Résumé du chapitre 12 : Espaces probabilisés

I - Ensembles dénombrables et familles sommables

I-1. Ensembles dénombrables

Définition :

Un ensemble est dit dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.

Un ensemble est dit au plus dénombrable s'il peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$ (éventuellement finie).

Propriété :

Un ensemble dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ où les x_n sont deux à deux distincts.

Propriétés :

- Toute partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.
- Si un ensemble peut être mis en bijection avec un ensemble dénombrable, alors il est dénombrable.
- La réunion d'un « nombre » au plus dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.
- Le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.

I-2. Compléments sur les séries absolument convergentes

Propriétés :

Soit $\sum a_n$ une série réelle ou complexe.

- Pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum a_{\sigma(n)}$ est absolument convergente si et seulement si $\sum a_n$ l'est, et en cas de convergence absolue, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

  Autrement dit, on peut changer l'ordre des termes d'une série sans changer sa nature absolument convergente et sa somme en cas de convergence.

- Si φ est une application strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $\varphi(0) = 0$, et si on pose $b_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} a_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors si $\sum a_n$ est absolument convergente la série $\sum b_n$ l'est aussi, et dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} a_k\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

  Autrement dit, on peut regrouper les termes d'une série absolument convergente sans changer sa somme.

I-3. Familles sommables

Définitions :

Soit une famille $(x_i)_{i\in I}$ dénombrable de réels positifs.

La somme de la famille, notée $\sum_{i\in I} x_i$, est donnée par $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{i_n}$ avec $I = \{i_0, \dots, i_n, \dots\}$.

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de réels positifs est sommable si sa somme est finie.

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est sommable si la famille $\left(|x_i|\right)_{i\in I}$ l'est.

Propriétés :

Soit $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ deux familles complexes au plus dénombrables.

- Si $(y_i)_{i\in I}$ est une famille sommable de réels positifs et pour tout $i\in I$, $|x_i| \le y_i$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est sommable.
- Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors pour tous scalaires λ et μ, $(\lambda x_i + \mu y_i)_{i\in I}$ est sommable et la somme est linéaire : $\sum_{i\in I} (\lambda x_i + \mu y_i) = \lambda \sum_{i\in I} x_i + \mu \sum_{i\in I} y_i$.
- Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$ et $I_n \cap I_m = \varnothing$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $n \neq m$, alors :
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} x_i\right) = \sum_{i\in I} x_i .$$
- *Théorème de Fubini* : Si $(x_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une famille sommable, alors $\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty} x_{i,j}\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty} x_{i,j}\right)$.
- *Produit* : Si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ sont deux familles complexes au plus dénombrables et sommables, alors la famille $(x_i y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable avec :
$$\sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j = \left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right).$$

II - Espace probabilisé

II-1. Tribu et univers

Définitions :

Soit Ω un ensemble.

On appelle tribu sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

i. $\Omega \in \mathcal{A}$;

ii. pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$;

iii. pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

L'ensemble Ω est appelé univers.

On appelle espace probabilisable un couple $(\Omega, \mathcal{A})$ où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.

Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés événements.

Un <u>système complet (au plus dénombrable) d'évènements</u> est une famille (au plus dénombrable) $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements, incompatibles deux à deux et telle que $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$.

Dans la suite, Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω.

<u>Propriétés</u> :

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'évènements avec I fini ou dénombrable. On a :

$$\overline{\bigcap_{i\in I} A_i} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i} \quad \text{et} \quad \overline{\bigcup_{i\in I} A_i} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i} .$$

<u>Propriétés</u> :

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω.

- $\varnothing \in \mathcal{A}$.
- Toute réunion ou intersection finie d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, autrement dit, toute intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ appartient à $\mathcal{A}$.

Parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste :

Langage probabiliste	***langage ensembliste***
univers	ensemble
tribu	ensemble de parties (vérifiant certaines propriétés)
issue	élément
évènement	élément de la tribu
évènement élémentaire	singleton
évènement impossible	$\varnothing$
évènement certain	ensemble entier
évènement contraire	complémentaire
évènements incompatibles	parties disjointes
A et B	$A \cap B$
A ou B	$A \cup B$
système complet d'événements non vides	partition

II-2. <u>Loi de probabilité</u>

<u>Définitions</u> :

Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, on appelle <u>loi de probabilité</u> ou <u>probabilité</u> sur $(\Omega, \mathcal{A})$, une application $P : \mathcal{A} \to [0;1]$ telle que :

i. $P(\Omega) = 1$.

ii. Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements incompatibles deux à deux, $P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n)$ (σ-*additivité*).

On appelle <u>espace probabilisé</u> un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Un évènement <u>quasi-certain</u> ou <u>presque sûr</u> est un évènement de probabilité 1.

Un évènement <u>quasi-impossible</u> ou <u>négligeable</u> est un évènement de probabilité 0.

Un <u>système quasi-complet ou exhaustif (au plus dénombrable) d'évènements</u> est une famille (au plus dénombrable) $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements, incompatibles deux à deux et telle que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est quasi-certain.

<u>Propriété</u> :

Si P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, alors $P(\varnothing) = 0$.

Dans toute la suite, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

<u>Propriétés</u> :

Soit A et B deux événements de Ω. On a :

- Si A et B sont incompatibles ($A \cap B = \varnothing$), alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
- $P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$.
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)$. L'application P est croissante.

<u>Propriétés</u> :

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de Ω.

- *Continuité croissante* : Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_n \subset A_{n+1}$, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$
- *Continuité décroissante* : Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A_{n+1} \subset A_n$, alors :
$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

<u>Corollaires</u> :

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque d'événements de Ω. On a :

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k\in[\![0,n]\!]} A_k\right) = P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$
$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k\in[\![0,n]\!]} A_k\right) = P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$$

<u>Propriété</u> : Sous-additivité

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements de Ω telle que $\sum P(A_n)$ converge. On a :

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

III - Conditionnement et indépendance

III-1. Probabilité conditionnelle

a. Définition :

Définition :

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Notation : $P_B(A) = P(A \mid B)$.

Propriété et définition :

L'application P_B est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ appelée probabilité conditionnée à B.

Propriété : *Formule des probabilités composées*

Soit $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ une famille d'évènements. On a :

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-2}}(A_{m-1})P_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{m-1}}(A_m).$$

b. Formule des probabilités totales :

Propriété : *Formule des probabilités totales*

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un système quasi-complet d'événements et B un évènement.

La série $\sum P(A_n \cap B)$ converge et :

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n \cap B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B).$$

Corollaires : *Formules de Bayes*

- Si A et B sont deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, alors :

$$P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}.$$

- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet d'événements et si B est un événement tel que $P(B) > 0$, alors pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$P_B(A_N) = \frac{P(A_N)P_{A_N}(B)}{\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)P_{A_n}(B)}.$$

III-2. <u>Indépendance</u>

a. <u>Couple d'événements indépendants</u> :

<u>Définition</u> :

Deux évènements A et B sont <u>indépendants</u> si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

<u>Propriété</u> :

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $P_B(A) = P(A)$.

<u>Propriété</u> :

Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si A et $\overline{B}$ le sont.

b. <u>Famille finie d'événements mutuellement indépendants</u> :

<u>Définitions</u> :

Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'évènements. On dit que $A_1, ..., A_n$ sont <u>mutuellement indépendants</u> si pour tout $p \in [\![2, n]\!]$ et tout $(i_1, i_2, ..., i_p) \in [\![1, n]\!]^p$ tel que $i_1 < i_2 < ... < i_p$:

$$P(A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_p}) = P(A_{i_1}) \times ... \times P(A_{i_p}) .$$

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'évènements. On dit que les A_i sont <u>mutuellement indépendants</u> si les éléments de toute sous-famille finie de $(A_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendants.