Corrigé du DS n° 2

Problème 1

I - Intervention des séries entières

I.A – Si $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-\delta,\delta[$, alors f est de classe C^∞ sur $]-\delta,\delta[$ avec pour tout $x \in]-\delta,\delta[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}}$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{f^{(k)}(0) = a_k k!}$$

I.B – D'après ce qui précède, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = u_n$ avec f développable en série entière (soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$) sur $]-\delta,\delta[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = u_n = a_n n!$ soit $a_n = \dfrac{u_n}{n!}$ et donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n .$$

I.B.1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n$, donc :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x} .$$

Cette formule est valable pour tout réel x.

Donc :

$$\boxed{\text{Pour } u_n = 2^n \text{, une solution est } f : x \mapsto e^{2x} \text{ sur } \mathbb{R} \text{ tout entier } (\delta = +\infty).}$$

I.B.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ pair, $u_n = (-1)^{n/2} n!$ et pour tout n impair, $u_n = 0$, donc :

$$f(x) = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} \frac{(-1)^{n/2} n!}{n!} x^n = \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ pair}}}^{+\infty} (-1)^{n/2} x^n = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p x^{2p} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-x^2)^p .$$

La série $\sum (-x^2)^p$ converge quand $|x| < 1$, et dans ce cas, $\sum_{p=0}^{+\infty} (-x^2)^p = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Donc :

$$\boxed{\text{Pour } u_n = (-1)^{n/2} n! \text{ quand n est pair et 0 sinon, une solution est } f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \text{ avec } \delta = 1.}$$

I.C – Supposons que pour $u_n = (2n)!$, il existe une solution *f* sur $\left]-\delta, \delta\right[$ avec $\delta > 0$.

Alors, pour tout $x \in \left]-\delta, \delta\right[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{n!} x^n .$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\left| \frac{\dfrac{(2n+2)!}{(n+1)!} x^{n+1}}{\dfrac{(2n)!}{n!} x^n} \right| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)} |x| = 2(2n+1)|x| \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty .$$

D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum \frac{(2n)!}{n!} x^n$ diverge pour tout réel *x* non nul, même si $x \in \left]-\delta, \delta\right[$. Ceci est absurde, donc :

$$\boxed{\text{Pour } u_n = (2n)!, \text{ aucune fonction du type considéré dans cette partie n'est solution.}}$$

II - Le théorème de Borel

II.A – Une fonction en cloche

Soit *g* la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x(x-1)}} & \text{si } x \in \left]0,1\right[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

II.A.1)

a) Pour tout $x \in \left]0,1\right[$, $x(x-1) \neq 0$. La fonction *g* est donc de classe C^∞ sur $\left]0,1\right[$ composée de d'une fonction rationnelle définie, donc de classe C^∞ , sur $\left]0,1\right[$ par la fonction exponentielle, qui est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Prouvons alors par récurrence sur *p* que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $Q_p \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \in \left]0,1\right[$:

$$g^{(p)}(x) = \frac{Q_p(x)}{\left(x(x-1)\right)^{2p}} e^{\frac{1}{x(x-1)}} .$$

- Pour $p = 0$, on a pour tout $x \in \left]0,1\right[$:

$$g^{(0)}(x) = g(x) = e^{\frac{1}{x(x-1)}} = \frac{1}{\left(x(x-1)\right)^0} e^{\frac{1}{x(x-1)}} .$$

La propriété est donc vraie au rang $p = 0$ avec $Q_0 = 1$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $p\in\mathbb{N}$.

  On a alors pour tout $x\in\left]0,1\right[$, $g^{(p+1)}(x)=(g^{(p)})'(x)$ et par hypothèse de récurrence, ceci donne :

$$g^{(p+1)}(x)=\left[\frac{Q_p'(x)\left(x(x-1)\right)^{2p}-Q_p(x)2p(2x-1)\left(x(x-1)\right)^{2p-1}}{\left(x(x-1)\right)^{4p}}\right]e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$
$$+\frac{Q_p(x)}{\left(x(x-1)\right)^{2p}}\left(-\frac{2x-1}{\left(x(x-1)\right)^{2}}\right)e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$
$$=\frac{\left(x(x-1)\right)^{2}Q_p'(x)-2p(2x-1)\left(x(x-1)\right)Q_p(x)-(2x-1)Q_p(x)}{\left(x(x-1)\right)^{2p+2}}e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$
$$=\frac{Q_{p+1}(x)}{\left(x(x-1)\right)^{2(p+1)}}e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$

  avec $Q_{p+1}=\left(X(X-1)\right)^2Q_p'-(2X-1)\left[2p\left(X(X-1)\right)+1\right]Q_p\in\mathbb{R}[X]$.

  Ainsi, la propriété est vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $p\in\mathbb{N}$ et ainsi :

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, il existe $Q_p\in\mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x\in\left]0,1\right[$:

$$g^{(p)}(x)=\frac{Q_p(x)}{\left(x(x-1)\right)^{2p}}e^{\frac{1}{x(x-1)}}$$

avec $Q_{p+1}=\left(X(X-1)\right)^2Q_p'-(2X-1)\left[2p\left(X(X-1)\right)+1\right]Q_p$.

b) Prouvons à nouveau par récurrence sur p que, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $\deg Q_p=3p-2$.

- Pour $p=1$, on a $Q_1=\left(X(X-1)\right)^2Q_0'-(2X-1)Q_0$.

  Avec $Q_0=1$, ceci donne $Q_1=-2X+1$ et $\deg Q_1=1=3\times1-2$.

  La propriété est donc vraie au rang $p=1$.

- Supposons la propriété vraie à un rang $p\in\mathbb{N}$.

  Si on appelle α le coefficient dominant de Q_p, alors par hypothèse de récurrence, son terme de plus haut degré est αX^{3p-2} et :

  - le terme de plus haut degré de $\left(X(X-1)\right)^2Q_p'$ est $(3p-2)\alpha X^{3p+2}$;
  - celui de $(2X-1)\left[2p\left(X(X-1)\right)+1\right]Q_p$ est $4p\alpha X^{3p+1}$.

  Alors, comme $(3p-2)\alpha-4p\alpha=-(p+2)\alpha\neq0$, le terme de plus haut degré de Q_{p+1} est $-(p+2)\alpha X^{3p+1}$ et donc, $\deg Q_{p+1}=3p+1=3(p+1)-2$ et la propriété est vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tout entier } p\geq 1,\ \deg Q_p = 3p-2.}$$

II.A.2)

a) On a $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x(x-1)}=-\infty$ et pour tout entier naturel *p*, $\lim\limits_{X\to-\infty}X^{2p}e^X=0$.

