

Résumé du chapitre 14 : Espérance et variance

Dans tout le chapitre, on se place dans espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et X est une variable aléatoire discrète ($X(\Omega)$ est au plus dénombrable) et à valeurs réelles.

I - Espérance

I-1. Définitions

Définition :

On dit que X est d'espérance finie si la famille $(xP(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

Si tel est le cas, on appelle espérance de X , notée $E(X)$, le réel $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X=x)$.

Définition : (hors programme)

Sous réserve de sommabilité, le moment d'ordre r de X (avec $r \in \mathbb{N}^*$) est $E(X^r) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X=x)x^r$.

I-2. Propriétés de l'espérance

Propriété :

Si X est à valeurs dans \mathbb{N} et d'espérance finie, alors $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

Propriété : Théorème du transfert

Soit f une application définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles.

La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X=x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable et, dans ce cas, on a :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$

Propriétés :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles telles que $|X| \leq Y$. Si Y est d'espérance finie, alors X aussi.

Propriétés :

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles d'espérance finie.

- *Linéarité de l'espérance* : pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.
- *Positivité de l'espérance* : si $X \geq 0$ (pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0$) alors $E(X) \geq 0$.
- *Croissance de l'espérance* : si $X \leq Y$ (pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$) alors $E(X) \leq E(Y)$.

Définition :

Si X est d'espérance finie, la variable $X - E(X)$ est une variable aléatoire dite centrée.

Propriété :

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes et d'espérances finies, alors XY est d'espérance finie et :

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

Propriété : Inégalité de Markov

Si X est une variable aléatoire réelle positive sur Ω et d'espérance finie, alors pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

I-3. Espérance des lois usuellesPropriété :

- Si X suit une loi uniforme avec $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, alors $E(X) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.
- Si X suit une loi de Bernoulli avec $X(\Omega) = \{a, b\}$ et $P(X = a) = p$, alors $E(X) = pa + (1 - p)b$.
- Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$.
- Si X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, alors $E(X) = \frac{1}{p}$.
- Si X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $E(X) = \lambda$.

II - Variance**II-1. Définition**Propriété :

Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie et on a :

$$E\left([X - E(X)]^2\right) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Définitions :

Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est $V(X) = E\left([X - E(X)]^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$.

L'écart-type de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

II-2. Propriétés de la variancePropriété :

Soit X est une variable aléatoire réelle admettant une variance finie.

Pour tous réels a et b , la variable aléatoire $aX + b$ admet une variance finie et on a :

$$V(aX + b) = a^2V(X).$$

Définition :

Si X admet une variance non nulle, alors la variable $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est appelée variable réduite.

Propriété : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

On suppose que X admet une variance. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$:

$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{V(X)}{a^2}.$$

II-3. Variance des lois usuellesPropriété :

- Si X suit une loi de Bernoulli avec $X(\Omega) = \{a, b\}$ et $P(X = a) = p$, alors $V(X) = (b - a)^2 p(1 - p)$.
- Si X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, alors $V(X) = np(1 - p)$.
- Si X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$, alors $V(X) = \frac{1 - p}{p^2}$.
- Si X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, alors $V(X) = \lambda$.

II-4. Covariance

Dans cette partie, on considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y .

Lemme :

Si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, la variable XY l'est aussi.

Définitions :

Si X^2 et Y^2 soient d'espérance finie, on appelle covariance de X et Y le réel :

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Propriété :

On a : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Propriétés :

La covariance est symétrique et bilinéaire. Autrement dit :

- $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$.
- Si X_1, X_2 et Y sont trois variables aléatoires réelles discrètes dont le carré est d'espérance finie, alors pour tous réels a et b , on a :

$$\text{cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a \text{cov}(X_1, Y) + b \text{cov}(X_2, Y)$$

$$\text{cov}(Y, aX_1 + bX_2) = a \text{cov}(Y, X_1) + b \text{cov}(Y, X_2)$$

Propriété :

Pour tous réels a et b , on a : $V(aX + bY) = a^2V(X) + b^2V(Y) + 2ab \operatorname{cov}(X, Y)$.

Propriété :

Si X et Y sont indépendantes, alors : $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Propriété : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si X et Y sont deux variables aléatoires telles que $E(X^2)$ et $E(Y^2)$ existent, alors :

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}.$$

Et on a égalité si et seulement si X et Y sont proportionnelles avec probabilité de 1.

Propriété :

Si X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires réelles discrètes telles que X_i^2 est d'espérance finie pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{cov}(X_i, X_j).$$

Et, si X_1, \dots, X_n sont deux à deux indépendantes :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

II-5. Loi faible des grands nombresThéorème : Loi faible des grands nombres

Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de variance finie, alors, en posant $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $m = E(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad \text{et} \quad P\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

III - Espérance, variance et fonction génératrice**III-1. Espérance et fonction génératrice**Propriété :

La variable aléatoire X admet une espérance finie $E(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1.

Si tel est le cas, on a alors :

$$E(X) = G_X'(1).$$

III-2. Variance et fonction génératricePropriété :

La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.

Si tel est le cas, on a alors :

$$V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - G_X'(1)^2.$$