Résumé du chapitre 17 : Espaces euclidiens de dimension 2 ou 3

Dans ce chapitre, E est un espace euclidien orienté.

Les vecteurs seront notés avec des flèches : $\vec{u}$, $\vec{v}$, …

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *de E sera noté* $(\vec{u}\,|\,\vec{v})$ *ou* $\vec{u}.\vec{v}$ *et la norme d'un vecteur* $\vec{u}$ *sera notée* $\|\vec{u}\|$.

I – Produit vectoriel, produit mixte

I-1. <u>Produit vectoriel</u>

Dans cette partie, E est de dimension 3 et est muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

<u>*Définition*</u> :

Soient $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.

Le produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$, est le vecteur :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\left(yz'-y'z\right)\vec{i}+\left(x'z-xz'\right)\vec{j}+\left(xy'-x'y\right)\vec{k}\,.$$

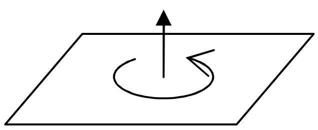
<u>*Propriétés*</u> : (***non mentionnées dans le programme***)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de *E*.

- $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est normal au plan $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ et $\left(\vec{u},\vec{v},\vec{u}\wedge\vec{v}\right)$ est un base directe de *E*.
- $\left(\vec{u}.\vec{v}\right)^2+\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$.
- Le produit vectoriel est bilinéaire et antisymétrique.

<u>*Orientation d'un plan ou d'une droite*</u> :

Un plan de *E* est orienté par la donnée d'un vecteur normal :



Une droite *D* de l'espace est orientée par la donnée d'un vecteur directeur (ou d'un plan orienté orthogonal à *D*).

I-2. <u>Produit mixte</u>

a. <u>Produit mixte dans le plan</u> :

Dans cette partie, E est de dimension 2 et est muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j})$.

<u>*Propriété et définition*</u> :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de *E*. Le réel $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v})$ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. On appelle ce nombre <u>produit mixte</u> de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\left[\vec{u},\vec{v}\right]$.

Propriété et définition : (***non mentionnées dans le programme***)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de *E*.

Il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que :

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{[\vec{u},\vec{v}]}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}.$$

Le réel θ, noté $(\vec{u},\vec{v})$, est la mesure de l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Interprétation géométrique

$[\vec{u},\vec{v}]$ est le « *aire algébrique* » du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Une application : Equation d'une droite dans une base orthonormée directe

Une équation cartésienne de la droite $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ est donnée $[\vec{u},\vec{v}] = 0$ avec $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

b. Produit mixte dans l'espace :

Dans cette partie, E est à nouveau de dimension 3 et muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, noté $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$, est le réel :

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}.$$

Interprétation géométrique

$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ est le « *volume algébrique* » de *P*.

Propriété :

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On a dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}$:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = \det_{\mathcal{B}}(\vec{u},\vec{v},\vec{w}).$$

Corollaires : (***non mentionnées dans le programme***)

- Le produit mixte est trilinéaire et antisymétrique.
- Trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$.

Une application : Equation d'un plan dans une base orthonormée directe

Une équation cartésienne du plan $\mathrm{Vect}(\vec{u},\vec{v})$ est donnée $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}] = 0$ avec $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

II – Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans cette partie, E est de dimension 2 et est muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B}=(\vec{i},\vec{j})$.

II-1. Caractérisation des isométries du plan

Propriété :

Dans un plan euclidien, tout automorphisme orthogonal est soit une rotation, soit une réflexion et, dans une base orthonormée directe, il existe $\alpha\in\mathbb{R}$, unique modulo 2π, tel que la matrice :

- d'une rotation r est de la forme $R(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$;
- d'une réflexion est de la forme $S(\alpha)=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$.

  Dans ce cas, c'est une réflexion par rapport à la droite $\mathbb{R}\vec{a}$, appelée axe de la réflexion, où $(\vec{i},\vec{a})=\dfrac{\alpha}{2}$.

Corollaire :

$$SO(2)=\{R(\theta),\theta\in\mathbb{R}\}\quad\text{et}\quad O^-(2)=\{S(\theta),\theta\in\mathbb{R}\}.$$

II-2. Rotations du plan

Propriété :

Pour tout $(\theta,\theta')\in\mathbb{R}^2$:

$$R(\theta)R(\theta')=R(\theta')R(\theta)=R(\theta+\theta').$$

Propriété et définition :

Soit une rotation r de matrice $R(\alpha)$ dans une base orthonormée directe du plan.

La matrice de r est $R(\alpha)$ dans toute base orthonormée directe du plan et $R(-\alpha)$ dans toute base orthonormée indirecte du plan.

Le réel α est appelé mesure de l'angle orienté de la rotation r.

Propriétés :

- $(SO(2),\times)$ est un sous-groupe commutatif de $(O(2),\times)$.
- La composée de deux rotations du plan est une rotation du plan dont l'angle est la somme des angles des deux rotations.
- La réciproque d'une rotation de plan est la rotation du plan d'angle opposé.

Propriété : *Écriture complexe d'une rotation*

Soit r une rotation d'angle α du plan vectoriel complexe (qui est orienté).

Pour tout vecteur $\vec{u}$ d'affixe z, l'affixe de $r(\vec{u})$ est $z'=e^{i\alpha}z$.

Réciproquement, si f est une application du plan vectoriel complexe dans lui-même, d'écriture complexe $z'=e^{i\alpha}z$, alors f est la rotation d'angle α.

Propriété :

> Soit r une rotation d'angle α du plan (orienté) E. Pour tout $\vec{u} \in E \setminus \{\vec{0}\}$, on a :
>
> $$\left(\vec{u}, r(\vec{u})\right) = \alpha \ [2\pi].$$

III – Isométries d'un espace euclidien de dimension 3

Dans cette partie, E est de dimension 3 et est muni d'une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

III-1. Caractérisation des isométries de l'espace

Propriété :

> Les isométries d'un espace euclidien de dimension 3 sont soit des rotations, soit des réflexions, soit des composées d'une rotation et d'une réflexion.

III-2. Rotations de l'espace

Définitions :

> Soit r une rotation de E.
>
> La droite vectorielle orientée $F = \ker(r - id_E)$ est l'axe de la rotation r et l'endomorphisme induit par r sur $F^{\perp}$ est une rotation dont l'angle orienté est appelé (mesure de l') angle de la rotation r.
>
> Une rotation d'angle π s'appelle un retournement de l'espace (***non mentionné dans le programme***).

Propriété : (***non mentionnées dans le programme***)

> Soit r une rotation de E, d'angle θ. On a :
>
> $$tr(r) = 1 + 2\cos\theta.$$