TD du chapitre 15 : Espaces préhilbertiens réels

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $(P \mid Q) = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k)$.

1) Donner une condition nécessaire et suffisante simple pour qu'on ait ainsi défini un produit scalaire.

Dans la suite, on suppose cette condition vérifiée.

2) On pose pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $L_k = \dfrac{\prod_{i \in [\![0,n]\!],\, i \neq k} (X - a_i)}{\prod_{i \in [\![0,n]\!],\, i \neq k} (a_k - a_i)}$ (*polynômes de Lagrange*).

   Montrer que $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ (muni du produit scalaire défini ci-dessus).

3) Calculer $\inf_{P \in F} \left(\sum_{k=0}^{n} P(a_k)^2 \right)$ avec $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \setminus \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 1 \right\}$.

Exercice 2

Soit $\varphi \in C([-1;1], \mathbb{R}_+^*)$. On pose $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $(P, Q) \mapsto (P \mid Q) = \int_{-1}^{1} PQ\varphi$ est un produit scalaire sur *E*.

Dans la suite, on munit *E* de ce produit scalaire.

2) Prouver qu'il existe une unique base orthonormée de *E*, échelonnée en degrés et constituée de polynômes de coefficients dominants strictement positifs.
3) Dans cette question, on prend φ constante égale à 1 et on pose pour tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$Q_k = \frac{d^k}{dX^k}\left[(X^2 - 1)^k \right] \text{ (\textit{polynôme de Legendre}).}$$

   a. Déterminer pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le degré et le coefficient dominant de Q_k.
   b. En déduire que la famille $(Q_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de *E*.
   c. Montrer que la famille $(Q_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base orthogonale de *E*.

Exercice 3

Soit *E* un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une norme, notée $\| \cdot \|$, vérifiant l'identité du parallélogramme.

Montrer que cette norme est hilbertienne.

Exercice 4

Soit *E* un espace euclidien de dimension $n > 1$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée de *E* et $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in E^n$.
Montrer que :

$$\left| \det_{\mathcal{B}} (x_1, x_2, \dots, x_n) \right| \leq \|x_1\| . \|x_2\| \dots \|x_n\| \quad \text{(\textit{Inégalité de Hadamard}).}$$

Etudier le cas d'égalité.

Exercice 5

Soit E un espace préhilbertien réel et f un endomorphisme de E qui conserve l'orthogonalité, c'est-à-dire tel que pour tout $(x, y) \in E^2$:

$$(x \mid y) = 0 \;\Rightarrow\; \big(f(x) \mid f(y)\big) = 0 .$$

Montrer qu'il existe un réel positif k tel que pour tout $x \in E$, $\|f(x)\| = k\|x\|$.

Exercice 6

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On pose pour toutes matrices A et B de E, $\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB)$.

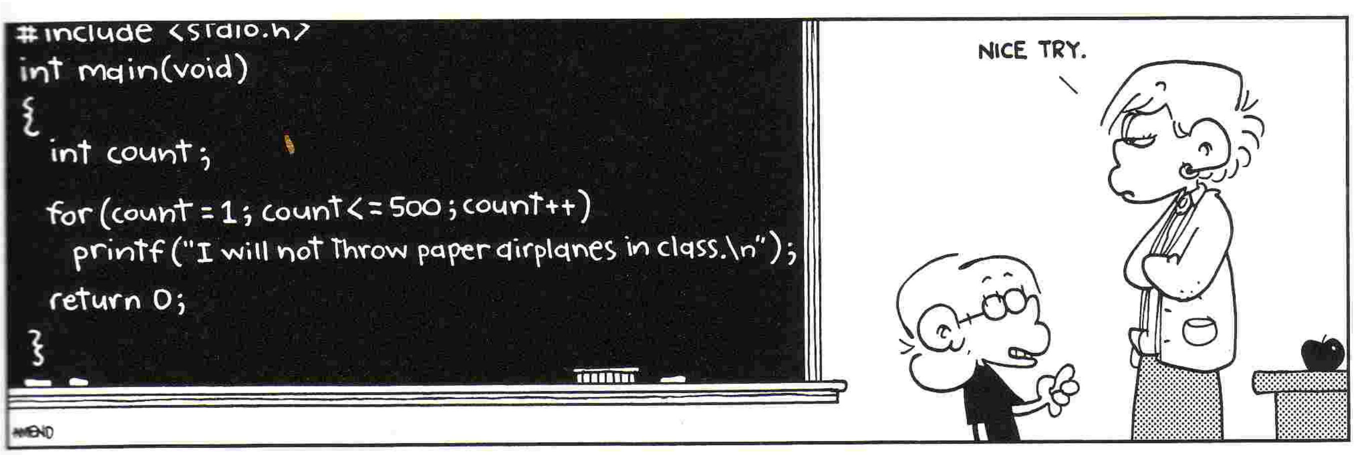
1) Montrer que $(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle$ définit un produit scalaire sur E. On note $\|.\|$ la norme associée.

2) Déterminer les matrices P de $GL_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute matrice A de E, $\|A\| = \|P^{-1}AP\|$.

Exercice 7

Soit $f \in C([0;1], \mathbb{R}_+)$. Montrer que :

$$4\left(\int_0^1 x^2 f(x)dx\right)\left(\int_0^1 x f(x)^2 dx\right) \le \int_0^1 f(x)^3 dx .$$



Exercice 8 (*Mines*)

Montrer que $f : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(1 + x_1 t + \dots + x_n t^n\right)^2 dt$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^n$.

☺ *On pourra commencer par prouver que l'application* $(P, Q) \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} P(t)Q(t)\, dt$ *est définie et est un produit scalaire sur* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 9 (*Centrale – deux planches fusionnées*)

On considère p vecteurs $(e_1, \dots, e_p)$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ tels que pour tous i, j de $[\![1, p]\!]$ tels que $i \ne j$, on a $\langle e_i \mid e_j\rangle < 0$.

1) Trouver une telle famille lorsque $n = 2$ et $p = 3$.

2) Pour $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on pose $x = \sum_{k=1}^{p} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{p} |x_k| e_k$. Montrer que $\|y\| \leq \|x\|$.

3) Montrer que si $x = 0$, alors soit tous les x_k sont nuls, soit aucun ne l'est.

4) Montrer que $p \leq n+1$.

Dans la suite, on suppose que $p = n+1$ et que pour tous i, j de $[\![1, n+1]\!]$ tels que $i \neq j$, $\langle e_i \mid e_j \rangle = -1$.

5) La famille $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est-elle libre ? Donner un exemple d'une telle famille pour $n = 2$.

6) On pose pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $\mu_i = \dfrac{1}{\|e_i\|^2 + 1}$. Montrer que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i e_i = 0.$$

7) Montrer que toute sous-famille stricte de $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est libre.