Résumé du chapitre 16 : Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel préhilbertien réel. On note $(\cdot|\cdot)$ le produit scalaire de E et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

I – Projections orthogonales

I-1. Projection orthogonale

Théorème et définition :

Soit F un sous-espace vectoriel de E, F de dimension finie.

$$\forall\, x \in E,\ \exists!\, x_F \in F \ \backslash\ x - x_F \in F^{\perp}.$$

Le vecteur x_F est appelé projeté orthogonal de x sur F et l'application p_F de E dans E, qui à x associe x_F est linéaire et est appelée projection orthogonale sur F.

Propriété :

Soient F un sous-espace de dimension finie de E et p_F la projection orthogonale sur F.

Si $(e_1, e_2, ..., e_p)$ est une base orthonormale de F, alors pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = (e_1 | x)e_1 + (e_2 | x)e_2 + ... + (e_p | x)e_p.$$

Propriétés :

Soit F un sous-espace de dimension finie de E.

- $F \oplus F^{\perp} = E$.
- La projection orthogonale sur F est le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

I-2. Distance à un sous-espace vectoriel

Propriété et définition :

Soient A une partie non vide de E et $x_0 \in E$.

L'ensemble $\left\{\|a - x_0\| \ \backslash\ a \in A\right\}$ admet une borne inférieure appelée distance de x_0 à A, notée $d(x_0, A)$.

Propriété :

Si F est un sous-espace de dimension finie de E, et p_F est la projection orthogonale sur F, alors pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\|.$$

I-3. Projection orthogonale sur un hyperplan

Propriété et définition :

Soient $u \in E \setminus \{0\}$ et p est la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(u)$. L'application $id_E - p$ est le projecteur sur $(\operatorname{Vect}(u))^\perp$ parallèlement à $\operatorname{Vect}(u)$, appelé projection orthogonale sur l'hyperplan $(\operatorname{Vect}(u))^\perp$.

Propriété :

Soit $u \in E$ unitaire. La distance entre un vecteur x de E et $H = (\operatorname{Vect}(u))^\perp$ est :

$$d(x, H) = |(u \mid x)|.$$

II – Isométries vectorielles

Dans cette partie, E est euclidien.

II-1. Définition

Définition :

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie (vectorielle) de E s'il conserve la norme, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \|f(x)\| = \|x\|.$$

Définitions :

Soit F un sous-espace de E.

La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.

Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E est appelée réflexion.

Propriété :

Les symétries orthogonales sont des isométries.

II-2. Caractérisation des isométries

Propriété : *caractérisation par la conservation du produit scalaire*

Un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie si et seulement s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ \big(f(x) \mid f(y)\big) = (x \mid y).$$

Propriété :

Les isométries sont des automorphismes.

Propriété :

Soit f une isométrie de E. Si F est un sous-espace de E stable par f, alors $f(F) = F$ et $f(F^\perp) = F^\perp$.

Propriété : *caractérisation par l'image d'une base orthonormée*

Un endomorphisme de E est une isométrie de E si et seulement s'il transforme une base orthonormée quelconque en une base orthonormée.

II-3. Le groupe orthogonal de E

Définition :

L'ensemble des isométries de E est appelé groupe orthogonal de E, noté $O(E)$.

Propriété :

La composée de deux isométries est une isométrie et la réciproque d'une isométrie est une isométrie.

II-4. Matrices orthogonales

Dans cette partie $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique.

Définition :

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale $M^{\top}M = I_n$.

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Propriété : *Caractérisation des matrices orthogonales*

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M est une isométrie.

Propriété :

$M \in O(n)$ si et seulement si ses colonnes (assimilés à des vecteurs de $\mathbb{R}^n$) forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

Propriété :

Un endomorphisme u de E appartient à $O(E)$ si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est orthogonale.

Propriété :

$O(n)$, muni du produit matriciel, est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

II-5. Groupe spécial orthogonal

Propriété :

Pour tout $M \in O(n)$, $\det M = \pm 1$.

Définitions :

L'ensemble des matrices de $O(n)$ dont le déterminant vaut 1 est appelé groupe spécial orthogonal, noté $SO(n)$ ou $SO_n(\mathbb{R})$.

Une matrice de $SO(n)$ est dite matrice orthogonale positive et une matrice de $O(n)\setminus SO(n)$ est dite matrice orthogonale négative.

L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E de déterminant égal à 1 est appelé groupe spécial orthogonal de E, noté $SO(E)$. Les éléments de $SO(E)$ sont appelés des rotations.

Propriété :

> $(SO(n),\times)$ (*resp.* $(SO(E),\circ)$) est un sous-groupe de $(O(n),\times)$ (*resp.* $(O(E),\circ)$).

II-6. Changement de base orthonormale

Propriété :

> Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de *E*, $\mathcal{B}'$ une autre base de *E* et *P* la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
>
> La base $\mathcal{B}'$ est une base orthonormée si et seulement si $P \in O(n)$.
>
> De plus, si *E* est orienté et $\mathcal{B}$ est directe, alors $\mathcal{B}'$ est orthonormée directe si et seulement si $P \in SO(n)$.

III – Endomorphismes autoadjoints

Dans cette partie à nouveau, E est euclidien.

III-1. Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien

Définition :

> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que *u* est autoadjoint ou symétrique si pour tout $(x, y) \in E^2$:
>
> $$\big(u(x) \mid y\big) = \big(x \mid u(y)\big).$$

Notation : On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de *E*.

Propriété :

> $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Propriété :

> Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de *E* et $u \in \mathcal{L}(E)$, alors *u* est autoadjoint si et seulement si $M_{\mathcal{B}}(u)$ est symétrique.

III-2. Réduction des endomorphismes autoadjoints : théorème spectral

Théorème : *Théorème spectral*

> Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormale de vecteurs propres.

Corollaire : *Interprétation matricielle du théorème spectral*

> Pour toute matrice symétrique réelle *A*, il existe une matrice diagonale réelle *D* et une matrice orthogonale *P* telles que $A = PDP^{-1} = PDP^{\top}$.

III-3. Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

Définition :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.

On dit que u est positif si pour tout $x \in E$, $\big(x \mid u(x)\big) \geq 0$.

On dit que u est défini positif si pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\big(x \mid u(x)\big) > 0$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique.

On dit que A est *positive* si, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^{\top}AX \geq 0$.

On dit que A est *définie positive* si pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$, on a $X^{\top}AX > 0$.

Propriété :

Un endomorphisme autoadjoint u de E est positif (*resp*. défini positif) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (*resp*. strictement positives).

Une matrice symétrique A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est positive (*resp*. définie positive) si et seulement si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (*resp*. strictement positives).