 12-13-14

1) On a :

- $k\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{(k+1)(k+2)}=a+k\left(\dfrac{b}{k+1}+\dfrac{c}{k+2}\right)$ qui, évalué en 0 donne $a=\dfrac{1}{2}$;
- $(k+1)\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{k(k+2)}=b+(k+1)\left(\dfrac{a}{k}+\dfrac{c}{k+2}\right)$ qui, évalué en – 1, donne $b=-1$;
- $(k+2)\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}=\dfrac{1}{k(k+1)}=c+(k+2)\left(\dfrac{a}{k}+\dfrac{b}{k+1}\right)$ qui, évalué en – 2, donne $c=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{½}{k}-\frac{1}{k+1}+\frac{½}{k+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)}$$

Si pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $P(X=k)=\dfrac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}$, alors, comme $\sum_{k=1}^{+\infty}P(X=k)=1$, on a :

$$1=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\alpha}{k(k+1)(k+2)}=\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)=\frac{\alpha}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)-\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)\right]=\frac{\alpha}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\alpha}{4}.$$

Donc :

$$\boxed{\alpha=4}$$

On a $kP(X=k)=\dfrac{4}{(k+1)(k+2)}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{4}{k^2}$ et $\sum\dfrac{4}{k^2}$ converge, donc $\sum kP(X=k)$ converge et X admet une espérance, donnée par :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{4}{(k+1)(k+2)}=4\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=4\frac{1}{2}.$$

Soit :

$$\boxed{E(X)=2}$$

On a $k^2P(X=k)=\dfrac{4k}{(k+1)(k+2)}\underset{k\to+\infty}{\sim}\dfrac{4}{k}$ et $\sum\dfrac{4}{k}$ diverge, donc $\sum k^2P(X=k)$ diverge et :

$$\boxed{X \text{ n'admet pas de variance.}}$$

2) On veut la probabilité de A : « une personne au moins n'a pas le même résultat que les autres ».

On a $\overline{A}$ = « tout le monde a le même résultat ». Et si on note Pi = « tout le monde obtient pile » et Fa = « tout le monde obtient face », on a $\overline{A}=Pi\cup Fa$, l'union étant disjointe.

Il y a n personnes et les n lancers (simultanés) sont indépendants les uns des autres, donc $P(Pi)=P(Fa)=\dfrac{1}{2^n}$ et ainsi :

$$P(\overline{A})=P(Pi)+P(Fa)=\frac{2}{2^n}=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La probabilité qu'une personne au moins n'ait pas le même résultat que les autres est } 1-\frac{1}{2^{n-1}}.}$$

L'expérience des n lancers simultanés a deux issues : A (une personne au moins n'a pas le même résultat que les autres) que nous noterons succès et $\overline{A}$ (tout le monde a le même résultat), l'échec. Si on répète cette expérience de manière indépendante une infinité de fois, le rang du premier succès (autrement dit le nombre de lancers nécessaires pour qu'au moins une personne n'ait pas le même résultat que les autres) est la variable *X*. Cette variable suit donc une loi géométrique de paramètre $P(A)=1-\frac{1}{2^{n-1}}$. Alors :

$$E(X)=\frac{1}{P(A)}=\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}-1} \quad \text{et} \quad V(X)=\frac{1-P(A)}{P(A)^2}=\frac{2^{n-1}}{(2^{n-1}-1)^2}.$$

3) *C'est du cours* : $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $a+b$.

Avec les fonctions génératrices : $G_X(t)=e^{a(t-1)}$ et $G_Y(t)=e^{b(t-1)}$, et comme *X* et *Y* sont indépendantes :

$$G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)=e^{a(t-1)}e^{b(t-1)}=e^{(a+b)(t-1)}.$$

Donc, $X+Y \hookrightarrow \mathscr{P}(a+b)$.

Comme *X* et *Y* sont indépendantes, *X* et – *Y* le sont aussi, et $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)=0$, donc :

$$\begin{aligned}
\sigma(U) &= \sqrt{V(U)}=\sqrt{V(X+Y)}=\sqrt{V(X)+V(Y)}=\sqrt{a+b}\\
\sigma(V) &= \sqrt{V(V)}=\sqrt{V(X-Y)}=\sqrt{V(X)+V(-Y)}=\sqrt{V(X)+V(Y)}=\sqrt{a+b}\\
Cov(U,V) &= Cov(X+Y,X-Y)\\
&= Cov(X,X)+Cov(Y,X)-Cov(X,Y)-Cov(Y,Y)\\
&= V(X)-V(Y)=a-b
\end{aligned}$$

Alors :

$$\boxed{\frac{Cov(U,V)}{\sigma(U)\sigma(V)}=\frac{a-b}{a+b}}$$

4) L'expérience est : on tire simultanément deux cartes (distinctes) dans un jeu de 52. L'ordre ne compte pas, il y a $\binom{52}{2}=\frac{52\times 51}{2}$ couples possibles et tous les couples sont équiprobables, donc on peut utiliser la formule :

$$proba=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On a $X(\Omega)=Y(\Omega)=[\![1,13]\!]$. Soit $(a,b)\in[\![1,13]\!]^2$. Pour évaluer $P\big(X=a,Y=b\big)$, considérons trois cas.