En composant, on obtient pour tout entier naturel *p* :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\left(x(x-1)\right)^{2p}}e^{\frac{1}{x(x-1)}}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\left(x(x-1)\right)^{2p}}e^{\frac{1}{x(x-1)}}=0.$$

Enfin, comme Q_p est polynomiale, donc continue sur $\mathbb{R}$ (donc en 0 et 1), on obtient :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{Q_p(x)}{\left(x(x-1)\right)^{2p}}e^{\frac{1}{x(x-1)}}=Q_p(0)\times 0=0$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{Q_p(x)}{\left(x(x-1)\right)^{2p}}e^{\frac{1}{x(x-1)}}=Q_p(1)\times 0=0$$

Avec $g^{(p)}(x)=\dfrac{Q_p(x)}{\left(x(x-1)\right)^{2p}}e^{\frac{1}{x(x-1)}}$ pour tout $x\in\left]0,1\right[$, on a bien pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}g^{(p)}(x)=\lim_{x\to 1^-}g^{(p)}(x)=0}$$

b) Comme *g* est nulle sur $\mathbb{R}\setminus\left]0,1\right[$, elle est de classe C^∞ sur $\left]-\infty,0\right[$ et sur $\left]1,+\infty\right[$.

De plus, pour tout $p\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\left]-\infty,0\right[\cup\left]1,+\infty\right[$, $g^{(p)}(x)=g^{(p)}(x)=0$ et de plus :

$$\lim_{x\to 0^-}g^{(p)}(x)=\lim_{x\to 1^+}g^{(p)}(x)=0.$$

Ainsi, pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}g^{(p)}(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}g^{(p)}(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^-}g^{(p)}(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}g^{(p)}(x)=0\end{array}\right\}\quad\Leftrightarrow\quad\lim_{x\to 0}g^{(p)}(x)=\lim_{x\to 1}g^{(p)}(x)=0.$$

Comme $g(0)=g(1)=0$, ceci permet de conclure que *g* est de classe C^∞ en 0 et 1, avec $g^{(p)}(0)=g^{(p)}(1)=0$ pour tout entier naturel *p*.

Finalement, *g* est de classe C^∞ sur $\left]-\infty,0\right[$, $\left]0,1\right[$ et $\left]1,+\infty\right[$, et en 0 et en 1, donc sur $\mathbb{R}$. Comme elle est nulle en dehors du segment $[0,1]$:

$$\boxed{g\in\mathcal{W}}$$

II.B – Une fonction en plateau

II.B.1) Soit G la primitive de g qui s'annule en 1. Cette existe et est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ car g est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \int_1^x g(t)\,dt$ et comme $g(x) > 0$ sur $]0,1[$, on a $\int_0^1 g(t)\,dt \neq 0$.

Ceci permet de conclure que h est bien définie sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \frac{\int_{x-1}^1 g(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt} = \frac{\int_1^{x-1} g(t)\,dt}{\int_1^0 g(t)\,dt} = \frac{G(x-1)}{G(0)}$$

Comme G est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$, la composée $x \mapsto G(x-1)$ l'est aussi et ainsi, h est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. De plus :

- pour tout $x \in \left]-\infty,1\right]$, $x-1 \in \left]-\infty,0\right]$, donc :

$$h(x) = \frac{\int_{x-1}^1 g(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt} = \frac{\int_{x-1}^0 g(t)\,dt + \int_0^1 g(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt} = \frac{\int_{x-1}^0 0\,dt + \int_0^1 g(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt} = \frac{\int_0^1 g(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt} = 1.$$

- pour tout $x \in \left[2,+\infty\right[$, $x-1 \in \left[1,+\infty\right[$, donc :

$$h(x) = \frac{\int_{x-1}^1 g(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt} = \frac{-\int_1^{x-1} g(t)\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt} = \frac{-\int_1^{x-1} 0\,dt}{\int_0^1 g(t)\,dt} = 0.$$

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } h \text{ est de classe } C^{\infty} \text{ sur } \mathbb{R}\text{, constante sur } \left]-\infty,1\right] \text{ et sur } \left[2,+\infty\right[.}$$

II.B.2) Pour tout réel x, $\varphi(x) = h(2x)h(-2x)$.

a) Les fonctions linéaires $x \mapsto h(2x)$ et $x \mapsto h(-2x)$ sont de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ comme composées de fonctions linéaires par h, toutes de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$. Alors, φ est de classe C^{∞} sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de telles fonctions.

De plus, avec la formule de Leibniz, on a pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi^{(p)}(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \left[2^k h^{(k)}(2x)\right]\left[(-2)^{p-k} h^{(p-k)}(-2x)\right] = 2^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} h^{(k)}(2x) h^{(p-k)}(-2x).$$

Donc :

$$\varphi^{(p)}(0) = 2^p \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} h^{(k)}(0) h^{(p-k)}(0).$$

Or, on a vu que h est constante sur $\left]-\infty,1\right]$, donc toutes ses dérivées successives sont nulles sur cet intervalle, et en particulier en 0, soit $h^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Alors, pour tout $p\in\mathbb{N}$:

$$\varphi^{(p)}(0)=(-2)^p h(0)h^{(p)}(0).$$

Et si $p\geq 1$, on a $h^{(p)}(0)=0$, donc pour tout $p\in\mathbb{N}^*$, $\varphi^{(p)}(0)=0$.

Finalement :

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \varphi^{(p)}(0)=0 \text{ pour tout entier } p\geq 1.}$$

b) On a vu que h est nulle sur $[2,+\infty[$, donc :

- si $x\in\,]-\infty,-1]$, on a $-2x\in[2,+\infty[$, donc $h(-2x)=0$ et $\varphi(x)=0$;
- si $x\in[1,+\infty[$, on a $2x\in[2,+\infty[$, donc $h(2x)=0$ et $\varphi(x)=0$.

Ainsi :

$$\boxed{\varphi \text{ est nulle en dehors de } [-1,1].}$$

Avec tout ce que l'on a vu, on peut énoncer les résultats suivants.

- φ est définie sur $\mathbb{R}$, symétrique par rapport à 0 et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

  $$\varphi(-x)=h\big(2(-x)\big)h\big(-2(-x)\big)=h(-2x)h(2x)=\varphi(x).$$

  Donc, φ est paire, donc sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- φ est nulle sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ et $\varphi'(-1)=\varphi'(1)=0$ (donc la courbe de φ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses – 1 et 1).
- Si $x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, alors $2x\in[-1,1]\subset\,]-\infty,1]$ et $-2x\in[-1,1]\subset\,]-\infty,1]$, donc :

