Corrigé du DM n° 2

Partie 1

1°) a) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Alors, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, on a $|u_n| \leq \varepsilon$. Alors, pour tout entier $n \geq N+1$:

$$|v_n| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k| = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}|u_k| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n}|u_k| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}|u_k| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n}\varepsilon .$$

On a :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n}\varepsilon = \frac{n-N}{n+1}\varepsilon \leq \varepsilon .$$

Et comme $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}|u_k|\right) = 0$, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N'$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}|u_k| \leq \varepsilon$.

Alors, pour tout entier $n \geq \max(N+1, N')$, on a $|v_n| \leq 2\varepsilon$. Ceci prouve que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et ainsi :

Si la suite u converge vers 0, elle converge en moyenne vers 0.

b) On suppose que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$, donc $\lim_{n\to+\infty}(u_n - \ell) = 0$ et d'après la question précédente :

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell)\right] = 0 .$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(u_k - \ell) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\ell = v_n - \frac{1}{n+1}(n+1)\ell = v_n - \ell .$$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty}(v_n - \ell) = 0$, soit $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$. Donc :

Si la suite u converge vers ℓ, elle converge en moyenne vers ℓ.

c) Donc, d'après la question précédente, si $v = Tu$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors $w = Tv$ converge aussi vers $\ell \in \mathbb{R}$. Comme $w = Tv = T^2 u$:

Si u converge en moyenne vers ℓ, elle converge en moyenne itérée vers ℓ.

d) Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=(-1)^n+\ell$. La suite u diverge et pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$v_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k+\ell\right]=\frac{1}{n+1}\,\frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)}+\ell=\frac{1}{n+1}\,\frac{1+(-1)^n}{2}+\ell\,.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\frac{1+(-1)^n}{2}=0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\ell$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Pour } u=\left((-1)^n+\ell\right)_{n\in\mathbb{N}},\ u \text{ est suite divergente qui converge en moyenne vers } \ell.}$$

e) Il suffit ici de trouver une suite u telle que Tu soit la suite $\left((-1)^n+\ell\right)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k=(-1)^n+\ell \quad\Leftrightarrow\quad \sum_{k=0}^{n}u_k=(n+1)\left[(-1)^n+\ell\right].$$

Ceci revient à $u_0=1+\ell$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}u_k-\sum_{k=0}^{n-1}u_k=(n+1)\left[(-1)^n+\ell\right]-n\left[(-1)^{n-1}+\ell\right]=(2n+1)(-1)^n+\ell\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour } u=\left((2n+1)(-1)^n+\ell\right)_{n\in\mathbb{N}},\ u \text{ est suite divergente en}\\ \text{moyenne, mais convergente vers } \ell \text{ en moyenne itérée.}\end{array}}$$

f) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$. Alors, pour tout réel $A>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geq N$, on a $u_n\geq 2(A+1)$. Alors, pour tout entier $n\geq N+1$:

$$v_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}u_k+\frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n}u_k\geq\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}u_k+\frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n}2(A+1)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}u_k+\frac{n-N}{n+1}2(A+1)\,.$$

On a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}u_k\right)=0$, donc il existe $N'\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geq N'$, $\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N}u_k\geq -1$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n-N}{n+1}\right)=1$, donc il existe $N''\in\mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n\geq N''$, $\frac{n-N}{n+1}\geq\frac{1}{2}$.

Alors, pour tout entier $n\geq\max(N+1,N',N'')$, on a $v_n\geq -1+\frac{1}{2}2(A+1)=A$. Ceci prouve que :

$$\lim_{n\to+\infty}v_n=+\infty\,.$$

Comme $w=Tv$, on a immédiatement aussi :

$$\lim_{n\to+\infty}w_n=+\infty\,.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Si la suite } u \text{ diverge vers } +\infty\text{, alors il en est de même de } v = Tu \text{ et de } w = T^2u.}$$

2°) a) On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k = 0$ et on veut prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} \sqrt{u_k} = 0$.