- Si $a>b$, on a :

$$P\big(X=a,Y=b\big)=0.$$

- Si $a=b$, les deux cartes tirées ont le même niveau ; il y a 4 cartes pour ce niveau *a*, donc le nombre de cas favorables est $\binom{4}{2}=6$ et on a :

$$P(X=a,Y=b)=P(X=Y=a)=\frac{6}{\frac{52\times 51}{2}}=\frac{1}{221}.$$

- Si $a<b$, il y a 4 cartes pour le niveau *a* et 4 pour le niveau *b*, donc le nombre de cas favorables est 4×4 et on a :

$$P(X=a,Y=b)=\frac{4\times 4}{\frac{52\times 51}{2}}=\frac{8}{663}.$$

Donc, pour tout $(a,b)\in[\![1,13]\!]^2$:

$$\boxed{P(X=a,Y=b)=\begin{cases}\dfrac{1}{221} & \text{quand } a=b\\ 0 & \text{quand } a>b\\ \dfrac{8}{663} & \text{quand } a<b\end{cases}}$$

Vérifions :

$$\sum_{(a,b)\in[\![1,13]\!]^2}P(X=a,Y=b)=\sum_{a=1}^{13}P(X=Y=a)+\sum_{1\le a<b\le 13}P(X=a,Y=b)=\sum_{a=1}^{13}P(X=Y=a)+\sum_{a=1}^{12}\sum_{b=a+1}^{13}P(X=a,Y=b)$$

$$=\sum_{a=1}^{13}\frac{1}{221}+\sum_{a=1}^{12}\sum_{b=a+1}^{13}\frac{8}{663}=\frac{13}{221}+\sum_{a=1}^{12}\frac{8(13-a)}{663}=\frac{13}{17\times 13}+\frac{8}{17\times 13\times 3}\frac{12\times 13}{2}=\frac{1}{17}+\frac{16}{17}=1$$

Soit $k\in[\![1,13]\!]$. On a :

$$P(X=k)=\sum_{b=1}^{13}P(X=k,Y=b)=\sum_{b=1}^{k-1}P(X=k,Y=b)+P(X=Y=k)+\sum_{b=k+1}^{13}P(X=k,Y=b)$$

$$=\frac{1}{221}+\sum_{b=k+1}^{13}\frac{8}{663}=\frac{1}{221}+\frac{8}{663}(13-k)=\frac{107-8k}{663}$$

$$P(Y=k)=\sum_{a=1}^{13}P(X=a,Y=k)=\sum_{a=1}^{k-1}P(X=a,Y=k)+P(X=Y=k)+\sum_{a=k+1}^{13}P(X=a,Y=k)$$

$$=\sum_{a=1}^{k-1}\frac{8}{663}+\frac{1}{221}=\frac{8}{663}(k-1)+\frac{1}{221}=\frac{8k-5}{663}$$

Donc, pour tout $k\in[\![1,13]\!]$:

$$\boxed{P(X=k)=\frac{107-8k}{663}\qquad P(Y=k)=\frac{8k-5}{663}}$$

On a $Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$ et :

$$E(XY)=\sum_{(a,b)\in[\![1,13]\!]^2} abP\left(X=a,Y=b\right)=\sum_{a=1}^{13}a^2P\left(X=Y=a\right)+\sum_{1\le a<b\le 13} abP\left(X=a,Y=b\right)$$
$$=\frac{1}{221}\sum_{a=1}^{13}a^2+\frac{8}{663}\sum_{a=1}^{12}a\left(\sum_{b=a+1}^{13}b\right)=\frac{1}{221}\sum_{a=1}^{13}a^2+\frac{8}{663}\sum_{a=1}^{12}a(13-a)\frac{a+1+13}{2}$$
$$=\frac{1}{221}\frac{13\times 14\times 27}{6}+\frac{4}{663}\sum_{a=1}^{12}a(13-a)(a+14)=\frac{2485}{51}$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{13}kP\left(X=k\right)=\sum_{k=1}^{13}k\frac{107-8k}{663}=\frac{35\times 7}{51}\qquad E(Y)=\sum_{k=1}^{13}kP\left(Y=k\right)=\sum_{k=1}^{13}k\frac{8k-5}{663}=\frac{67\times 7}{51}$$