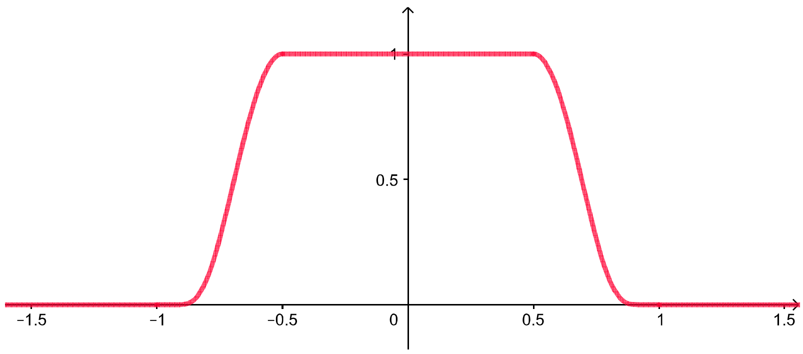
  $$h(2x)=h(-2x)=1.$$

  Ainsi, pour tout $x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$, $\varphi(x)=1$ et $\varphi'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\varphi'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ (donc la courbe de φ admet des tangentes horizontales aux points d'abscisses – ½ et ½).
- Si $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$, alors $2x\in[1,2]$ et $-2x\in[-2,-1]\subset\,]-\infty,1]$, donc $\varphi(x)=h(2x)$ et :

  $$\varphi'(x)=2h'(2x)=-\frac{2}{\int_0^1 g(t)\,dt}g(2x-1)\leq 0.$$

  Donc, φ est décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

On obtient le graphe suivant :



c) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

Comme φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, elle l'est sur $[-1,1]$, donc pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$, $\varphi^{(k)}$ est définie et continue sur $[-1,1]$ et ainsi, $\max\limits_{x\in[-1,1]} \left|\varphi^{(k)}(x)\right|$ existe.

Comme le maximum de p nombres existe toujours :

$$\boxed{\text{Le réel } \lambda_p = \max_{k\in[\![0,p-1]\!]}\left(\max_{x\in[-1,1]}\left|\varphi^{(k)}(x)\right|\right) \text{ existe bien pour tout } p \in \mathbb{N}^*.}$$

II.C – Le théorème de Borel

En posant $\dfrac{0^0}{0!} = 1$ et avec $\beta_0 = 1$, on a $g_n : x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}\varphi(\beta_n x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.C.1)

a) D'après la question **II.B.2.a**, φ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Alors, $x \mapsto \varphi(\beta_n x)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions C^∞ et, g_n l'est aussi comme produit de telles fonctions (car $x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}$ est polynomiale, donc C^∞ sur $\mathbb{R}$).

Ainsi :

$$\boxed{\text{La fonction } g_n \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

b) On a vu dans la question **II.B.2.b** que φ est nulle en dehors de $[-1,1]$. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x \notin \left[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}\right] \iff \beta_n x \notin [-1,1].$$

Et dans ce cas, $\varphi(\beta_n x) = 0$, donc $g_n(x) = 0$. Ainsi :

$$\boxed{g_n \text{ est nulle hors du segment } \left[-\frac{1}{\beta_n}, \frac{1}{\beta_n}\right].}$$

II.C.2) Soient *n* et *j* des entiers naturels tels que $j<n$ (donc $n\in\mathbb{N}^*$).

a) Notons $\theta : x\mapsto \dfrac{x^n}{n!}$ et $\psi : x\mapsto \varphi(\beta_n x)$. Ces deux fonctions sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $i\in[\![0,j]\!]$ (donc $i\le j<n$ et $j-i\le j<n$) :

$$\psi^{(i)} : x\mapsto \beta_n^i\,\varphi^{(i)}(\beta_n x)$$
$$\theta^{(j-i)} : x\mapsto \frac{n(n-1)...(n-j+i+1)}{n!}x^{n-j+i}=\frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$$

On a vu que pour tout entier naturel *n*, $g_n=\psi\theta$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On peut utiliser la formule de Leibniz, qui donne :

$$g_n^{(j)}=(\psi\theta)^{(j)}=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\psi^{(i)}\theta^{(j-i)}.$$

Soit, pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\boxed{g_n^{(j)}(x)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\,\varphi^{(i)}(\beta_n x)\frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}}$$

b) Comme $0\le j\le n-1$, on a pour tout $i\in[\![0,j]\!]$, $n-j+i\ge i+1\ge 1$ donc $\theta^{(j-i)}(0)=0$ et ainsi :

$$\boxed{g_n^{(j)}(0)=0}$$

c) On a vu que $g_n(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left[-\dfrac{1}{\beta_n},\dfrac{1}{\beta_n}\right]$. Par continuité, g_n s'annule aussi en $-\dfrac{1}{\beta_n}$ et $\dfrac{1}{\beta_n}$, donc $g_n(x)=0$ pour tout $x\in\left]-\infty,-\dfrac{1}{\beta_n}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\beta_n},+\infty\right[$, c'est-à-dire quand le réel *x* vérifie $|x|\ge\dfrac{1}{\beta_n}$. Ceci donne immédiatement :

$$\boxed{g_n^{(j)}(x)=0 \text{ pour tout réel } x \text{ tel que } |x|\ge\frac{1}{\beta_n}.}$$

d) Soit un réel *x* tel que $|x|\le\dfrac{1}{\beta_n}$. On a alors $|\beta_n x|\le 1$ et pour tout $i\in[\![0,j]\!]\subset[\![0,n-1]\!]$:

$$\left|u_n\varphi^{(i)}(\beta_n x)\right|\le|u_n|\max_{t\in[-1,1]}\left|\varphi^{(i)}(t)\right|\le|u_n|\max_{k\in[\![0,n-1]\!]}\left(\max_{t\in[-1,1]}\left|\varphi^{(k)}(i)\right|\right)=|u_n|\lambda_n\le\frac{1}{4^n}\beta_n.$$

Or, $u_n g_n^{(j)}(x)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\, u_n \varphi^{(i)}(\beta_n x)\dfrac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}$, donc avec l'inégalité triangulaire, on a :

$$\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right|\le\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\left|u_n\varphi^{(i)}(\beta_n x)\right|\frac{|x|^{n-j+i}}{(n-j+i)!}\le\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\frac{1}{4^n}\beta_n\frac{1}{(n-j+i)!}\frac{1}{\beta_n^{n-j+i}}.$$

Soit :

$$\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right|\le\frac{1}{4^n}\frac{1}{\beta_n^{n-j-1}}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\frac{1}{(n-j+i)!}.$$

Et comme, pour tout $i\in[\![0,j]\!]$, on a $\dfrac{1}{(n-j+i)!}\le 1$ et $\dfrac{1}{\beta_n^{n-j-1}}\le 1$ (car $\beta_n\ge 1$ et $n-1-j\ge 0$), on obtient :

$$\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right|\le\frac{1}{4^n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}=\frac{1}{4^n}2^j=\frac{2^j}{2^{2n}}\le\frac{2^{n-1}}{2^{2n}}=\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, pour tout réel x tel que $|x|\le\dfrac{1}{\beta_n}$, on a bien :

$$\boxed{\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right|\le\frac{1}{2^{n+1}}}$$

II.C.3) Soient $n, j\in\mathbb{N}$.

- Si $j<n$, alors $g_n^{(j)}(0)=0$ d'après la question **II.C.2.b**.