Si $(x_0, x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^{n+1}$ muni du produit scalaire canonique, l'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$\sum_{k=0}^{n} x_k y_k \leq \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n} x_k^2\right)\left(\sum_{k=0}^{n} y_k^2\right)}.$$

On applique cela à $(x_0, x_1, \dots, x_n) = (\sqrt{u_0}, \sqrt{u_1}, \dots, \sqrt{u_n})$ et $(y_0, y_1, \dots, y_n) = (1, 1, \dots, 1)$, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k} \leq \sqrt{\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right)}.$$

Or, $\sqrt{\left(\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{n} 1\right)} = \sqrt{[(n+1)v_n](n+1)} = (n+1)\sqrt{v_n}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k} \leq (n+1)\sqrt{v_n} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k} \leq \sqrt{v_n}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{v_n} = 0$ et le théorème des gendarmes donne immédiatement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \sqrt{u_k} = 0}$$

b) On suppose que u est décroissante. On veut prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n\sqrt{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\sqrt{k} = 0.$$

Le sens direct a été établi dans la première question du problème.

Supposons donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n} u_k\sqrt{k} = 0$.

Comme u est décroissante et positive, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$:

$$0 \leq u_n \leq u_k.$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}\right)u_n \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\sqrt{k}.$$

Avec $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k\sqrt{k}=0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}\right)u_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}\left(\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}\right)\left(u_n\sqrt{n}\right)=0.$$

A l'aide de la fonction $t\mapsto\sqrt{t}$, dont une primitive est $t\mapsto\frac{2}{3}t\sqrt{t}$, et d'une comparaison série intégrale, on prouve que $\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{3}n\sqrt{n}$, donc :

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}\left(\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k}\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}\frac{2}{3}n\sqrt{n}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2}{3}.$$

Avec la limite précédente, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n\sqrt{n}=0.$$

Ainsi, on a bien :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n\sqrt{n}=0\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_k\sqrt{k}=0}$$

c) On suppose à nouveau que u est décroissante.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, posons $U_n=nu_n$, $V=TU$ et $W=T^2U$, on veut prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=0\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}W_n=0.$$

Comme plus haut, le sens direct a été établi dans la question **1**°).

Supposons donc que $\lim_{n\to+\infty}W_n=0$.

Comme u est décroissante et positive, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $k\in[\![0,n]\!]$, $0\le u_n\le u_k$.

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$0\le\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n}k\right)u_n\le\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}ku_k\quad\Leftrightarrow\quad0\le\frac{1}{n+1}\frac{n(n+1)}{2}u_n\le\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}U_k\quad\Leftrightarrow\quad0\le\frac{1}{2}U_n\le V_n.$$

Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$0\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}U_k\le\sum_{k=0}^{n}V_k\quad\Leftrightarrow\quad0\le\frac{1}{2}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}U_k\le\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}V_k\quad\Leftrightarrow\quad0\le V_n\le2W_n.$$

Avec $0\le\frac{1}{2}U_n\le V_n$, on obtient, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$0\le U_n\le4W_n.$$

Comme $\lim_{n\to+\infty}W_n=0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=0.$$

Finalement, on a bien :

$$\boxed{\text{La suite } (nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers 0 si et seulement si elle converge en moyenne itérée vers 0.}}$$

Partie 2

1°) a) Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(Ts)_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k} u_p = \frac{1}{n+1}\sum_{0\le p\le k\le n} u_p = \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}\sum_{k=p}^{n} u_p\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}(n-p+1)u_p = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{p=0}^{n}(n+1)u_p - \sum_{p=0}^{n} pu_p\right)\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}(n+1)u_p - \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} pu_p = \sum_{p=0}^{n} u_p - \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n} v_p = s_n - (Tv)_n\end{aligned}$$

Soit, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(Tv)_n = s_n - (Ts)_n$ et donc :

$$\boxed{s - Ts = Tv}$$

b) Si s converge vers $\ell\in\mathbb{R}$, alors Ts aussi d'après la première partie. Alors, $Tv = s - Ts$ tend vers 0 et ainsi :

$$\boxed{\text{Si } s \text{ converge vers } \ell\in\mathbb{R}\text{, alors } v \text{ converge en moyenne vers 0.}}$$

c) On suppose que s converge en moyenne vers ℓ, autrement dit Ts converge vers ℓ.