Donc :

$$\boxed{Cov(X,Y)=\frac{2485}{51}-\frac{35\times 7}{51}\frac{67\times 7}{51}=\frac{11830}{2601}}$$

5) Dans tous les cas, les évènements $\left(X_n=k\right)$ et $\left(X_{n'}=k'\right)$, avec $n,n'\in\mathbb{N}^*$ et $k,k'\in\{0,1\}$, sont indépendants.

a. On a $\left(T=1\right)=\left(X_1=1\right)\cap\left(X_2=1\right)$, donc $P\left(T=1\right)=P\left(X_1=1\right)\times P\left(X_2=1\right)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, soit :

$$\boxed{P\left(T=1\right)=\frac{1}{4}}$$

Et $\left(T=2\right)=\left(X_1=0\right)\cap\left(X_2=1\right)\cap\left(X_3=1\right)$, donc $P\left(T=2\right)=P\left(X_1=0\right)\times P\left(X_2=1\right)\times P\left(X_3=1\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$, soit :

$$\boxed{P\left(T=2\right)=\frac{1}{8}}$$

b. Remarquons que $A_n\cap B_n=\varnothing$ et $A_n\cup B_n$ = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages ». On a :

A_{n+1} = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des $n+1$ premiers tirages et $X_{n+1}=0$ »

= « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_{n+1}=0$ »

= $\left(A_n\cup B_n\right)\cap\left(X_{n+1}=0\right)$

En effet, si $X_{n+1}=0$, on n'a pas deux 1 consécutifs aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ tirages.

Comme A_n et B_n, donc $A_n\cup B_n$, ne concernent que les n premiers tirages, $A_n\cup B_n$ et $\left(X_{n+1}=0\right)$ sont indépendants, donc :

$$p_{n+1}=P(A_{n+1})=P\left(A_n\cup B_n\right)\times P\left(X_{n+1}=0\right)=\left[P\left(A_n\right)+P\left(B_n\right)\right]\times P\left(X_{n+1}=0\right)=\frac{1}{2}\left(p_n+q_n\right).$$

On a aussi :

B_{n+1} = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des $n+1$ premiers tirages et $X_{n+1}=1$ »

= « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des n premiers tirages et $X_n=0$ et $X_{n+1}=1$ »

= $A_n\cap\left(X_{n+1}=0\right)$

En effet, si $X_{n+1}=1$ et on n'a pas deux 1 consécutifs aux $n^{\text{ième}}$ et $(n+1)^{\text{ième}}$ tirages, alors forcément $X_n=0$.

Alors, toujours avec A_n et $\left(X_{n+1}=0\right)$ indépendants :

$$q_{n+1}=P(B_{n+1})=P\left(A_n\right)\times P\left(X_{n+1}=0\right)=\frac{1}{2}p_n.$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $p_{n+1}=\frac{1}{2}\left(p_n+q_n\right)$ et $q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n$, soit :

$$\begin{pmatrix}p_{n+1}\\q_{n+1}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}$$

On prouve alors par récurrence que pour tout $n\geq 2$, $\begin{pmatrix}p_n\\q_n\end{pmatrix}=\frac{1}{2^{n-2}}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}p_2\\q_2\end{pmatrix}$, avec :

$$\begin{cases}p_2=P(A_2)=P\left(X_2=0\right)=\dfrac{1}{2}\\ q_2=P(B_2)=P\left(X_1=0\right)\times P\left(X_2=1\right)=\dfrac{1}{4}\end{cases}$$

Si on pose $M=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, on a $\chi_M=X^2-X-1$ de racines $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (distinctes), donc M est diagonalisable et on obtient $M=PDP^{-1}$ avec $D=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}a&b\\1&1\end{pmatrix}$ et $P^{-1}=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}1&-b\\-1&a\end{pmatrix}$.

Ceci donne $M^n=PD^nP^{-1}=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}a^{n+1}-b^{n+1}&ab(b^n-a^n)\\a^n-b^n&ab(b^{n-1}-a^{n-1})\end{pmatrix}$ et donc :

$$\begin{cases}p_n=\dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{a-b}\left((2-b)a^{n-1}+(a-2)b^{n-1}\right)\\ q_n=\dfrac{1}{2^n}\dfrac{1}{a-b}\left((2-b)a^{n-2}+(a-2)b^{n-2}\right)\end{cases}$$

Or, $a-b=-\sqrt{5}$ et $a+b=1$, donc $2-b=1+a=a^2$ et $2-a=b+1=b^2$ (car a et b sont racines de X^2-X-1).