Si $j\ge n$, reprenons le calcul de $g_n^{(j)}$ effectué dans la question **II.C.2.a**. Avec les mêmes notations, on a $\theta^{(j-i)}(x)=0$ quand $n-j+i<0$, soit $i<j-n$, donc pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$g_n^{(j)}(x)=\sum_{i=j-n}^{j}\binom{j}{i}\beta_n^i\,\varphi^{(i)}(\beta_n x)\frac{x^{n-j+i}}{(n-j+i)!}\underset{k=i-j+n}{=}\sum_{k=0}^{n}\binom{j}{k+j-n}\beta_n^{k+j-n}\,\varphi^{(k+j-n)}(\beta_n x)\frac{x^k}{k!}$$

Donc :

$$g_n^{(j)}(0)=\binom{j}{j-n}\beta_n^{j-n}\,\varphi^{(j-n)}(0).$$

- Si $j>n$, soit $j-n\ge 1$, on a $\varphi^{(j-n)}(0)=0$ d'après **II.B.2.a**, donc $g_n^{(j)}(0)=0$.
- Si $j=n$, alors $g_n^{(n)}(0)=\varphi(0)=1$.

Finalement, on a bien pour tous $n, j\in\mathbb{N}$:

$$\boxed{g_n^{(j)}(0)=\begin{cases}0 & \text{si } j\ne n\\ 1 & \text{si } j=n\end{cases}}$$

II.C.4) Tel qu'indiqué, considérons la série de fonctions $\sum u_n g_n$ et notons $\sigma(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n(x)$ quand la série $\sum u_n g_n(x)$ converge.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n g_n$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ (question **II.C.1.a**).
- Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $n > j$, on a, d'après **II.C.2.c** et **II.C.2.d** pour tout réel x :

$$\left|u_n g_n^{(j)}(x)\right| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Comme la série géométrique $\sum \frac{1}{2^{n+1}}$ converge, la série $\sum u_n g_n^{(j)}$ converge normalement, donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

On peut donc en conclure que :

$$\sigma=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } j \in \mathbb{N},\ \sigma^{(j)}=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n^{(j)}.$$

En particulier pour tout $j \in \mathbb{N}$:

$$\sigma^{(j)}(0)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n g_n^{(j)}(0).$$

Avec le résultat de la question précédente, on obtient $\sigma^{(j)}(0)=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \delta_{j,n}=u_j$.

Finalement, la fonction σ remplit les conditions demandée et donc :

$$\boxed{\text{Il existe bien une fonction } f \text{ de classe } C^\infty \text{ sur } \mathbb{R} \text{ telle que pour tout } j \in \mathbb{N},\ f^{(j)}(0)=u_j.}$$

Problème 2

I – Nilpotence d'indice 1

Q1. Un endomorphisme u nilpotent d'indice 1 vérifie $u^1=u=0$, donc :

$$\boxed{\text{Le seul endomorphisme nilpotent d'indice 1 est l'endomorphisme nul.}}$$

II – Réduction d'une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$

Q2. Comme l'indice de nilpotence de u est $p \geq 2$, on a par définition, $u^p=0$, mais $u^{p-1} \neq 0$, donc :

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur } x \text{ de } E \text{ tel que } u^{p-1}(x) \neq 0.}$$

Q3. Soient $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}$ des réels tels que $\sum_{k=0}^{p-1} \lambda_k u^k(x) = \lambda_0 x + \lambda_1 u(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$.

En appliquant, u^{p-1} à cette relation, on obtient $\lambda_0 u^{p-1}(x) + \lambda_1 u^p(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{2p-2}(x) = 0$ et comme $u^p = 0$, on a pour tout $k \geq p$, $u^k(x) = u^p\left(u^{k-p}(x)\right) = 0$, donc $\lambda_0 u^{p-1}(x) = 0$. Mais, $u^{p-1}(x) \neq 0$ donc :

$$\lambda_0 = 0.$$

On a alors $\lambda_1 u(x) + \lambda_2 u^2(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x) = 0$ et en appliquant u^{p-2} (si $p \geq 3$), on obtient $\lambda_1 u^{p-1}(x) + \lambda_2 u^p(x) + \dots + \lambda_{p-1} u^{2p-3}(x) = \lambda_1 u^{p-1}(x) = 0$, et toujours avec $u^{p-1}(x) \neq 0$, on obtient :

$$\lambda_1 = 0.$$

En continuant ainsi, on montre de proche en proche que $\lambda_k = 0$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$.

Ceci prouve que :

$$\boxed{\text{La famille } \left(u^k(x)\right)_{0 \leq k \leq p-1} \text{ est libre.}}$$

La famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leq k \leq p-1}$ contient p vecteurs.

Comme on est en dimension 2, la famille $\left(u^k(x)\right)_{0 \leq k \leq p-1}$, qui est libre, contient au plus 2 vecteurs, donc $p \leq 2$. Comme par hypothèse, $p \geq 2$, on aboutit à :

$$\boxed{p = 2}$$

Q4. Comme $p = 2$, on a $u^2 = u \circ u = 0$, donc :

$$\operatorname{Im} u \subset \ker u.$$

Mais, u est non nul (car $p = 2$ et pas 1), donc $\ker u \neq E$, soit $\dim(\ker u) \leq 1$, et $\operatorname{Im} u \neq \{0\}$, soit $rg\, u \geq 1$. Ainsi, $1 \leq rg\, u \leq \dim(\ker u) \leq 1$, soit :

$$rg\, u = \dim(\ker u) = 1.$$

Finalement, on a $\operatorname{Im} u \subset \ker u$ et $rg\, u = \dim(\ker u)$, donc :

$$\boxed{\ker u = \operatorname{Im} u}$$

Q5. Reprenons le vecteur x introduit dans **Q2**.

D'après **Q3**, la famille $(e_1, e_2) = (x, u(x))$ est libre. Comme elle contient 2 vecteurs, c'est une base de E (qui est de dimension 2). Et :

$$u(e_1) = u(x) = e_2 \quad \text{et} \quad u(e_2) = u\left(u(x)\right) = u^2(x) = 0.$$

Ainsi :

$$\boxed{\text{Dans la base } (e_1, e_2) = (x, u(x)) \text{ de } E \text{, la matrice de } u \text{ est égale à } J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Q6. Il est clair que $Tr(0_2) = \det(0_2) = 0$.

Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, non nulle, et *u* l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ canoniquement associé à *M*.

Si *M* est nilpotente, *u* l'est aussi par définition, et on vient de voir qu'alors il existe une base de $\mathbb{C}^2$ dans laquelle la matrice de *u* est J_2, autrement dit, *M* est semblable à la matrice J_2. Alors :

$$Tr(M) = Tr(J_2) = 0$$
$$\det(M) = \det(J_2) = 0$$

Réciproquement, supposons que $Tr(M) = \det(M) = 0$.