Toujours avec la relation $s - Ts = Tv$, on a :

$$(Tv)_n \to 0 \quad\Leftrightarrow\quad s_n - (Ts)_n \to 0 \quad\Leftrightarrow\quad s_n \to \ell \quad (\text{car } (Ts)_n \to \ell).$$

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite } v \text{ converge en moyenne vers 0 si et seulement si la}\\ \text{série de terme général } u_n \text{ converge (et sa somme vaut } \ell\text{).}\end{array}}$$

2°) a) Reprenons la suite $u = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $s_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2} = \dfrac{1}{2}(1+u_n)$, donc :

$$(Ts)_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} s_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2}(1+u_k) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n+1}s_n\right) = \frac{1}{2}+\frac{1+(-1)^n}{4(n+1)} \to \frac{1}{2}.$$

Et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a :

$$(n+2)(Tv)_{n+1} - (n+1)(Tv)_n = \sum_{k=0}^{n+1} v_k - \sum_{k=0}^{n} v_k = v_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1).$$

Donc :

$$\frac{1}{n+1}(Tv)_{n+1} + (Tv)_{n+1} - (Tv)_n = (-1)^{n+1}.$$

Et, si Tv converge, alors $\dfrac{1}{n+1}(Tv)_{n+1} + (Tv)_{n+1} - (Tv)_n \to 0$, soit $\left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, ce qui est absurde. Ainsi :

$$\boxed{\text{Avec } u = \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}\text{, } s \text{ converge en moyenne sans que } v \text{ converge en moyenne vers 0.}}$$

b) Ici, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$. On veut étudier la convergence de Ts et Tv.

On a d'une part :

$$v_n=nu_n=\frac{n}{(n+1)\ln(n+2)}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\ln n}\quad\Rightarrow\quad\lim_{n\to+\infty}v_n=0\,.$$

Et, d'après la première partie :

$$\lim_{n\to+\infty}(Tv)_n=0\,.$$

D'autre part, la fonction $f:t\mapsto\dfrac{1}{(t+1)\ln(t+2)}$ est définie, continue, positive et décroissante sur $\mathbb{R}_+$, donc par comparaison série-intégrale, les suites $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Or, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^n f(t)dt\geq\int_0^n\frac{dt}{(t+2)\ln(t+2)}=\ln\big(\ln(n+2)\big)-\ln\big(\ln 2\big)\,.$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\big(\ln(n+2)\big)=+\infty$, on a par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=+\infty$, soit :

$$\lim_{n\to+\infty}s_n=+\infty\,.$$

Or, $s-Ts=Tv$, donc, avec $\lim\limits_{n\to+\infty}(Tv)_n=0$, on obtient immédiatement :

$$\lim_{n\to+\infty}(Ts)_n=+\infty\,.$$

c) On suppose que s converge en moyenne, soit Ts converge.

Alors, d'après la première partie, T^2s converge vers la même limite.

Or, par linéarité de T (voir plus bas) :

$$T^2v=T(Tv)=T(s-Ts)=Ts-T(Ts)=Ts-T^2s\,.$$

Donc, T^2v converge vers 0 et ainsi :

Si s converge en moyenne, v converge en moyenne itérée vers 0.

La réciproque serait : si v converge en moyenne itérée vers 0, alors s converge en moyenne.

Or, dans l'exemple de la question précédente, on avait $\lim\limits_{n\to+\infty}(Tv)_n=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(T^2v)_n=0$, mais $\lim\limits_{n\to+\infty}(Ts)_n=+\infty$, donc ici v converge en moyenne itérée vers 0, mais s ne converge pas en moyenne.

Ainsi :

La réciproque est fausse.

Partie 3

1°) Soit deux suites a et b de E et deux réels λ et μ. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\lambda Ta_n + \mu Tb_n = \lambda \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k + \mu \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} b_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(\lambda a_k + \mu b_k) = T(\lambda a + \mu b)_n .$$

Donc $\lambda Ta + \mu Tb = T(\lambda a + \mu b)$ et l'application T est linéaire.

De plus, on a vu que si une suite u converge, alors Tu converge (vers la même limite). Donc, pour tout $u \in E$, on a $Tu \in E$ et T, définie sur E, est à images dans E.

Ainsi :

$$\boxed{\text{L'application } T \text{ qui à tout } u \text{ de } E \text{ associe } Tu \text{ est un endomorphisme de } E.}$$

2°) Soient $u \in E$ et $v = Tu$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|v_n| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}|u_k| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\|u\|_\infty = \frac{1}{n+1}(n+1)\|u\|_\infty = \|u\|_\infty .$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|v\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}|v_n| \leq \|u\|_\infty$.