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\begin{cases}p_n=\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{2^n\sqrt{5}}\\ q_n=\dfrac{b^n-a^n}{2^n\sqrt{5}}\end{cases}\quad\text{avec } a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\text{ et } b=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.}$$

On a aussi pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$(T=n)$ = « on n'obtient pas deux 1 consécutifs lors des $n+1$ premiers tirages et $X_n=1$ et $X_{n+1}=1$ »

= $B_n\cap\left(X_{n+1}=1\right)$

Donc :

$$P(T=n)=P(B_n)\times P\left(X_{n+1}=1\right)=\frac{1}{2}q_n.$$

Si on pose $u_n = 2^{n+1} P(T=n)$, on obtient :

$$u_n = 2^n q_n = \frac{b^n - a^n}{\sqrt{5}}.$$

On a bien $u_1 = \frac{b-a}{\sqrt{5}} = 1 = F_1$ et $u_2 = \frac{b^2-a^2}{\sqrt{5}} = \frac{(b-a)(b+a)}{\sqrt{5}} = 1 = F_0 + F_1 = F_2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n + u_{n+1} = \frac{b^n - a^n}{\sqrt{5}} + \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{(1+b)b^n - (1+a)a^n}{\sqrt{5}} = \frac{b^{n+2} - a^{n+2}}{\sqrt{5}} = u_{n+2}.$$

Donc, $u_n = F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'où :

$$\boxed{P(T=n) = \frac{F_n}{2^{n+1}}}$$

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X=k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} p(1-p)^{k-1} = \frac{p(1-p)^n}{1-(1-p)}.$$

Soit :

$$\boxed{P(X > n) = (1-p)^n}$$

On a $Z(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et, avec *X* et *Y* indépendantes, on a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} P(Z=n) &= P(X=n, Y=n) + P(X>n, Y=n) + P(X=n, Y>n) \\ &= P(X=n)P(Y=n) + P(X>n)P(Y=n) + P(X=n)P(Y>n) \\ &= p(1-p)^{n-1} q(1-q)^{n-1} + (1-p)^n q(1-q)^{n-1} + p(1-p)^{n-1}(1-q)^n \\ &= \left[pq + (1-p)q + p(1-q)\right](1-p)^{n-1}(1-q)^{n-1} \\ &= (p+q-pq)\left[(1-p)(1-q)\right]^{n-1} \end{aligned}$$

En remarquant que $(1-p)(1-q) = 1-(p+q-pq)$ et en posant $r = p+q-pq$, on obtient $P(Z=n) = r(1-r)^{n-1}$ et ainsi :

$$\boxed{Z \text{ suit une loi géométrique de paramètre } r = p+q-pq.}$$

Alors :

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{r} = \frac{1}{p+q-pq}}$$

7) C'est du cours : *Loi faible des grands nombres*.

8) La première question est aussi du cours.

Si on note p la probabilité que X soit pair est :

$$p=\sum_{n=0}^{+\infty}P(X=2n)=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}=e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}=e^{-\lambda}\operatorname{ch}\lambda=\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}.$$

On a alors $p-\frac{1}{2}=\frac{e^{-2\lambda}}{2}>0$, donc $p>\frac{1}{2}$ et donc :

Il vaut mieux parier que X est pair.

9) Le rang X d'apparition du premier pile suit une loi géométrique de paramètre p, donc si

On a alors :

$$P(A)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X=2n)=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{2n-1}p=\frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(1-p)^2\right]^n=\frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2}.$$

Soit :

$$\boxed{P(A)=\frac{1-p}{2-p}}$$

De la même façon :

$$P(B)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X=3n)=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{3n-1}p=\frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(1-p)^3\right]^n=\frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^3}{1-(1-p)^3}.$$

Soit :

$$\boxed{P(A)=\frac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}}$$

On a :

$A\cap B$ = « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers pair et multiple de 3 »

= « on obtient pile pour la première fois au bout d'un nombre de lancers multiple de 6 ».

Donc :

$$P(A\cap B)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(X=6n)=\sum_{n=1}^{+\infty}(1-p)^{6n-1}p=\frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(1-p)^6\right]^n=\frac{p}{1-p}\frac{(1-p)^6}{1-(1-p)^6}=\frac{p(1-p)^5}{1-(1-p)^6}.$$

Les évènements A et B sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B)=P(A)P(B)$, et :

$$\begin{aligned}P(A\cap B)=P(A)P(B) \quad&\Leftrightarrow\quad \frac{p(1-p)^5}{1-(1-p)^6}=\frac{1-p}{2-p}\frac{p(1-p)^2}{1-(1-p)^3}\\&\Leftrightarrow\quad (1-p)^2(2-p)=1+(1-p)^3\\&\Leftrightarrow\quad 2-5p+4p^2-p^3=2-3p+3p^2-p^3\\&\Leftrightarrow\quad p^2=2p\\&\Leftrightarrow\quad p=0\ \text{ ou }\ p=2\end{aligned}$$

Or, $p\in\left]0,1\right[$, donc $p\neq 0$ et $p\neq 2$, et ainsi :

Les évènements A et B ne sont pas indépendants.

10) Notons $D = \det M = (-1)^X - (-1)^Y$, on a :

Notons MI l'évènement « M est inversible ». On a :

$$MI = \left(D \neq 0\right) = (-1)^X \neq (-1)^Y = \text{« } X \text{ et } Y \text{ sont de parités différentes » = « } X+Y \text{ est impair ».}$$

Or, X et Y sont indépendantes et suivent toutes deux une loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, donc $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \lambda = 2\lambda$. Alors :

$$P(MI) = \sum_{n=0}^{+\infty} P\left(X+Y = 2n+1\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2\lambda} \frac{(2\lambda)^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-2\lambda}\,\mathrm{sh}\,(2\lambda) = \frac{1-e^{-4\lambda}}{2}.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{La probabilité que } M \text{ soit inversible est } \frac{1-e^{-4\lambda}}{2}.}$$

On a $M(\Omega) = \left\{M_1, M_2, M_3, M_4\right\}$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et :

$$\chi_{M_1} = X\left(X-2\right),\ \chi_{M_2} = X^2,\ \chi_{M_3} = (X-1)^2+1,\ \chi_{M_4} = X^2-2.$$

Aucun de ces quatre polynômes caractéristiques n'admet 1 pour racine, donc :

$$\boxed{\text{La probabilité que } M \text{ admette 1 pour valeur propre est nulle.}}$$

Les polynômes caractéristiques de M_1 et M_4 sont scindés à racines simples dans $\mathbb{R}$, donc M_1 et M_4 sont diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

Le polynôme caractéristique de M_3 n'a pas de racine réelle, donc M_3 n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais est scindé à racines simples ($1+i$ et $1-i$) dans $\mathbb{C}$ donc M_3 est diagonalisables sur $\mathbb{C}$.

La seule racine de χ_{M_2} est 0, donc si M_2 était diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, elle serait semblable à la matrice nulle, donc nulle. Ceci n'étant pas le cas, M_2 n'est diagonalisable ni sur $\mathbb{R}$, ni sur $\mathbb{C}$.

Ainsi :

$$\text{« } M \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{R} \text{ » } = \left(M = M_1\right) \cup \left(M = M_4\right).$$

$$\text{« } M \text{ est diagonalisable sur } \mathbb{C} \text{ » } = \left(M = M_1\right) \cup \left(M = M_3\right) \cup \left(M = M_4\right).$$

Alors :

$$\left(M = M_1\right) = X \text{ et } Y \text{ sont pairs}$$

$$\left(M = M_3\right) = X \text{ est pair et } Y \text{ est impair}$$

$$\left(M = M_4\right) = X \text{ est impair et } Y \text{ est pair}$$

Et, comme les variables X et Y sont indépendantes, on peut écrire :

$$P\left(M = M_1\right) = P(X \text{ et } Y \text{ sont pairs}) = P\left(X \text{ est pair}\right) P\left(Y \text{ est pair}\right)$$

$$P\left(M = M_3\right) = P\left(X \text{ est pair et } Y \text{ est impair}\right) = P\left(X \text{ est pair}\right) P\left(Y \text{ est impair}\right)$$

$$P\left(M = M_4\right) = P\left(X \text{ est impair et } Y \text{ est pair}\right) = P\left(X \text{ est impair}\right) P\left(Y \text{ est pair}\right)$$

Enfin :

$$P(X \text{ est pair}) = P(Y \text{ est pair}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!} = e^{-\lambda} \operatorname{ch}\lambda = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$$

$$P(X \text{ est impair}) = P(Y \text{ est impair}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = 2n+1) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2n+1}}{(2n+1)!} = e^{-\lambda} \operatorname{sh}\lambda = \frac{1-e^{-2\lambda}}{2}$$

Donc :

$$P(M = M_1) = \left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)^2$$

$$P(M = M_3) = P(M = M_4) = \left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)\left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}\right)$$

Finalement :

La probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$ est $\left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)\left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}\right) = \frac{1+e^{-2\lambda}}{2}$.

La probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$ est $\left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}\right)\left(\frac{1-e^{-2\lambda}}{2}\right) = \frac{(1+e^{-2\lambda})(3-e^{-2\lambda})}{4}$.

11) $\left(P(A_i)\right)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est arithmétique, donc si R est sa raison, on a $P(A_i) = P(A_1) + (i-1)R$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

Et $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$, soit :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[P(A_1) + (i-1)R\right] = nP(A_1) + R\sum_{i=1}^{n}(i-1) = n\frac{1}{2n} + R\frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)R+1}{2}.$$

Donc, $\frac{n(n-1)R+1}{2} = 1$, ce qui donne $R = \frac{1}{n(n-1)}$ et ainsi, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\boxed{P(A_i) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{i-1}{n-1}\right)}$$

D'après la loi de probabilités totales ($(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un système complet d'évènements), on a :

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid A_i)P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} + \frac{i-1}{n-1}\right) = \frac{1}{2n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{2} + \frac{i(i-1)}{n-1}\right) = \frac{1}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}\right)\sum_{i=1}^{n} i + \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]$$

$$= \frac{1}{2n^2}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1}\right)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{n-1}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right] = \frac{n+1}{4n}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n-1} + \frac{2n+1}{3(n-1)}\right]$$

Soit :

$$\boxed{P(B) = \frac{7(n+1)}{24n}}$$

12) C'est un exercice classique avec un nouvel habillage…

On a $N(\Omega)=\mathbb{N}$, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\in[\![0,n]\!]$, $P_{(N=n)}(K=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$P\left(K=k\right)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(N=n)P_{(N=n)}(K=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

$$=e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{\left[\lambda(1-p)\right]^{n-k}}{(n-k)!}=e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left[\lambda(1-p)\right]^{n}}{n!}=e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}$$

Donc,

$$\boxed{K \text{ suit une loi de Poisson de paramètre } p\lambda.}$$

13) Les n lancers sont indépendants. Si p est la probabilité que le chiffre de A soit strictement supérieur à celui de B à l'issue d'un lancer, la variable X suit un loi binomiale de paramètres n et p.

Les deux dés étant discernables, il y a $6\times 6=36$ issues possibles quand on lance les dés A et B, donc 6 pour lesquelles le chiffre de A est égal à celui de B, 15 pour lesquelles le chiffre de A est strictement supérieur à celui de B et 15 pour lesquelles le chiffre de B est strictement supérieur à celui de A. Comme les 36 issues sont équiprobables, on a $p=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{La variable } X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n \text{ et } \frac{5}{12},\ E(X)=\frac{5}{12}n \text{ et } V(X)=\frac{35}{144}n.}$$

<u>*Inégalité de Bienaymé-Tchebychev*</u> : Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, $P\left(\left|X-E(X)\right|\geq a\right)\leq\frac{V(X)}{a^2}$.

On a :

$$\begin{aligned}0,9\leq\frac{X}{E(X)}\leq 1,1 &\Leftrightarrow 0,9E(X)\leq X\leq 1,1E(X)\\ &\Leftrightarrow -0,1E(X)\leq X-E(X)\leq 0,1E(X)\\ &\Leftrightarrow \left|X-E(X)\right|\leq 0,1E(X)\end{aligned}$$

Donc :

$$p_n=P\left(0,9\leq\frac{X}{E(X)}\leq 1,1\right)=P\left(\left|X-E(X)\right|\leq 0,1E(X)\right).$$

Alors :

$$\begin{aligned}p_n\geq 0,99 &\Leftrightarrow P\left(\left|X-E(X)\right|\leq 0,1E(X)\right)\geq 0,99\\ &\Leftrightarrow 1-P\left(\left|X-E(X)\right|\leq 0,1E(X)\right)\leq 1-0,99\\ &\Leftrightarrow P\left(\left|X-E(X)\right|>0,1E(X)\right)\leq 0,01\end{aligned}$$

Or, on a $\left(\left|X-E(X)\right|=0,1E(X)\right)\subset\left(\left|X-E(X)\right|\geq 0,1E(X)\right)$, donc si $P\left(\left|X-E(X)\right|\geq 0,1E(X)\right)\leq 0,01$, alors $P\left(\left|X-E(X)\right|>0,1E(X)\right)\leq 0,01$ et d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, avec $a=0,1E(X)>0$, on a :

$$P\left(\left|X-E(X)\right|\geq 0,1E(X)\right)\leq\frac{V(X)}{\left(0,1E(X)\right)^2}.$$