Alors, *M* n'est pas inversible (car $\det(M) = 0$), il existe donc un vecteur $e_2 \neq 0$ tel que $u(e_2) = 0$. Si on complète ce vecteur en une base (e_1, e_2) de $\mathbb{C}^2$, on a :

$$M_{(e_1, e_2)}(u) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, c \in \mathbb{C}.$$

Alors, $Tr(M) = Tr(u) = Tr(N) = a = 0$, donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$ et $N^2 = 0_2$, ce qui prouve que *u* est nilpotent, donc que *M* est nilpotente.

Finalement, *M* est nilpotente si et seulement si $Tr(M) = \det(M) = 0$, autrement dit :

$$\boxed{\text{Les matrices nilpotentes de } \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \text{ sont les matrices de trace nulle et de déterminant nul.}}$$

III – Réduction d'une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, nilpotente d'indice 2

Q7. Comme dans **Q4,** $p = 2$ donne $u^2 = u \circ u = 0$, et donc :

$$\boxed{\operatorname{Im} u \subset \ker u}$$

Ceci implique que $r = rg\, u \leq \dim(\ker u)$ et le théorème du rang donne :

$$rg\, u + \dim(\ker u) = r + \dim(\ker u) = \dim E = n \quad \Leftrightarrow \quad \dim(\ker u) = n - r.$$

Alors, $r \leq \dim(\ker u)$ se récrit $r \leq n - r$, soit :

$$\boxed{2r \leq n}$$

Q8. On suppose ici que $\ker u = \operatorname{Im} u$.

On a $r = rg\, u$. Soit $(f_1, f_2, \dots, f_r)$ est une base de $\operatorname{Im} u$. Comme pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $f_k \in \operatorname{Im} u$, il existe $e_k \in E$ tel que $f_k = u(e_k)$.

Montrons alors que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est libre.

Soient $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots, \lambda_r, \mu_r$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \mu_1 u(e_1) + \lambda_2 e_2 + \mu_2 u(e_2) + \dots + \lambda_r e_r + \mu_r u(e_r) = 0.$$

En appliquant *u*, on obtient (sans oublier que $u^2 = 0$) :

$$\lambda_1 u(e_1) + \mu_1 u^2(e_1) + \lambda_2 u(e_2) + \mu_2 u^2(e_2) + \dots + \lambda_r u(e_r) + \mu_r u^2(e_r) = \lambda_1 u(e_1) + \lambda_2 u(e_2) + \dots + \lambda_r u(e_r) = 0.$$

Or, la famille $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r)) = (f_1, f_2, \dots, f_r)$ est une base $\operatorname{Im} u$, elle est libre et donc :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0.$$

On a alors $\mu_1 u(e_1) + \mu_2 u(e_2) + \dots + \mu_r u(e_r) = 0$ et la liberté de $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ implique aussi que :

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 0.$$

Finalement, $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 0$, donc la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est libre.

Enfin, toujours avec $\ker u = \operatorname{Im} u$, on a $\dim(\ker u) = n - r = r$, donc :

$$n = 2r.$$

Ainsi, $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r))$ est une famille libre de $2r = n = \dim E$ vecteurs de *E*, donc :

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r)) \text{ est une base de } E.}$$

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $u(u(e_k)) = u^2(e_k) = 0$, donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & & & & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

Q9. On suppose ici que $\ker u \neq \operatorname{Im} u$.

Avec toujours $\operatorname{Im} u \subset \ker u$, on a $r < \dim(\ker u)$ et donc $2r < n$, soit $n-2r \geq 1$.

Comme dans la question précédente, on considère $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$ une base de $\operatorname{Im} u$ que l'on peut compléter en $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ une base de $\ker u$ (car $\operatorname{Im} u \subset \ker u$).

Soient $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \dots, \lambda_r, \mu_r, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-2r}$ des scalaires tels que :

$$\lambda_1 e_1 + \mu_1 u(e_1) + \dots + \lambda_r e_r + \mu_r u(e_r) + \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_{n-2r} v_{n-2r} = 0.$$

En appliquant *u*, on obtient (sans oublier que $u^2 = 0$ et que les v_k sont dans $\ker u$) :

$$\lambda_1 u(e_1) + \dots + \lambda_r u(e_r) = 0.$$

Par liberté de $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r))$, qui est une base de $\operatorname{Im} u$, on a $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ et donc :

$$\mu_1 u(e_1) + \dots + \mu_r u(e_r) + \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_{n-2r} v_{n-2r} = 0.$$

Par liberté de $(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$, qui est une base de $\ker u$, on a :

$$\mu_1 = \dots = \mu_r = \gamma_1 = \dots = v_{n-2r} = 0.$$

Et donc :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = \mu_1 = \dots = \mu_r = \gamma_1 = \dots = v_{n-2r} = 0.$$

Ceci prouve que la famille $(e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r})$ est libre et, comme elle contient $2r + n - 2r = n = \dim E$ vecteurs de E :

$$\boxed{\text{La famille } \mathcal{B} = (e_1, u(e_1), e_2, u(e_2), \dots, e_r, u(e_r), v_1, v_2, \dots, v_{n-2r}) \text{ est une base de } E.}$$

Pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, $u(u(e_k)) = u^2(e_k) = 0$ et tout $k \in [\![1, n-2r]\!]$, $u(v_k) = 0$, donc :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & & & 0 \\
1 & & & & & & & & & & 0 \\
 & 0 & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & 0 & & & & \\
 & & & & & 1 & 0 & & & & \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & & & \\
0 & & & & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & 0 \\
0 & 0 & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & & 0
\end{pmatrix} \\ \longleftarrow 2r \longrightarrow \quad \longleftarrow n-2r \longrightarrow \end{array}}$$

IV – Racines carrées de matrices nilpotentes

IV.1) On pose $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -7\\ 2 & 6 & -14\\ 1 & 3 & -7\end{pmatrix}$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^3$ canoniquement associé à A.

Q10. On a :

$$\boxed{Tr(A)=1+6-7=0}$$

Notons C_1, C_2, C_3 les colonnes de A. On a $C_1\neq 0$, $C_2=2C_1$ et $C_3=-7C_1$, donc :

$$\boxed{rg(A)=1}$$

Q11. On a $AC_1=0_{3,1}$, donc $AC_2=AC_3=0_{3,1}$ et ainsi, $A^2=0_3$. Comme $A\neq 0_3$:

$$\boxed{A \text{ est nilpotente d'indice 2.}}$$

Q12. On veut montrer que A est semblable à $diag\left(J_2,J_1\right)=\left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 0 & 0\end{array}\right)$.

Autrement dit, on veut prouver l'existence d'une base $\mathcal{B}=\left(e_1,e_2,e_3\right)$ de $\mathbb{C}^3$ telle que $u(e_1)=e_2$ (donc $e_2\in \operatorname{Im} u$) et $u(e_2)=u(e_3)=0$ (donc $e_2,e_3\in\ker u$). Comme $\dim(\ker u)=3-rg\,u=2$ (d'après le théorème du rang), on a alors $\operatorname{Im} u=\operatorname{Vect}(e_2)$ et $\ker u=\operatorname{Vect}(e_2,e_3)$.

