Corrigé du DM n° 3

II - Théorème de Stone-Weierstrass

6. Soit $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$. Avec la formule du binôme de Newton, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+1-x)^n.$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1}$$

7. Soit $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$. Si $n=0$, $\sum_{k=0}^{0}k\binom{0}{k}x^k(1-x)^{0-k}=0=0.x$ et si $n\geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}k\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}=n\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}.$$

En ré-indiçant, on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}x^{k+1}(1-x)^{n-k-1}=nx\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-1-k}=nx(x+1-x)^{n-1}.$$

Soit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=nx}$$

8. Soit $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}$. Remarquons déjà que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-nx&=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}(k^2-k)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

Si $n=0$ ou 1, on a $\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=0=n(n-1)x^2$ et si $n\geq 2$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}&=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=2}^{n}k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k(1-x)^{n-k}\\&=n(n-1)x^2\sum_{k=2}^{n}\frac{(n-2)!}{(k-2)!\big((n-2)-(k-2)\big)!}x^{k-2}(1-x)^{n-2-(k-2)}\\&=n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(n-2)!}{k!(n-2-k)!}x^k(1-x)^{n-2-k}\qquad\text{(en ré-indiçant)}\\&=n(n-1)x^2\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{n-2-k}=n(n-1)x^2(x+1-x)^{n-2}=n(n-1)x^2\end{aligned}$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - nx = n(n-1)x^2$, soit :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx + n(n-1)x^2}$$

9. Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \left(k^2 - 2knx + n^2x^2\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - 2nx \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + n^2x^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= nx + n(n-1)x^2 - 2nx(nx) + n^2x^2 \\
&= nx + n^2x^2 - nx^2 - 2n^2x^2 + n^2x^2 \\
&= n\left(x - x^2\right)
\end{aligned}$$

Or, $x - x^2 = -\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$, donc pour tous $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{1}{4} n}$$

10. Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarquons que comme $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
B_n(x) - f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left[f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right]
\end{aligned}$$

Et comme $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$, on a :

$$\left|B_n(x) - f(x)\right| \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|.$$

Comme $X \cup Y = \{0,1,...,n\}$ et cette union est disjointe, on a :

$$\left|B_n(x) - f(x)\right| \leq \sum_{k \in X} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| + \sum_{k \in Y} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right|.$$

Et :

- si $k \in X$, $\left|\frac{k}{n} - x\right|$, donc $\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \varepsilon$;

- si $k\in X\cup Y=\{0,1,...,n\}$, $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leq\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+|f(x)|\leq 2\|f\|_\infty$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}|B_n(x)-f(x)|&\leq\sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\,\varepsilon+\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\,2\|f\|_\infty\\&\leq\varepsilon\sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+2\|f\|_\infty\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

Enfin, comme $\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\geq 0$ pour tout $k\in X\cup Y=\{0,1,...,n\}$, on a :

$$\sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1.$$

Donc, pour tous $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\boxed{|B_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon+2\|f\|_\infty\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}}$$

11. D'après la question **9**, on a pour tous $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k-nx}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{1}{4n}.$$

Et comme $\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\geq 0$, on a, à l'instar de ce qui est fait plus haut :

$$\sum_{k\in Y}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Mais, pour tout $k\in Y$, on a $\alpha\leq\left|\frac{k}{n}-x\right|$, donc $\sum_{k\in Y}\alpha^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\sum_{k\in Y}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ et ainsi :

$$\sum_{k\in Y}\alpha^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\sum_{k\in Y}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{1}{4n}.$$

Comme $\alpha\neq 0$, ceci donne pour tous $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leq\frac{1}{4\alpha^2 n}.$$

Avec le résultat de la question précédente, on obtient pour tous $x\in[0,1]$ et $n\in\mathbb{N}^*$:

$$|B_n(x)-f(x)|\leq\varepsilon+\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n}.$$

Enfin, $\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, donc il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que pour tout entier $n\geq N$, $\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2 n}\leq\varepsilon$ et donc :

$$|B_n(x)-f(x)|\leq 2\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in [0,1]$, on obtient $\sup_{x\in[0,1]} |B_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ et ainsi :

$$\boxed{\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, N \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, n \geq N,\ \|B_n - f\|_\infty \leq 2\varepsilon}$$

Ainsi, $\|B_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc, la suite de fonctions polynomiales $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction *f*.

