

TD du chapitre 16 : Endomorphismes particuliers d'un espace euclidien
Exercice 1

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = 1$ et $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{i,j} = \alpha_i \alpha_j$.

Montrer que f , l'endomorphisme de \mathbb{R}^n canoniquement associé à A , est un projecteur orthogonal.

Exercice 2

Soit $E = C^1([0;1], \mathbb{R})$. Pour tous f, g de E , on pose :

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt.$$

On pose par ailleurs :

$$V = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \quad \text{et} \quad W = \{f \in E \mid f \in C^2([0;1], \mathbb{R}) \text{ et } f'' = f\}.$$

- Montrer que $(f, g) \mapsto (f \mid g)$ définit un produit scalaire sur E .
- Prouver que V et W sont des sous-espaces supplémentaires dans E et orthogonaux pour le produit scalaire ci-dessus.
- Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $E_{\alpha, \beta} = \{f \in E \mid f(0) = \alpha \text{ et } f(1) = \beta\}$. Calculer $\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \left(\int_0^1 [f(t)^2 + f'(t)^2] dt \right)$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel euclidien, F et G deux sous-espaces supplémentaires de E et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- s est une symétrie orthogonale (i.e. $G = F^\perp$) ;
- s est un automorphisme orthogonal ;
- s est un endomorphisme autoadjoint.

Exercice 4

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale $Q \in O(n)$ et une matrice triangulaire supérieure R (« right triangular ») telles que $A = QR$ (Décomposition QR). Quel est l'intérêt de cette décomposition pour la résolution du système linéaire $AX = B$?

☺ On pourra utiliser l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 5

Soient E un espace euclidien muni d'une base orthonormée \mathcal{B} et $\mathcal{F} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E . On note $G = G(x_1, x_2, \dots, x_p)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont $(x_i \mid x_j)$, appelée *matrice de Gram* de la famille \mathcal{F} et $A = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

- Comparer $rg(A)$ et $rg(\mathcal{F})$.
- Montrer que $G = A^T A$.
- Prouver que $\ker(A^T A) = \ker A$ et en déduire que $rg(\mathcal{F}) = rg(G)$.

- 4) Prouver que $\det G \geq 0$. Dans quel cas a-t-on $\det G = 0$?
- 5) Soit F un sous-espace de E muni d'une base (e_1, e_2, \dots, e_p) et x un vecteur de E . Montrer que :

$$d(x, F)^2 = \frac{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p, x)}{\det G(e_1, e_2, \dots, e_p)}.$$

Exercice 6

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(U_1, U_2, \dots, U_n) \in (\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}))^n$ tels que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $U_k U_k^\top = 1$ et $A = \sum_{k=1}^n \lambda_k U_k U_k^\top$.

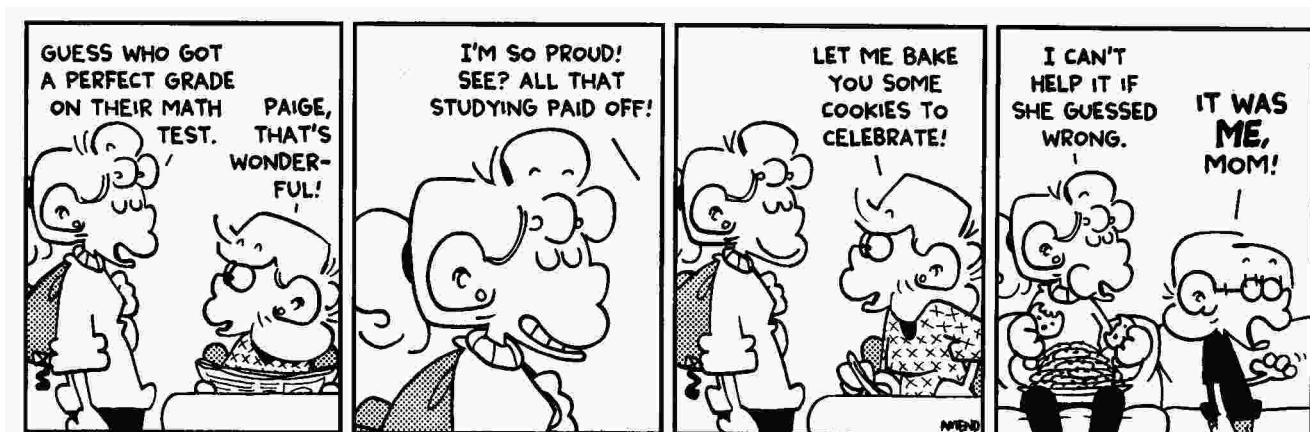
Exercice 7 (autour des endomorphismes autoadjoints positifs)

- 1) Soit E un espace euclidien et $u \in S(E)$ de valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ telles que $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Montrer que pour tout vecteur x non nul de E , on a :

$$\lambda_1 \leq \frac{(x | u(x))}{\|x\|^2} \leq \lambda_n.$$

- 2) Montrer que la matrice de Hilbert $H = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ est définie positive.
- 3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $S = A^\top A$.
- Prouver que S est une matrice symétrique positive.
 - Réciproquement, montrer que pour toute matrice S symétrique positive, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $S = A^\top A$. La matrice A est-elle unique ?
 - Montrer que S est définie positive si et seulement si A est inversible.
 - Montrer que $rg(A) = rg(S)$.
- 4) Soit S une matrice symétrique positive. Montrer qu'il existe une et une seule matrice R symétrique positive telle que $R^2 = S$.
- 5) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice positive. Montrer que $1 + \sqrt[n]{\det A} \leq \sqrt[n]{\det(I_n + A)}$.



Exercice 8 (Centrale)

On pose $E = S_n(\mathbb{R})$ et on définit la relation $<$ sur E par : $A < B \Leftrightarrow \forall X \in \mathbb{R}^n, X^T A X \leq X^T B X$.

- 1) Montrer que $<$ est une relation d'ordre sur E . Est-elle totale ?
- 2) Montrer que si $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E , croissante et majorée pour $<$, alors elle converge dans E .

Exercice 9 (Mines et plein d'autres...)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- 1) Montrer que A est antisymétrique si et seulement si, pour toute matrice orthogonale P , $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle.

Dans les questions suivantes, A est antisymétrique.

- 2) Montrer que $I_n + A$ et $I_n - A$ sont inversibles.
- 3) On pose $B = (I_n + A)^{-1}(I_n - A)$. Montrer que $B \in SO_n(\mathbb{R})$.
- 4) Prouver que $I_n + B$ est inversible, puis que $A = (I_n + B)^{-1}(I_n - B)$.

Exercice 10 (Mines et Centrale)

Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E et $S^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs de E .

- 1) Montrer que, pour tout $u \in S(E)$, $E = \ker u \oplus \text{Im } u$.
- 2) Soient $u, v \in S^+(E)$. Prouver que $\ker(u+v) = \ker u \cap \ker v$, puis que $\text{Im}(u+v) = \text{Im } u + \text{Im } v$.