On a $C_1\in\operatorname{Im} u$ et on a vu que $AC_1=0_{3,1}$ donc $C_1\in\ker u$. Ainsi, on peut poser $e_2=C_1$ (en identifiant les espaces $\mathbb{C}^3$ et $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$).

Reste à trouver e_1 un antécédent de e_2 par u et e_3 un autre vecteur de $\ker u$, non colinéaire à e_2.

Si $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$, on a $AX=(x+3y-7z)C_1$, donc :

- $AX=C_1$ quand $x+3y-7z=1$, donc $e_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$ est un antécédent de e_2 par u ;
- $AX=0_{3,1}$ quand $x+3y-7z=0$, donc $e_3=\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\in\ker u$ et n'est pas colinéaire à e_2.

Remarquons qu'alors, **Q9** permet de conclure que $\mathcal{B}=\left(e_1,e_2,e_3\right)$ est bien une base de $\mathbb{C}^3$.

Ainsi :

$$\boxed{P^{-1}AP = diag(J_2, J_1) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ avec } P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Q13. On a $A^2 = 0_3$, donc si $R^2 = A$, alors $R^4 = (R^2)^2 = A^2 = 0_3$, donc R est nilpotente et ainsi :

$$\boxed{\rho \text{ est nilpotent.}}$$

On a de plus $\rho^2 = u$, donc $\rho u = \rho\rho^2 = \rho^3 = \rho^2\rho = u\rho$, donc u et ρ commutent, ce qui permet de conclure immédiatement que :

$$\boxed{\mathrm{Im}\, u \text{ et } \ker u \text{ sont stables par } \rho.}$$

Q14. Notons $N = diag(J_2, J_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rappelons que l'on a alors $P^{-1}AP = N$.

Soient $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et $R' = P^{-1}RP$. On a $R'^2 = (P^{-1}RP)^2 = P^{-1}R^2P$, donc :

$$R^2 = A \iff P^{-1}R^2P = P^{-1}AP \iff R'^2 = N.$$

Remarquons aussi que dans ce cas, R' et N commutent (car ρ et u commutent).

Alors, si on pose $R' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, on a :

$$NR' = R'N \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ e & 0 & 0 \\ h & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a = e \\ b = c = h = 0 \end{cases} \iff R' = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & f \\ g & 0 & i \end{pmatrix}.$$

Alors, $R'^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 2ad + fg & a^2 & af + fi \\ ag + gi & 0 & i^2 \end{pmatrix}$ et :

$$R'^2 = N \iff \begin{cases} a^2 = i^2 = 0 \\ af + fi = 0 \\ ag + gi = 0 \\ 2ad + fg = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = i = 0 \\ fg = 1 \end{cases} \iff R' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1/g \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$R^2 = A \iff R' = P^{-1}RP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1/\beta \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff R = P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1/\beta \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

Finalement :

$$\boxed{\text{L'ensemble des racines carrées de } A \text{ est } \left\{ P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 1/\beta \\ \beta & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1},\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^* \right\}.}$$

IV.2)

Q15. On considère une éventuelle matrice $R \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ telle que $R^2 = J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On a :

$$\boxed{R^4 = J_3^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } R^6 = J_3^3 = 0_3.}$$

Le résultat ci-dessus montre que R est nilpotente d'indice $p > 4$ (car $R^4 \neq 0_3$).

Or, on peut reprendre le raisonnement effectué dans les questions **Q2** et **Q3** : en partant d'un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$, on montre que la famille $\left(u^k(x)\right)_{0\le k\le p-1}$ est libre et donc que $p \le 3$.

On arrive ainsi à une absurdité ($p > 4$ et $p \le 3$), donc :

$$\boxed{\text{L'équation matricielle } R^2 = J_3 \text{ n'admet pas de solution.}}$$

IV.3)

Q16. Soit $R \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

De la même façon que ci-dessus (toujours avec la méthode des questions **Q2** et **Q3**), on prouve que si R est nilpotente d'indice $q \in \mathbb{N}^*$, alors $q \le n$.

Si $R^2 = V$, on a :

$$R^{2(p-1)} = V^{p-1} \neq 0_n \text{ et } R^{2p} = V^p = 0_n.$$

Ceci prouve que R est nilpotente d'indice $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $q > 2(p-1)$, soit $q \ge 2p-1$.

Comme $q \le n$, on a forcément $2p-1 \le n$ et ainsi :

$$\boxed{\text{Si } 2p-1 > n, \text{ alors il n'existe aucune solution.}}$$

Q17. Il suffit de prendre $V = R^2$ avec $R = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ \vdots & & (0) & & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$.

On a $V=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 & 0 \\ \vdots & & (0) & & 0 \\ 0 & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ et $V^2=0_n$ donc :

$$\boxed{V \text{ est nilpotente d'indice } p=2 \text{ et admet } R \text{ comme racine carrée.}}$$

V – Réduction des matrices nilpotentes

Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'indice $p\geq 2$, donc $u^p=0_{\mathcal{L}(E)}$ et $u^{p-1}\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$.

Q18. On a $\operatorname{Im} u\subset E$, donc $u(\operatorname{Im} u)\subset u(E)=\operatorname{Im} u$ et ainsi :

$$\boxed{\operatorname{Im} u \text{ est stable par } u.}$$

Soit $\tilde{u}\in\mathcal{L}(\operatorname{Im} u)$ l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$.
Pour tout $x\in\operatorname{Im} u$, il existe $z\in E$ tel que $x=u(z)$ et :

$$\tilde{u}^{p-1}(x)=u^{p-1}(x)=u^{p-1}(u(z))=u^p(z)=0.$$

Donc, $\tilde{u}^{p-1}=0_{\mathcal{L}(\operatorname{Im} u)}$ et $\tilde{u}$ est nilpotent d'indice inférieur ou égal à $p-1$.
Deux cas se présentent.

- Si $p=2$, alors $\tilde{u}=0_{\mathcal{L}(\operatorname{Im} u)}$, donc $\tilde{u}$ est nilpotent d'indice 1.
- Si $p\geq 3$, il existe $z\in E$ tel que $u^{p-1}(z)\neq 0$ (car $u^{p-1}\neq 0_{\mathcal{L}(E)}$). En posant $x=u(z)\in\operatorname{Im} u$, on a :

  $$\tilde{u}^{p-2}(x)=u^{p-2}(x)=u^{p-2}(u(z))=u^{p-1}(z)\neq 0.$$

  Donc, $\tilde{u}^{p-2}\neq 0_{\mathcal{L}(\operatorname{Im} u)}$ et $\tilde{u}$ est nilpotent d'indice $p-1$.