Et :

$$\frac{V(X)}{\left(0,1E(X)\right)^2}=\frac{\frac{35}{144}n}{\left(0,1\frac{5}{12}n\right)^2}=\frac{140}{n}.$$

Enfin, comme $\frac{140}{n}\leq 0,01$ pour $n\geq 14000$, on a :

$$\boxed{p_n\geq 0,99 \text{ pour } n\geq 14000 \text{ (au pire).}}$$

14) On a :

C_i = « le i-ème chasseur est touché » = $\left(X_i=1\right)$;
$\overline{C_i}$ = « le i-ème chasseur n'est pas touché » = $\left(X_i=0\right)$.

Les ℓ lapins touchent les chasseurs indépendamment avec une probabilité $p\in\left]0,1\right[$. Donc, la probabilité qu'un chasseur ne soit pas touché (les ℓ lapins ne touchent pas le chasseur) est $(1-p)^\ell$. C'est la même chose pour chaque chasseur, donc $P(\overline{C_i})=P\left(X_i=0\right)=(1-p)^\ell$ et ainsi :

$$\boxed{P(C_i)=P\left(X_i=1\right)=1-(1-p)^\ell}$$

On a $V=\sum_{i=1}^{c}X_i$. Les X_i (variables compteurs) sont indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^\ell$. Donc :

$$\boxed{V \text{ sui une loi binomiale de paramètres } c \text{ et } 1-(1-p)^\ell.}$$

Chapitre 15

1) Pour $f, g \in E = C^1([0,1], \mathbb{R})$, $f'g'$ est définie et continue sur $[0,1]$, donc $\varphi(f,g)$ est défini. Ainsi, φ est une application définie sur E^2 et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soient $f, g, h \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

- $\varphi(f,g) = \varphi(g,f)$ par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$, donc φ est *symétrique*.
- On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(f+\lambda h, g) &= [f(0)+\lambda h(0)]g(0) + [f(1)+\lambda h(1)]g(1) + \int_0^1 [f'(t)+\lambda h'(t)]g'(t)\,dt \\
&= f(0)g(0) + \lambda h(0)g(0) + f(1)g(1) + \lambda h(1)g(1) + \int_0^1 [f'(t)g'(t) + \lambda h'(t)g'(t)]\,dt \\
&= f(0)g(0) + f(1)g(1) + \lambda h(0)g(0) + \lambda h(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt + \lambda \int_0^1 h'(t)g'(t)\,dt \\
&= f(0)g(0) + f(1)g(1) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,dt + \lambda\left[h(0)g(0) + h(1)g(1) + \int_0^1 h'(t)g'(t)\,dt\right] \\
&= \varphi(f,g) + \lambda\varphi(h,g)
\end{aligned}$$

  Donc φ est linéaire à gauche, et par symétrie, φ est *bilinéaire*.

- $\varphi(f,f) = f(0)^2 + f(1)^2 + \int_0^1 f'(t)^2\,dt \geq 0$ donc φ est *positive*.
- Comme $f(0)^2$, $f(1)^2$ et $\int_0^1 f'(t)^2\,dt$ sont positifs, on a :

$$\varphi(f,f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(0)^2 = f(1)^2 = \int_0^1 f'(t)^2\,dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(0) = f(1) = 0 \\ \int_0^1 f'(t)^2\,dt = 0 \end{cases}$$

  Or, comme *f* est C^1 sur $[0,1]$, f'^2 est continue et positive sur $[0,1]$, donc $\int_0^1 f'(t)^2\,dt = 0$ entraine que f'^2, donc f', sont nulles sur $[0,1]$, ce qui veut dire que *f* est constante sur $[0,1]$. Comme $f(0) = 0$, *f* est nulle sur $[0,1]$. Ainsi, φ est *définie*.

Finalement, $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ est bilinéaire, symétrique et définie positive, donc :

φ définit un produit scalaire sur *E*.

2) On a $u = (1,0,1)$, $v = (1,1,1)$ et $w = (-1,1,0)$ dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire canonique.