Ainsi, pour tout $u \in E$, $\|Tu\|_\infty \leq \|u\|_\infty$ et, comme T est linéaire, ceci prouve que :

$$\boxed{T \text{ est 1-lipschitzienne sur } E.}$$

Toute application lipschitzienne sur un EVN est continue, donc :

$$\boxed{T \text{ est continue sur } E.}$$

3°) Soit $u \in E$ un point fixe de T, autrement une suite telle que $Tu = u$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = u_n \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_n .$$

Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n\,u_n$. Donc :

$$\begin{aligned} &u_0 = 1u_1 \;\Rightarrow\; u_1 = u_0 \\ &u_0 + u_1 = 2u_2 \Rightarrow\; 2u_2 = 2u_0 \Rightarrow\; u_2 = u_0 \\ &\quad\vdots \end{aligned}$$

Prouvons alors par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0$.

- La propriété est vraie au rang $n = 0$.
- Supposons la propriété vraie jusqu'à un rang $n-1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

  On a alors $u_0 = u_1 = \ldots = u_{n-1}$ par hypothèse de récurrence, donc $n\,u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = n\,u_0$, ce qui donne immédiatement $u_n = u_0$ (car $n \neq 0$). Ainsi, la propriété est vraie au rang n.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ceci prouve que si $u \in E$ est un point fixe de *T*, alors *u* est constante.

Réciproquement, soit une suite constante *u* telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a$.

On a immédiatement $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$, donc $u \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(Tu)_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a = \frac{1}{n+1}(n+1)a = a = u_n .$$

Donc, $Tu = u$.

Finalement :

$$\boxed{\text{Les points fixes de } T \text{ sont les suites constantes.}}$$

4°) a) On a vu dans la partie 1 que, si une suite converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, alors son image par *T* converge aussi vers ℓ.

Avec $u^{(0)} = u$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{(k+1)} = Tu^{(k)}$, on prouve par une récurrence simple que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u^{(k)}$ converge vers ℓ.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{u^{(k)} \text{ converge vers } \ell .}$$

b) On a vu que, pour tout $u \in E$, $\|Tu\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\|u^{(k+1)}\right\|_\infty = \left\|Tu^{(k)}\right\|_\infty \leq \left\|u^{(k)}\right\|_\infty .$$

Ainsi :

$$\left(\left\|u^{(k)}\right\|_\infty\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est décroissante.}$$

De plus, pour tout $u \in E$, $(Tu)_0 = \frac{1}{0+1}\sum_{k=0}^{0} u_k = u_0$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_0^{(k+1)} = (Tu^{(k)})_0 = u_0^{(k)} .$$

Ainsi, la suite $\left(u_0^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_0^{(k)} = u_0^{(0)} = u_0 .$$

Remarquons enfin que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\left\|u^{(k)}\right\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|u_n^{(k)}\right| \geq \left|u_0^{(k)}\right| = |u_0| .$$

Ainsi :

$$\left(\left\|u^{(k)}\right\|_\infty\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est minorée par } |u_0| .$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La suite réelle } \left(\left\|u^{(k)}\right\|_\infty\right)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est bien décroissante et minorée par } |u_0| .}$$

c) On suppose que la suite $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une suite $U \in E$, soit $\lim_{k\to+\infty} u^{(k)} = U$.

Comme *T* est continue sur *E*, on a :

$$\lim_{k\to+\infty} Tu^{(k)} = TU .$$

Or :

$$\lim_{k\to+\infty} Tu^{(k)} = \lim_{k\to+\infty} u^{(k+1)} = U .$$

Donc, $TU = U$ et d'après la question 3°), *U* est constante.

Enfin, on a $\lim_{k\to+\infty} \left\| u^{(k)} - U \right\|_\infty = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\left| u_0^{(k)} - U_0 \right| \leq \left\| u^{(k)} - U \right\|_\infty$, donc :

$$\lim_{k\to+\infty} \left| u_0^{(k)} - U_0 \right| = 0 .$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_0^{(k)} = u_0^{(0)} = u_0$, donc $\lim_{k\to+\infty} \left| u_0 - U_0 \right| = 0$, soit $\left| u_0 - U_0 \right| = 0$ et donc $U_0 = u_0$.

Comme *U* est constante, *U* est la suite constante dont tous les termes valent u_0 et ainsi :

Si $(u^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans *E*, alors c'est vers la suite constante dont tous les termes valent u_0.