Finalement, dans les deux cas :

$$\boxed{\tilde{u} \text{ est nilpotent d'indice } p-1.}$$

Q19. Pour $x\in E\setminus\{0\}$, on note $C_u(x)=\operatorname{Vect}\left(u^k(x), k\in\mathbb{N}\right)$.

Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $u\left(u^k(x)\right)=u^{k+1}(x)\in C_u(x)$, donc $u\left(C_u(x)\right)\subset C_u(x)$, autrement dit :

$$\boxed{C_u(x) \text{ est stable par } u.}$$

On a $u^p(x)=0$, donc l'ensemble $\left\{k\in\mathbb{N}^*, u^k(x)=0\right\}$ est non vide (il contient p). Or, toute partie non vide de $\mathbb{N}^*$ admet un plus petit élément, donc :

$$\boxed{\text{Il existe un plus petit entier } s(x)\geq 1 \text{ tel que } u^{s(x)}(x)=0.}$$

Q20. La famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\right)$ est une famille de vecteurs de $C_u(x)$.

Par définition, $s(x) \in \left\{k \in \mathbb{N}^*, u^k(x) = 0\right\}$, donc $\underline{u^{s(x)}(x) = 0}$.

De plus :

- si $s(x) = 1$, alors $u^{s(x)-1}(x) = x \neq 0$;
- si $s(x) \geq 2$, alors $s(x) - 1 \in \mathbb{N}^*$, mais $s(x) - 1 < s(x) = \min\left\{k \in \mathbb{N}^*, u^k(x) = 0\right\}$, donc $s(x) - 1 \notin \left\{k \in \mathbb{N}^*, u^k(x) = 0\right\}$ et $u^{s(x)-1}(x) \neq 0$.

Ainsi, dans les deux cas, on a $\underline{u^{s(x)-1}(x) \neq 0}$.

On montre alors comme dans la question **Q3** que :

$$\underline{\text{La famille } \left(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\right) \text{ est libre.}}$$

De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq s(x)$, on a :

$$u^k(x) = u^{k-s(x)+s(x)}(x) = u^{k-s(x)}\left(u^{s(x)}(x)\right) = u^{k-s(x)}(0) = 0.$$

Donc, $C_u(x) = \mathrm{Vect}\left(u^k(x), k \in \mathbb{N}\right) = \mathrm{Vect}\left(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\right)$ et ainsi

$$\underline{\text{La famille } \left(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\right) \text{ est génératrice de } C_u(x).}$$

Finalement, la famille $\left(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\right)$ est libre et génératrice de $C_u(x)$, donc :

$$\boxed{\left(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\right) \text{ est une base de } C_u(x).}$$

Notons $\tilde{u}_x \in \mathcal{L}\left(C_u(x)\right)$ l'endomorphisme induit par *u* sur $C_u(x)$.

Pour tout $k \in [\![0, s(x)-1]\!]$, on a $\tilde{u}_x\left(u^k(x)\right) = u\left(u^k(x)\right) = u^{k+1}(x)$, avec $\tilde{u}_x\left(u^{s(x)-1}(x)\right) = u^{s(x)}(x) = 0$.

On a donc :

$$\boxed{M_{\left(x, u(x), \ldots, u^{s(x)-1}(x)\right)}\left(\tilde{u}_x\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = J_{s(x)}}$$

Q21. On veut prouver par récurrence sur $p \geq 2$ que pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel *E* de dimension finie et tout endomorphisme *u* de *E*, nilpotent d'indice *p*, il existe des vecteurs $x_1, x_2, \ldots, x_t \in E$ tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$.

Initialisation

Pour $p=2$, on a vu dans la partie ***III*** qu'il existe une famille $(e_1,\dots,e_r,v_1,\dots,v_{n-2r})$ de vecteurs de E (avec $r=rg\,u$) telle que $(e_1,u(e_1),e_2,u(e_2),\dots,e_r,u(e_r),v_1,v_2,\dots,v_{n-2r})$ est une base de E et $v_k\in\ker u$ pour tout $k\in[\![1,n-2r]\!]$, donc $C_u(v_k)=\mathrm{Vect}(v_k)$.

De plus, comme $u^2=0$, on a $C_u(e_i)=\mathrm{Vect}(e_i,u(e_i))$ pour tout $i\in[\![1,r]\!]$.

Comme $(e_1,u(e_1),e_2,u(e_2),\dots,e_r,u(e_r),v_1,v_2,\dots,v_{n-2r})$ est une base de *E*, on a

$$\begin{aligned}E&=\mathrm{Vect}(e_1,u(e_1))\oplus\dots\oplus\mathrm{Vect}(e_r,u(e_r))\oplus\mathrm{Vect}(v_1)\oplus\dots\oplus\mathrm{Vect}(v_{n-2r})\\&=C_u(e_1)\oplus\dots\oplus C_u(e_r)\oplus C_u(v_1)\oplus\dots\oplus C_u(v_{n-2r})\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang $p=2$.

Hérédité

On suppose que la propriété est vraie à un rang $p\geq 2$.

Soit alors *u* un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel *E* de dimension finie *n*, avec *u* nilpotent d'indice $p+1$.

Dans la question **Q18**, on a vu que $\mathrm{Im}\,u$ est stable par *u* et que l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par *u* sur $\mathrm{Im}\,u$ est nilpotent, d'indice $p+1-1=p$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à $\tilde{u}$.

Ainsi, il existe des vecteurs $y_1,y_2,\dots,y_t\in\mathrm{Im}\,u$ tels que $\mathrm{Im}\,u=\bigoplus_{i=1}^{t}C_{\tilde{u}}(y_i)$.

Pour tout $i\in[\![1,t]\!]$, $y_i\in\mathrm{Im}\,u$ donc il existe $x_i\in E$ tel que $y_i=u(x_i)$.

Remarquons que pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a $u^{k+1}(x_i)=u^k(u(x_i))=u^k(y_i)$, donc $u^{s(y_i)}(x_i)=u^{s(y_i)-1}(y_i)\neq 0$ et $u^{s(y_i)+1}(x_i)=u^{s(y_i)}(y_i)=0$, et ainsi :

$$s(x_i)=s(y_i)+1.$$

Soit $(\lambda_{i,k})_{\substack{1\leq i\leq t\\0\leq k\leq s(y_i)}}$ une famille de scalaires telle que :

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{k=0}^{s(y_i)}\lambda_{i,k}u^k(x_i)=0.$$

En appliquant *u*, on obtient :

$$u\left(\sum_{i=1}^{t}\sum_{k=0}^{s(y_i)}\lambda_{i,k}u^k(x_i)\right)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{k=0}^{s(y_i)}\lambda_{i,k}u^{k+1}(x_i)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{k=0}^{s(y_i)}\lambda_{i,k}u^k(y_i)=\sum_{i=1}^{t}\sum_{k=0}^{s(y_i)-1}\lambda_{i,k}u^k(y_i)=0.$$