III - Le problème des moments sur [0,1]

Ici, *f* et *g* sont deux fonctions réelles, continues et positives sur $[0,1]$, vérifiant $\int_0^1 f = \int_0^1 g = 1$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 x^n f(x)\,dx = \int_0^1 x^n g(x)\,dx.$$

12. De l'égalité ci-dessus et la linéarité de l'intégrale, on tire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 x^n \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = 0.$$

Soit alors $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\int_0^1 P(x)\big(f(x)-g(x)\big)\,dx = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{p} a_k x^k\right)\big(f(x)-g(x)\big)\,dx = \sum_{k=0}^{p} a_k \int_0^1 x^k \big(f(x)-g(x)\big)\,dx = \sum_{k=0}^{p} a_k .0 = 0.$$

Ainsi, pour toute fonction polynomiale *P*, on a bien :

$$\boxed{\int_0^1 P(x)\big(f(x)-g(x)\big)\,dx = 0}$$

13. On considère une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément vers la fonction $f-g$ sur $[0,1]$, soit $\|P_n - (f-g)\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 P_n(x)\big(f(x)-g(x)\big)\,dx - \int_0^1 \big(f(x)-g(x)\big)^2\,dx\right| &= \left|\int_0^1 \Big[P_n(x) - \big(f(x)-g(x)\big)\Big]\big(f(x)-g(x)\big)\,dx\right| \\ &\leq \int_0^1 \big|P_n(x) - \big(f(x)-g(x)\big)\big|\,|f(x)-g(x)|\,dx\end{aligned}$$

Comme *f* et *g* sont positives, on a pour tout $x \in [0,1]$:

$$\big|P_n(x) - \big(f(x)-g(x)\big)\big|\,|f(x)-g(x)| \leq \|P_n - (f-g)\|_\infty \big(|f(x)| + |g(x)|\big) = \|P_n - (f-g)\|_\infty \big(f(x)+g(x)\big).$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 P_n(x)\big(f(x)-g(x)\big)\,dx - \int_0^1 \big(f(x)-g(x)\big)^2\,dx\right| &\leq \int_0^1 \|P_n - (f-g)\|_\infty \big(f(x)+g(x)\big)\,dx \\ &\leq \|P_n - (f-g)\|_\infty \int_0^1 \big(f(x)+g(x)\big)\,dx \\ &\leq \|P_n - (f-g)\|_\infty \left(\int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 g(x)\,dx\right)\end{aligned}$$

Soit avec $\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 1$:

$$\left|\int_0^1 P_n(x)\big(f(x)-g(x)\big)\,dx - \int_0^1 \big(f(x)-g(x)\big)^2\,dx\right| \leq 2\|P_n-(f-g)\|_\infty$$

Finalement, comme $\|P_n-(f-g)\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que :

$$\int_0^1 P_n(x)\big(f(x)-g(x)\big)\,dx - \int_0^1 \big(f(x)-g(x)\big)^2\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\,.$$

Soit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 P_n(x)\big(f(x)-g(x)\big)\,dx = \int_0^1 \big(f(x)-g(x)\big)^2\,dx}$$

14. Comme, pour toute fonction polynomiale P, on a $\int_0^1 P(x)\big(f(x)-g(x)\big)\,dx = 0$, on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\int_0^1 P_n(x)\big(f(x)-g(x)\big)\,dx = 0\,.$$

Avec la question précédente, ceci donne :

$$\int_0^1 \big(f(x)-g(x)\big)^2\,dx = 0$$

Comme f et g sont continues sur $[0,1]$, $(f-g)^2$ est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[0,1]$, donc $(f-g)^2$ est nulle sur $[0,1]$, autrement dit :

$$\boxed{f = g \text{ sur } [0,1].}$$