- $\|u\| = \sqrt{2}$, donc on pose : $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}u$.
- On cherche $e_2 = au + bv$ tel que $(e_2 \mid u) = 0$ et $\|e_2\|^2 = (e_2 \mid e_2) = 1$, soit :

$$\begin{cases} (au+bv \mid u) = a\|u\|^2 + b(v \mid u) = 2a + 2b = 2(a+b) = 0 \\ \|au+bv\|^2 = a^2\|u\|^2 + 2ab(u \mid v) + b^2\|v\|^2 = 2a^2 + 4ab + 3b^2 = 2(a+b)^2 + b^2 = 1 \end{cases}$$

  Ceci donne $b = -a$ et $b^2 = 1$, et on peut prendre $a = -1$ et $b = 1$, soit $e_2 = v - u = (0,1,0)$.

- On cherche enfin $e_3 = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma w$ tel que $(e_3 \mid e_1) = (e_3 \mid e_2) = 0$ et $\|e_3\|^2 = (e_3 \mid e_3) = 1$, soit :

$$\begin{cases} (\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma w \mid e_1) = \alpha(e_1 \mid e_1) + \gamma(w \mid e_1) = \alpha - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\gamma = 0 \\ (\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma w \mid e_2) = \beta + \gamma = 0 \\ \|e_3\|^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e_3 = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \\ \alpha^2 = 1 \end{cases}$$

On peut prendre $e_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$.

Ainsi :

$$\boxed{\text{La base orthonormée } (e_1,e_2,e_3) \text{ avec } e_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),\ e_2 = (0,1,0) \text{ et } e_3 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1) \text{ est obtenue à partir de } (u,v,w) \text{ par le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.}}$$

3) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, le produit scalaire canonique est celui pour lequel la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ est orthonormée. On cherche $F^\perp$, avec :

$$F = \{(X^2 - X)P,\ P \in \mathbb{R}_1[X]\} = \{(X^2 - X)(aX + B),\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(X^2 - X,\ X^3 - X^2).$$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{R}_3[X]$. On a :

$$P \in F^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} P \perp X^2 - X \\ P \perp X^3 - X^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (P \mid X^2 - X) = 0 \\ (P \mid X^3 - X^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (P \mid X^2 - X) = b - c = 0 \\ (P \mid X^3 - X^2) = a - b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$$

Donc :

$$F^\perp = \{aX^3 + aX^2 + aX + d,\ (a,d) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(X^3 + X^2 + X) + d,\ (a,d) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Soit :

$$\boxed{F^\perp = \mathrm{Vect}(1,\ X^3 + X^2 + X)}$$

4) Les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont des vecteurs unitaires d'un espace euclidien *E*, et on suppose que pour tout $x \in E$:

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle^2 .$$

Comme les e_k sont unitaires, prouver que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormale de *E* revient à prouver que c'est une famille orthogonale, autrement dit, que pour tous $i, j \in [\![1,n]\!]$ tels que $i \neq j$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$.

Par hypothèse, on a pour tout $i \in [\![1,n]\!]$:

$$\|e_i\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2 = \langle e_i, e_i \rangle^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2 = \|e_i\|^4 + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} \langle e_i, e_k \rangle^2 .$$

Comme $\|e_i\|=1$, on a $\|e_i\|^2=\|e_i\|^4=1$ et donc $\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}\langle e_i,e_k\rangle^2=0$. On a ainsi une somme nulle de nombres positifs, donc $\langle e_i,e_k\rangle^2=0$, soit $\langle e_i,e_k\rangle=0$, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$ tel que $k\neq i$.

Ainsi, la famille $(e_1,\ldots,e_n)$ est orthogonale et donc :

$$\boxed{(e_1,\ldots,e_n) \text{ est une base orthonormale de } E.}$$

5) *F* et *G* sont deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel euclidien *E*. On a :

$$\begin{cases} F\subset F\cup G \\ G\subset F\cup G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (F\cup G)^{\perp}\subset F^{\perp} \\ (F\cup G)^{\perp}\subset G^{\perp} \end{cases}$$

Remarquons que l'équivalence (la réciproque est inutile pour le raisonnement) est vraie car on est en dimension finie. Les deux dernières inclusions ci-dessus impliquent alors que :

$$\underline{(F\cup G)^{\perp}\subset F^{\perp}\cap G^{\perp}.}$$

Et, si $x\in F^{\perp}\cap G^{\perp}$, alors, *x* est orthogonal à tout vecteur de *F* et de *G*, donc à tout vecteur de $F\cup G$. Autrement dit, $x\in(F\cup G)^{\perp}$ et donc :

$$\underline{F^{\perp}\cap G^{\perp}\subset(F\cup G)^{\perp}.}$$

Ainsi :

$$\boxed{(F\cup G)^{\perp}=F^{\perp}\cap G^{\perp}}$$