Or, les $C_{\tilde{u}}(y_i)=\mathrm{Vect}(y_i,u(y_i),\dots,u^{s(y_i)-1}(y_i))$ sont en somme directe, donc la famille $(u^k(y_i))_{\substack{1\leq i\leq t\\0\leq k\leq s(y_i)-1}}$ est libre, donc la relation ci-dessus implique que $\lambda_{i,k}=0$ pour tout $i\in[\![1,t]\!]$ et tout $k\in[\![0,s(y_i)-1]\!]$. On a alors :

$$\sum_{i=1}^{t}\lambda_{i,s(y_i)}u^{s(y_i)}(x_i)=\sum_{i=1}^{t}\lambda_{i,s(y_i)}u^{s(y_i)-1}(y_i)=0.$$

Or, pour tout $i \in [\![1,t]\!]$, $\lambda_{i,s(y_i)} u^{s(y_i)-1}(y_i) \in C_{\tilde{u}}(y_i)$ et toujours du fait de la somme directe des $C_{\tilde{u}}(y_i)$, on a $\lambda_{i,s(y_i)} = 0$ pour tout $i \in [\![1,t]\!]$.

Finalement, $\sum_{i=1}^{t} \sum_{k=0}^{s(y_i)} \lambda_{i,k} u^k(x_i) = 0$ implique que $\lambda_{i,k} = 0$ pour tout $i \in [\![1,t]\!]$ et tout $k \in [\![0, s(y_i)]\!]$, donc la famille $\left(u^k(x_i)\right)_{\substack{1 \le i \le t \\ 0 \le k \le s(y_i)}}$ est libre. Avec $C_u(x_i) = \mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i), u^2(x_i), \dots, u^{s(y_i)}(x_i)\right)$ pour tout $i \in [\![1,t]\!]$, ceci prouve que :

$$\sum_{i=1}^{t} C_u(x_i) = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i).$$

Remarquons que ceci implique que pour tout $i \in [\![1,t]\!]$, la famille $\left(x_i, u(x_i), u^2(x_i), \dots, u^{s(y_i)}(x_i)\right)$ et libre et donc que :

$$\begin{aligned} C_u(x_i) &= \mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i), u^2(x_i), \dots, u^{s(y_i)}(x_i)\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i), u^2(x_i), \dots, u^{s(y_i)-1}(x_i)\right) \oplus \mathrm{Vect}\left(u^{s(y_i)}(x_i)\right) \\ &= C_u\,'(x_i) \oplus \mathrm{Vect}\left(u^{s(y_i)}(x_i)\right) \end{aligned}$$

avec $C_u\,'(x_i) = \mathrm{Vect}\left(x_i, u(x_i), u^2(x_i), \dots, u^{s(y_i)-1}(x_i)\right)$.

On a alors :

$$\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i) = F \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{t} \mathrm{Vect}\left(u^{s(y_i)}(x_i)\right) \right) = F \oplus \mathrm{Vect}\left(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)\right) \qquad \mathbf{(1)}$$

avec $F = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u\,'(x_i)$.

On a :

$$\dim F = \sum_{i=1}^{t} \dim\left(C_u\,'(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{t} s(y_i) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{t} C_{\tilde{u}}(y_i) \right) = \dim\left(\mathrm{Im}\, u\right) = rg\, u.$$

Donc :

$$\dim F + \dim\left(\ker u\right) = rg\, u + \dim\left(\ker u\right) = n.$$

Ceci permet de conclure que :

$$F + \ker u = F \oplus \ker u = E \qquad \mathbf{(2)}$$

Par ailleurs, pour tout $i \in [\![1,t]\!]$, $u\left(u^{s(y_i)}(x_i)\right) = u^{s(y_i)}\left(u(x_i)\right) = u^{s(y_i)}(y_i) = 0$ donc $u^{s(y_i)}(x_i) \in \ker u$. Ainsi :

$$\mathrm{Vect}\left(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)\right) \subset \ker u.$$

De plus, $\dim\left(\mathrm{Vect}\left(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)\right)\right) = t$ car la famille $\left(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)\right)$ est extraite d'une famille libre, donc libre.

On peut compléter la famille $\left(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)\right)$ en une base $\left(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t), v_1, \dots, v_\alpha\right)$ de $\ker u$ avec $\dim\left(\ker u\right) = t + \alpha = n - rg\, u$, donc $\alpha = n - rg\, u - t$.

Comme la famille $\left(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t), v_1, \dots, v_\alpha\right)$ est une base de $\ker u$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\ker u &= \mathrm{Vect}\left(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t), v_1, \dots, v_\alpha\right) \\ &= \mathrm{Vect}\left(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)\right) \oplus \mathrm{Vect}(v_1) \oplus \dots \oplus \mathrm{Vect}(v_\alpha)\end{aligned}$$

Et comme plus haut $C_u(v_k) = \mathrm{Vect}(v_k)$, pour tout $k \in [\![1, \alpha]\!]$, donc :

$$\ker u = \mathrm{Vect}\left(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)\right) \oplus C_u(v_1) \oplus \dots \oplus C_u(v_\alpha) \qquad \textbf{(3)}$$

Finalement, avec **(1)**, **(2)** et **(3)**, on obtient :

$$\begin{aligned}E &= F \oplus \ker u \\ &= F \oplus \mathrm{Vect}\left(u^{s(y_1)}(x_1), \dots, u^{s(y_t)}(x_t)\right) \oplus C_u(v_1) \oplus \dots \oplus C_u(v_\alpha). \\ &= \left(\bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)\right) \oplus C_u(v_1) \oplus \dots \oplus C_u(v_\alpha)\end{aligned}$$

Ceci prouve que la propriété est vraie au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est initialisée et héréditaire, donc vraie pour tout $p \geq 2$.

Ainsi, pour tout endomorphisme *u* de *E*, nilpotent d'indice *p* :

$$\boxed{\text{Il existe } x_1, x_2, \dots, x_t \in E \text{ tels que } E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i).}$$

Q22. Pour tout $i \in [\![1, t]\!]$, $C_u(x_i)$ est stable par u (question **Q19**) et il existe une base $\left(x_i, u(x_i), \dots, u^{s(x_i)-1}(x_i)\right)$ de $C_u(x_i)$ dans laquelle la matrice de l'endomorphisme induit par *u* sur $C_u(x_i)$ est $J_{s(x_i)}$ (question **Q20**).

Comme $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$, $\mathcal{B} = \left(x_1, u(x_1), \dots, u^{s(x_1)-1}(x_1), \dots, x_t, u(x_t), \dots, u^{s(x_t)-1}(x_t)\right)$ est une base de *E*, on peut immédiatement conclure que la matrice de *u* dans cette base $\mathcal{B}$, adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{t} C_u(x_i)$, est :

$$\boxed{M_{\mathcal{B}}(u) = diag\left(J_{s(x_1)}, \dots, J_{s(x_t)}\right)}$$